

Application des amplificateurs opérationnels au filtrage analogique

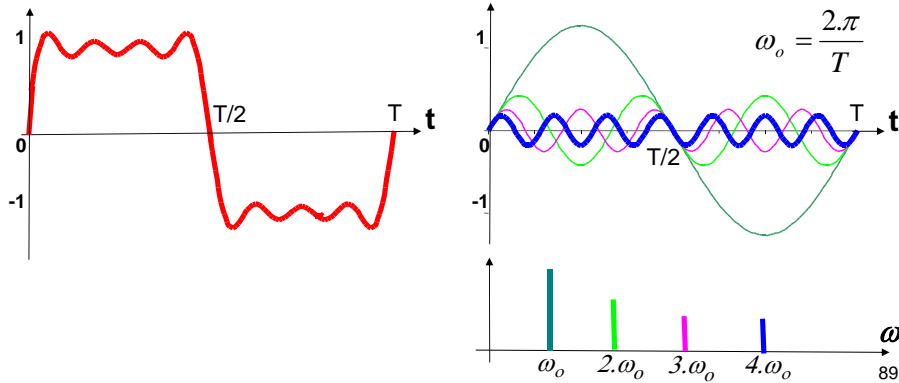
Décomposition d'un signal en série de Fourier

Un signal périodique se décompose en une série infinie de fonctions sinusoïdales

$$x(t) = X_o + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \cos(n \cdot \omega_o \cdot t) + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cdot \sin(n \cdot \omega_o \cdot t)$$

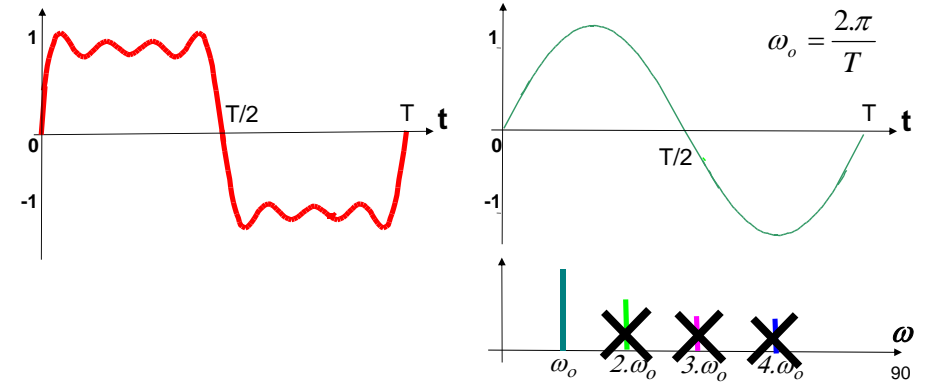
$$x(t) = X_o + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cdot \sin(n \cdot \omega_o \cdot t - \varphi_n)$$

Exemple : La courbe rouge est la somme des 4 premières harmoniques



Décomposition d'un signal en série de Fourier

On peut extraire de la courbe rouge la courbe verte (de période T) en éliminant les trois autres sinusoïdes



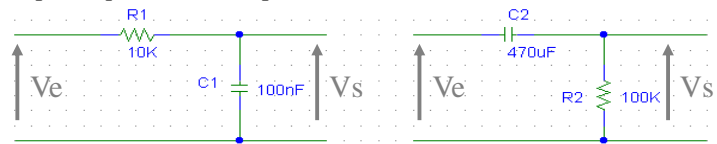
Définition et types de filtres

Définition :

La fonction filtrage permet de supprimer des signaux de fréquence non désirée. Il existe deux types de filtres :

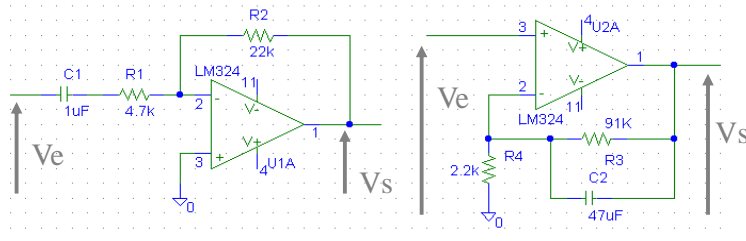
Les filtres passifs :

Ils ne sont composés que d'éléments passifs (résistances, condensateurs, bobines).



Les filtres actifs :

Il y a en plus une amplification du signal d'entrée par un élément actif (AOP, Transistor).



91

Comportement des impédances en fonction de la fréquence

L'impédance d'une résistance est constante en fonction de la fréquence

Pour les autres ...

	Basses Fréquences	Hautes Fréquences
$j.L.\omega$	0 ———	∞ ———
$\frac{1}{j.C.\omega}$	∞ ———	0 ———

Qu'ils soient actifs ou passifs, les filtres laissent ou ne laissent pas passer certaines fréquences.

Ainsi on distingue 4 sortes de filtres :

- **Les filtres Passe-Bas** (ne laissent passer que les fréquences basses)
- **Les filtres Passe-Haut** (ne laissent passer que les fréquences hautes)
- **Les filtres Passe-Bande** (ne laissent passer qu'une plage de fréquences)
- **Les filtres Coupe-Bande** (ne laissent pas passer une plage de fréquences)

92

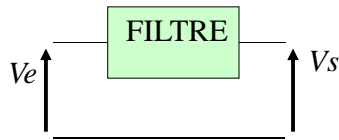
Caractérisation d'un filtre

Un système linéaire est mathématiquement décrit par sa **FONCTION DE TRANSFERT** ou **TRANSMITTANCE** :

$$T(j\omega) = \frac{V_s(j\omega)}{V_e(j\omega)}$$

$V_s(j\omega)$ est le signal en sortie du filtre

$V_e(j\omega)$ est le signal à l'entrée du filtre



93

Représentation par un lieu de Bode

Pour un signal d'entrée quelconque :

$$x(s) \rightarrow \text{système} \rightarrow y(s) \quad \frac{Y(s)}{X(s)} = T(s) = K \cdot \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}$$

Pour un signal d'entrée sinusoïdal :

$$x(j\omega) \rightarrow \text{système} \rightarrow y(j\omega)$$



$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = T(j\omega) = K \cdot \frac{(j\omega+z_1)(j\omega+z_2)\dots(j\omega+z_m)}{(j\omega+p_1)(j\omega+p_2)\dots(j\omega+p_n)}$$

94

Représentation par un lieu de Bode

L'expression logarithmique permet de transformer les multiplications et divisions en additions et soustractions.

Exemple :

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = T(j\omega) = K \cdot \frac{(\frac{j\omega}{\omega_{e1}} + 1) \cdot \frac{j\omega}{\omega_{e2}}}{(\frac{j\omega}{\omega_{e3}} + 1) \cdot \frac{j\omega}{\omega_{e4}}}$$

$$20 \cdot \log \left| \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \right| = 20 \cdot \log |K| + 20 \cdot \log \left| \frac{j\omega}{\omega_{e1}} + 1 \right| + 20 \cdot \log \left| \frac{j\omega}{\omega_{e2}} \right| - 20 \cdot \log \left| \frac{j\omega}{\omega_{e3}} + 1 \right| - 20 \cdot \log \left| \frac{j\omega}{\omega_{e4}} \right|$$

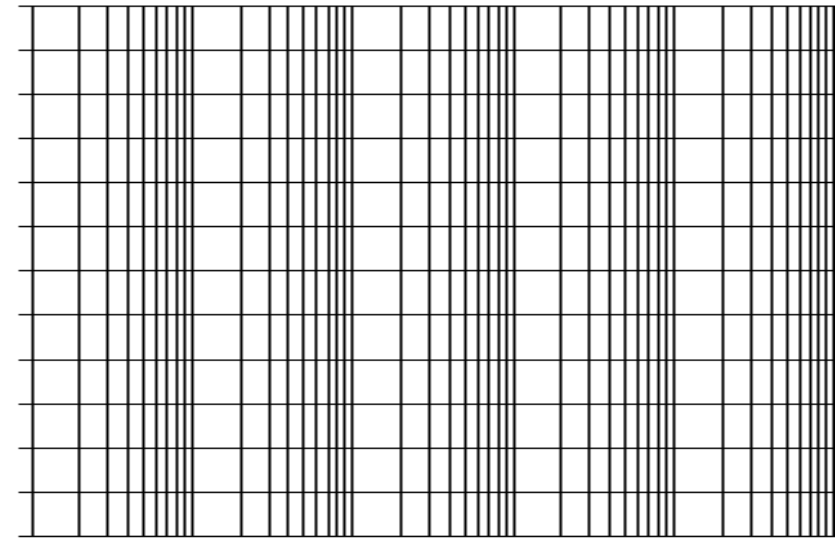
Quatre termes sont à distinguer:

$$20 \cdot \log |K| \quad 20 \cdot \log \left| \frac{j\omega}{\omega_c} \right| \quad -20 \cdot \log \left| \frac{j\omega}{\omega_c} \right| \quad 20 \cdot \log \left| \frac{j\omega}{\omega_c} + 1 \right| \quad -20 \cdot \log \left| \frac{j\omega}{\omega_c} + 1 \right|$$

95

Représentation par un lieu de Bode

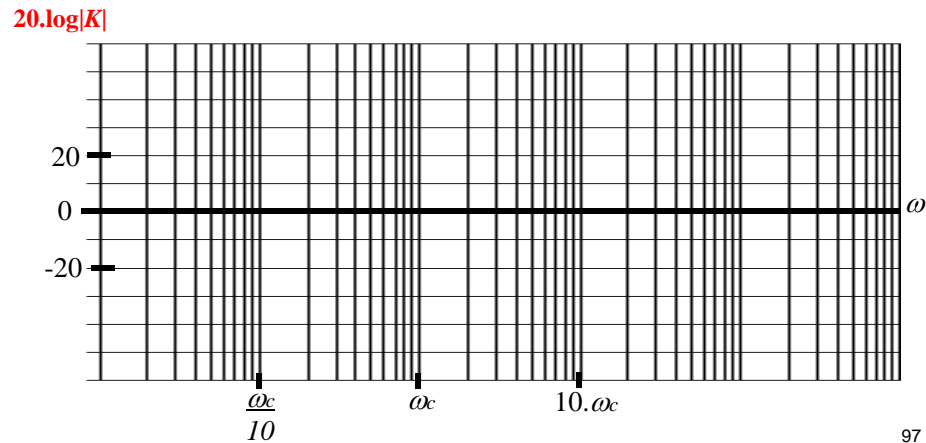
Feuille de papier semilogarithmique pour le tracé de lieu de Bode



96

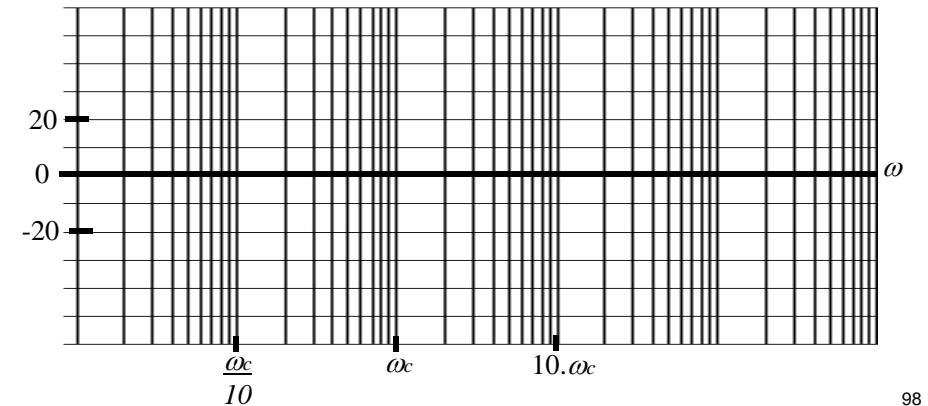
Représentation d'un lieu de Bode

Le terme $20.\log|K|$, ne dépend pas de la fréquence, il est constant quel que soit la pulsation



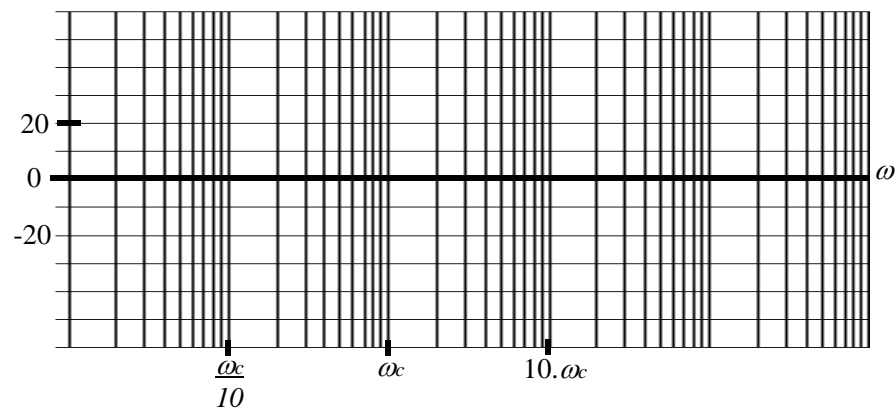
Représentation d'un lieu de Bode

$$20.\log\left|\frac{j\omega}{\omega_c}\right| = \begin{cases} 0\text{dB} & \text{si } \omega = \omega_c \\ \rightarrow \text{infini} & \text{si } \omega \rightarrow \text{infini} \\ \rightarrow -\text{infini} & \text{si } \omega \rightarrow 0 \\ +20\text{dB} & \text{si } \omega = 10.\omega_c \\ -20\text{dB} & \text{si } \omega = \omega_c/10 \end{cases} \left. \vphantom{\frac{j\omega}{\omega_c}} \right\} +20\text{db/dec}$$



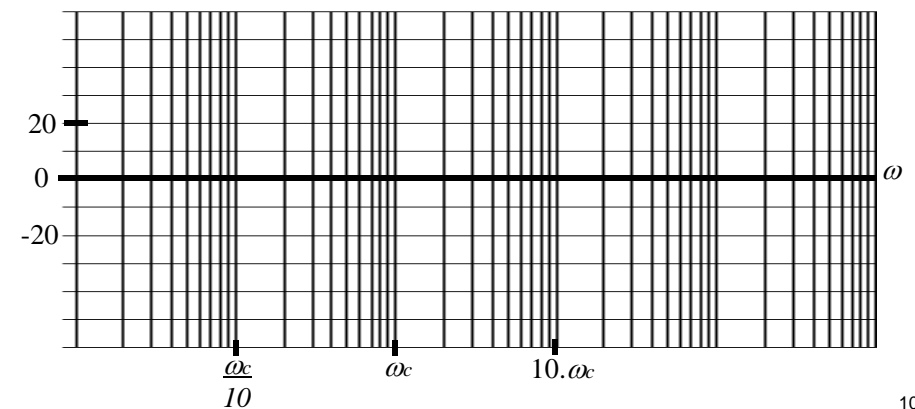
Représentation d'un lieu de Bode

$$20.\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| = \begin{cases} 0\text{dB} & \text{si } \omega = \omega_c \\ \rightarrow \text{infini} & \text{si } \omega \rightarrow 0 \\ \rightarrow -\text{infini} & \text{si } \omega \rightarrow \text{infini} \\ -20\text{dB} & \text{si } \omega = 10.\omega_c \\ +20\text{dB} & \text{si } \omega = \omega_c/10 \end{cases} \left. \vphantom{\frac{1}{j\omega}} \right\} -20\text{db/dec}$$



Représentation d'un lieu de Bode

$$20.\log\left|\frac{j\omega}{\omega_c} + 1\right| = \begin{cases} 0\text{dB} & \text{si } \omega \rightarrow 0 \\ \rightarrow \text{infini} & \text{si } \omega \rightarrow \text{infini} \\ 3\text{dB} & \text{si } \omega = \omega_c \\ \approx +20\text{dB} & \text{si } \omega = 10.\omega_c \end{cases}$$



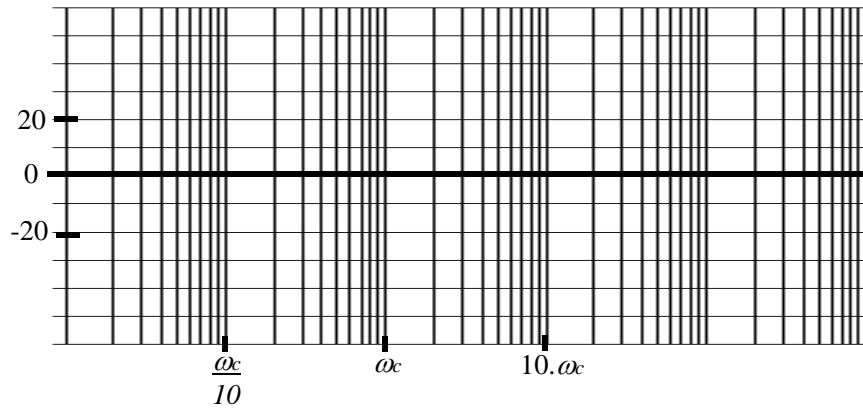
Représentation d'un lieu de Bode

$$20 \cdot \log \left| \frac{1}{j\omega + 1} \right| = 0\text{dB} \quad \text{si } \omega \rightarrow 0$$

$$\rightarrow -\infty \text{ si } \omega \rightarrow +\infty$$

$$= -3\text{dB} \quad \text{si } \omega = \omega_c$$

$$\approx -20\text{dB} \quad \text{si } \omega = 10 \cdot \omega_c$$



101

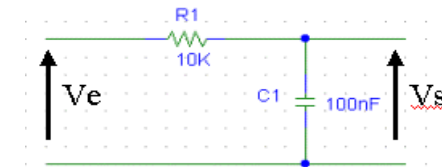
Représentation d'un lieu de Bode

$$T(j\omega) = 25000 \cdot \frac{j\omega + 10}{(j\omega + 5) \cdot (j\omega + 500)}$$

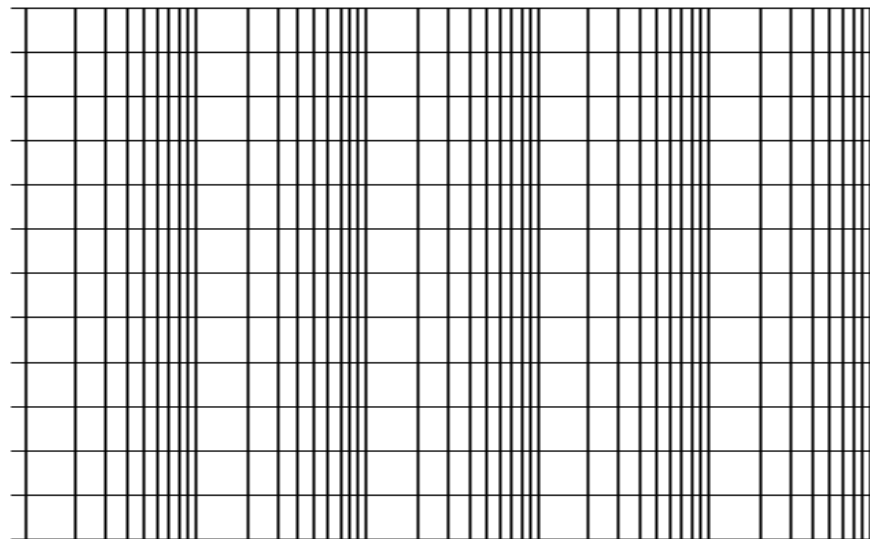
102

Exemple : filtre passif du 1er ordre

Le calcul de la TRANSMITTANCE sera faite sur un filtre RC de type Passe-Bas.



$$Vs(j\omega) =$$



103

104

Exemple : filtre passif du 1er ordre

Traçé du lieu de Bode

Le gain s'exprime en décibel :

$$G(\text{dB}) = 20 * \log \left| \frac{V_s(j\omega)}{V_e(j\omega)} \right| \quad (\text{Log du module de } T(j\omega))$$

Quelques valeurs :

$$G(\text{dB}) = 20 * \log \left| \frac{1}{\sqrt{(1 + R^2 C^2 \omega^2)}} \right|$$

$$F = 10\text{Hz} \Rightarrow G = 0 \text{ dB}$$

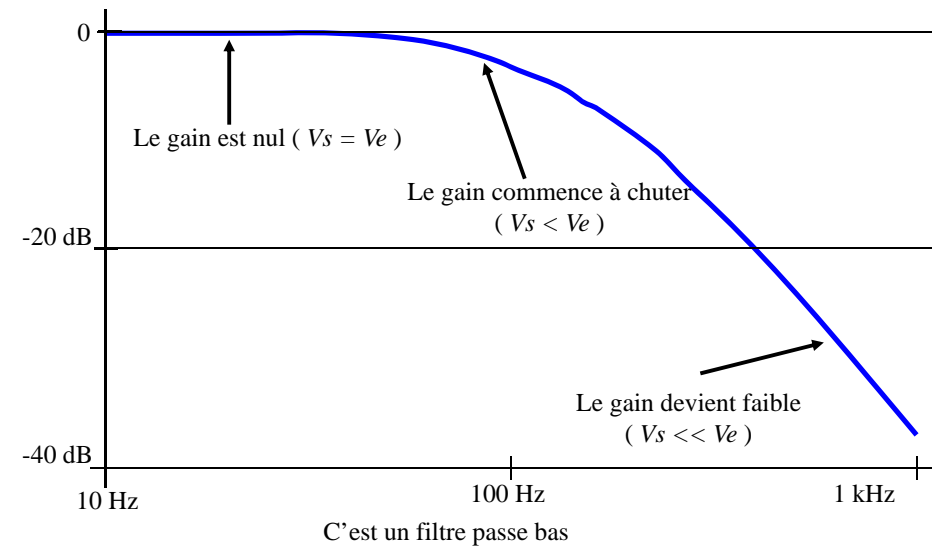
$$F = 160\text{Hz} \Rightarrow G = -3 \text{ dB}$$

$$F = 1000\text{Hz} \Rightarrow G = -38 \text{ dB}$$

105

Courbe de gain d'un filtre passif du 1er ordre

La courbe de gain du filtre RC



106

Quelques remarques et définitions

→ La fréquence pour laquelle la tension de sortie est atténuée de $\sqrt{2}$ par rapport à sa valeur maximale s'appelle :

la **FREQUENCE de COUPURE**

→ C'est aussi la fréquence pour laquelle le gain est atténué de -3 dB par rapport au gain maximum (ici 0 dB)

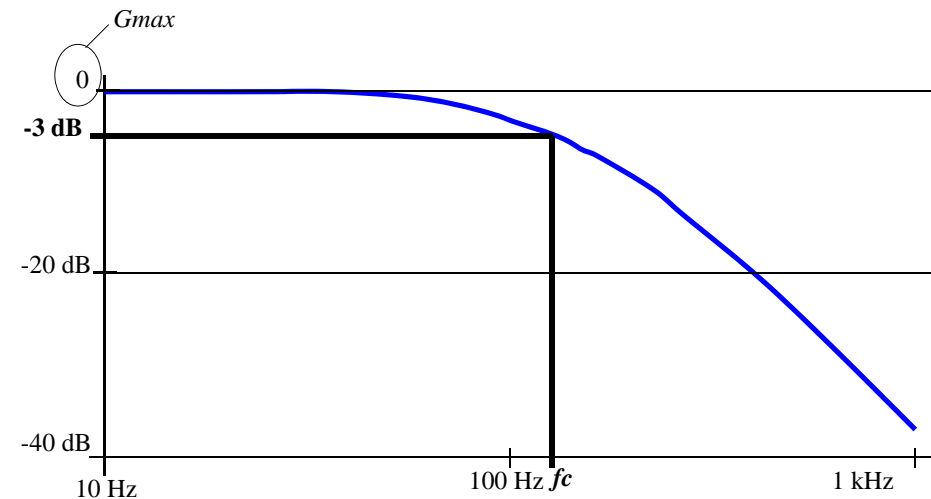
$$\frac{V_s(j\omega_c)}{V_e(j\omega_c)} = \frac{V_{s_max}}{V_e(j\omega)} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$20 * \log \left| \frac{V_s(j\omega_c)}{V_e(j\omega_c)} \right| = 20 * \log \left| \frac{V_{s_max}}{V_e} \right| - 20 * \log \sqrt{2}$$

$$G(j\omega_c) = G_{max} - 3 \text{ dB}$$

107

Fréquence de coupure d'un filtre passif du 1er ordre



→ Avant la fréquence de coupure, on retrouve en sortie la quasi totalité du signal

→ Après cette fréquence, le signal de sortie est fortement atténué

108

Quelques remarques et définitions

→ Le filtre étant **d'ORDRE 1**, le gain diminue de **20 dB / décade** après la fréquence de coupure

c'est-à-dire chaque fois que l'on multiplie par 10 la fréquence, le gain baissera de 20 dB.

Notre exemple :

A $f = 1$ kHz le gain est de -40 dB environ.

A $f = 10$ kHz le gain sera de -60 dB environ

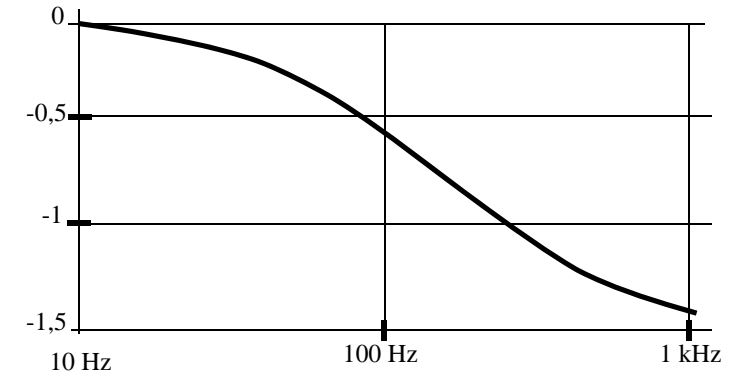
A $f = 100$ kHz le gain sera de -80 dB environ ...

109

Déphasage d'un filtre passif du 1er ordre

Il apparaît aussi un **déphasage** entre la tension d'entrée et la tension de sortie.

déphasage en radians

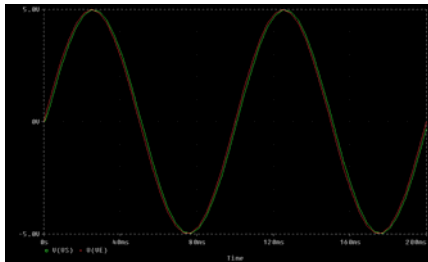


Celui-ci est nul une décade avant la fréquence de coupure, Il est de 45° à la fréquence de coupure et de 90° une décade de fréquence après la fréquence de coupure.

110

Déphasage d'un filtre passif du 1er ordre

Chronogrammes (déphasage)

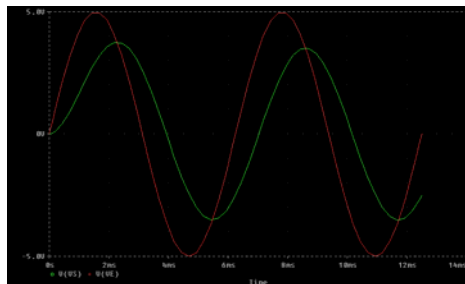


La fréquence du signal d'entrée est de 10Hz et on observe un déphasage pratiquement nul. L'amplitude du signal de sortie est quasiment la même qu'en entrée.

La fréquence du signal d'entrée est de 160Hz et on observe un déphasage de 45° . Nous sommes à la fréquence de coupure !

$$V_s \text{ max} = V_e \text{ max} / \sqrt{2}$$

$$G \text{ (dB)} = -3 \text{ dB}$$



111

Intérêt des filtres actifs

Ils sont constitués de résistances, de condensateurs et d'amplificateurs opérationnels

Les avantages :

- _ une impédance d'entrée élevée
- _ une faible impédance de sortie
- _ un gain en tension > 1

Remarque :

Idéalement, il faudrait $Z_e = \text{infini}$ et $Z_s = 0$

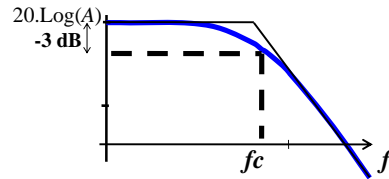
Voir cours sur l'adaptation d'impédance (montage suiveur)

112

Les filtres actifs du 1er ordre

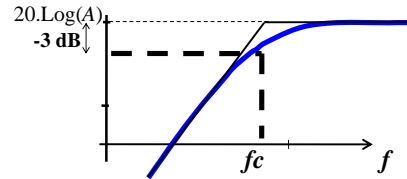
Les filtres passe bas

$$T(j, \omega) = A \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_c}}$$



Les filtres passe haut

$$T(j, \omega) = A \cdot \frac{j \cdot \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_c}}$$



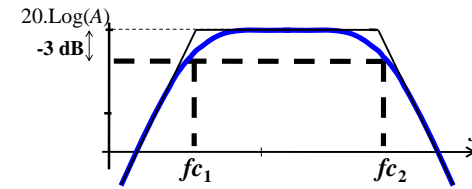
Limites :

- $\omega = \omega_c$
- $\omega \rightarrow 0$
- $\omega \rightarrow \text{infini}$
- $\omega = 10 \cdot \omega_c$
- $\omega = \omega_c / 10$

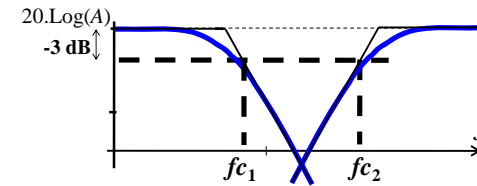
113

Les filtres actifs du 1er ordre

Les filtres passe bande

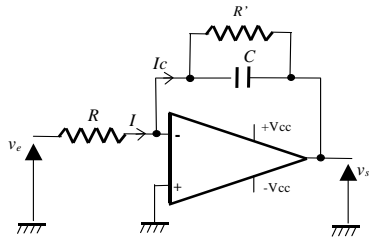


Les filtres coupe bande



114

Filtre actif passe bas du 1er ordre



$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$



$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{R'}{R} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot R' \cdot C}$$

A ← Passé bas

Détermination de la fréquence de coupure

$$|T(j, \omega)| =$$

Le module de la transmittance est maximum pour $\omega=0$ $|T(j, \omega)|_{\max} :$

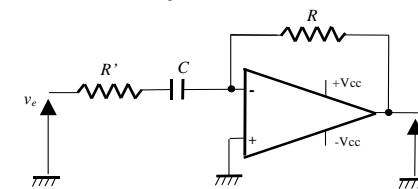
$$|T(j, \omega_c)| = \frac{R'}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_c^2 \cdot R'^2 \cdot C^2}} = \frac{R'}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$



Et donc $\omega_c =$

115

Filtre actif passe haut du 1er ordre



$$T(j, \omega) = \frac{V_s}{V_e} =$$

Détermination de la fréquence de coupure

$$|T(j, \omega)| =$$

Le module de la transmittance est maximum pour $\omega=\infty$ $|T(j, \omega)|_{\max} =$

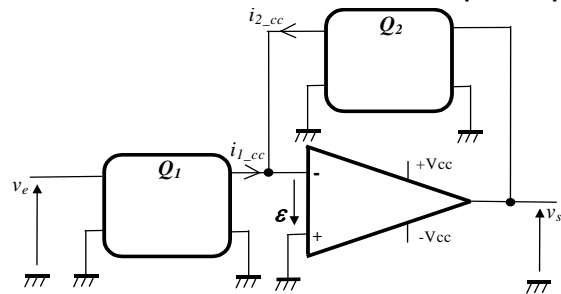
$$|T(j, \omega_c)| = \frac{R}{R'} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\omega_c^2 \cdot R'^2 \cdot C^2} + 1}} = \frac{R}{R'} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$



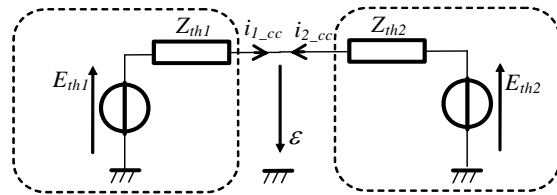
Et donc $\omega_c =$

116

Synthèse des filtres en utilisant des quadripôles



Le théorème de Thévenin permet de considérer chaque quadripôle par une mise en série d'un générateur de tension et d'une impédance



117

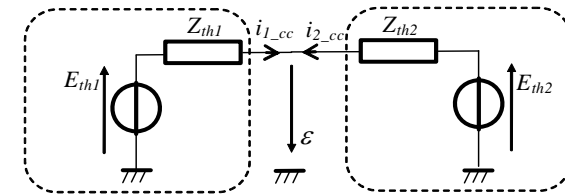
Synthèse des filtres en utilisant des quadripôles

La tension aux bornes de chaque quadripôle vaut $\epsilon = 0$

$$i_{1_cc} = \frac{E_{th1}}{Z_{th1}} \text{ est le courant de court circuit de } Q1, \text{ d'où } i_{1_cc} = \alpha.Ve$$

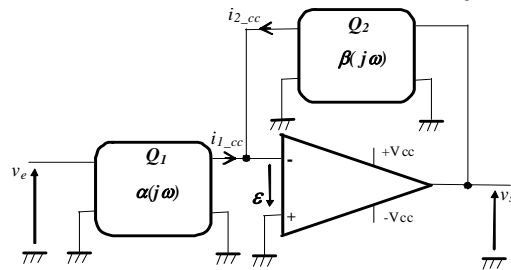
α est une admittance

$$\text{De même } i_{2_cc} = \beta.Vs$$



118

Synthèse des filtres en utilisant des quadripôles



$$i_{1_cc} = \alpha.Ve$$

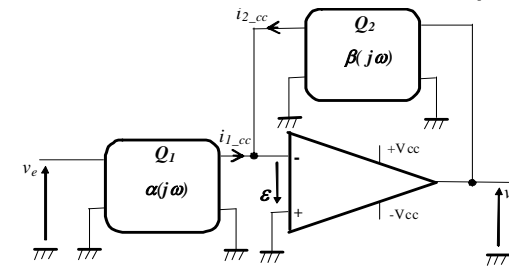
$$i_{2_cc} = \beta.Vs$$

$$i_{1_cc} = -i_{2_cc}$$

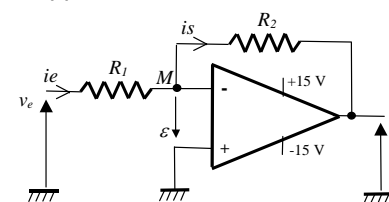
$$\frac{Vs(j\omega)}{Ve(j\omega)} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

119

Synthèse des filtres en utilisant des quadripôles



Application :



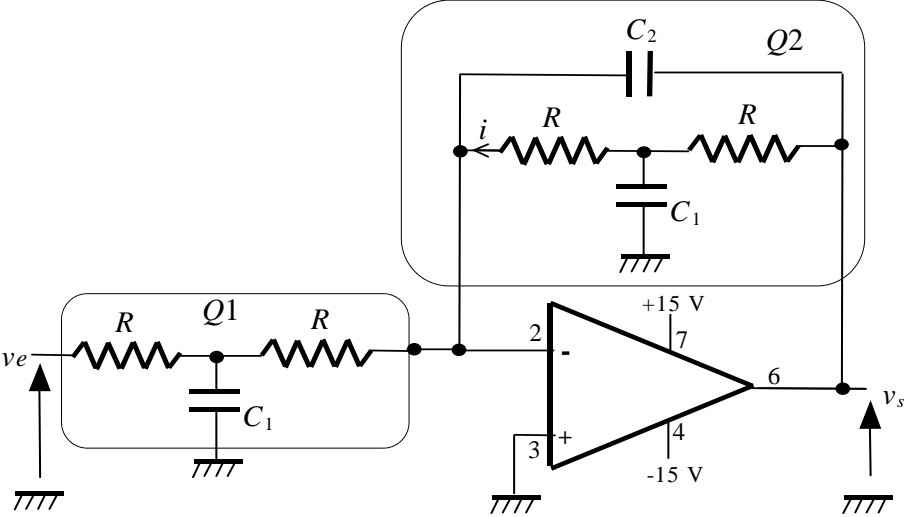
$$\frac{Vs}{Ve} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

$$\alpha = \frac{i_{1_cc}}{Ve} = \frac{1}{R1} \quad \beta = \frac{i_{2_cc}}{Vs} = \frac{1}{R2}$$

$$\frac{Vs}{Ve} = -\frac{\frac{1}{R1}}{\frac{1}{R2}} = -\frac{R2}{R1}$$

120

Exemple d'application



Filtre normalisé du second ordre

Filtre passe bas : $T_o(j\omega) = \frac{A}{1 + j.2.\zeta \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$

Filtre passe haut : $T(j\omega) = -\frac{\omega^2}{\omega_n^2} T_o(j\omega)$

Filtre passe bande : $T(j\omega) = j.2.\zeta \frac{\omega}{\omega_n} T_o(j\omega)$

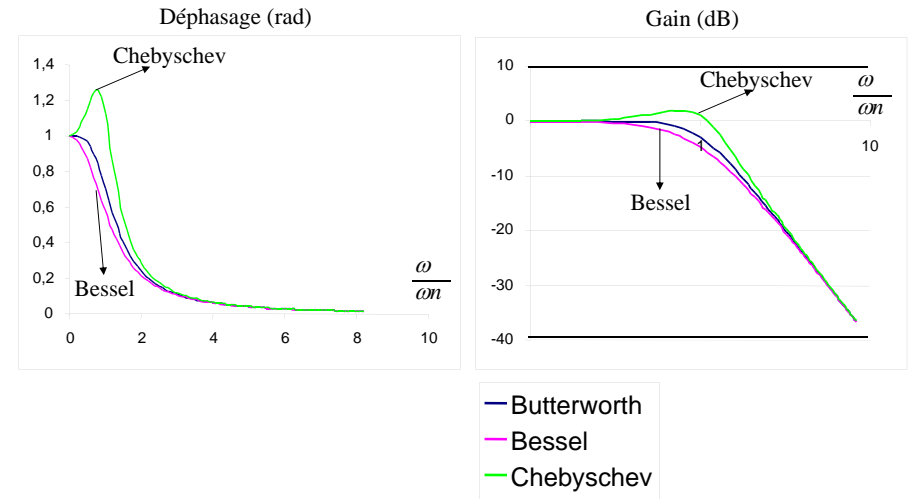
Filtre coupe bande : $T(j\omega) = (1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}) T_o(j\omega)$

ζ est le coefficient d'amortissement

- $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **Butterworth**
- $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ **Chebyshev**
- $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ **Bessel**

125

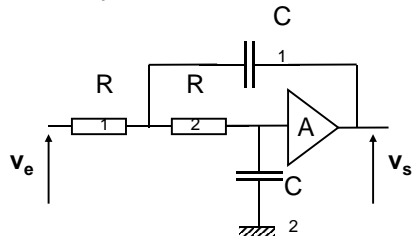
Filtre normalisé du second ordre



126

filtrage

Cellules prédéfinies: filtre de Sallen-Key (1965)



Passe-bas du 2^{ème} ordre

$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{A}{R_1 C_1 R_2 C_2 (j\omega)^2 + [C_2(R_1 + R_2) + R_1 C_1(1-A)](j\omega) + 1}$$

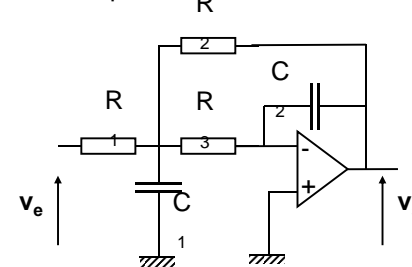
stabilité $\implies A < \frac{(R_1 + R_2)C_2}{R_1 C_1} + 1$

Les cellules de Sallen-Key permettent de réaliser tous les filtres polynomiaux

127

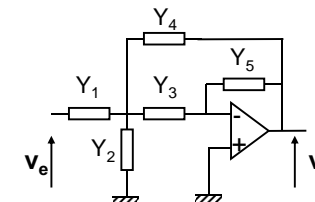
filtrage

Cellules prédéfinies: cellule de Rauch (2^{ème} ordre)



$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{-R_2/R_1}{R_2 R_3 C_1 C_2 (j\omega)^2 + C_2 R_2 R_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) (j\omega) + 1}$$

Généralisation:



Toujours stable

$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{-Y_1 Y_3}{Y_3 Y_4 + Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)}$$

128