

**ECOLE CENTRALE DE LILLE**

**THESE**

présentée en vue  
d'obtenir le grade de

**DOCTEUR**

en

Spécialité : Automatique et Informatique Industrielle

par

**Frédéric COLAS**

**DOCTORAT DELIVRE PAR L'ECOLE CENTRALE DE LILLE**

Titre de la thèse :

**Synthèse et réglage de lois de commande adaptées aux axes  
souples en translation**

**– Application aux robots cartésiens 3 axes –**

Soutenue le 14 Novembre 2007 devant le jury d'examen :

|                              |                                                                         |
|------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| <b>Président</b>             | Mohammed M'Saad, Professeur des Universités, EnsiCaen                   |
| <b>Rapporteur</b>            | Philippe Poignet, Professeur des Universités, Université Montpellier II |
| <b>Rapporteur</b>            | Mohammed M'Saad, Professeur des Universités, EnsiCaen                   |
| <b>Invité</b>                | Henri David, Ingénieur d'Etudes, SEPRO-Robotique                        |
| <b>Directeur de thèse</b>    | Pierre Borne, Professeur des Universités, Ecole Centrale de Lille       |
| <b>Co-Directeur de thèse</b> | Jean-Yves Dieulot, Maître de Conférences HDR, Polytech'Lille            |
| <b>Co-Directeur de thèse</b> | Pierre-Jean Barre, Professeur des Universités, ENSAM CER de Lille       |

Thèse préparée dans le laboratoire LAGIS

Ecole Doctorale SPI 072 (Lille I, Lille III, Artois, ULCO, UVHC, EC Lille)



*Je dédie ce mémoire  
à Gaëlle et à mes parents*



# Résumé

Les robots cartésiens sont utilisés dans de nombreux processus industriels et notamment dans l'industrie plastique pour des opérations de décharge de presses à injection. D'un point de vue industriel, augmenter les performances de ces machines passe par l'utilisation de structures allégées. En effet, la réduction des masses en mouvement permet, d'une part, de réduire sensiblement les coûts de fabrication et, d'autre part, d'accroître les caractéristiques dynamiques générales. Cependant, l'augmentation de la souplesse mécanique qui en résulte dégrade fortement le comportement vibratoire de ces robots. Les travaux développés dans cette étude visent à améliorer le temps de cycle d'un axe souple de robot cartésien par une action sur la commande tout en maîtrisant son comportement vibratoire. La démarche adoptée tout au long de cette étude relève d'un enchaînement modélisation/commande/autoréglage pouvant s'intégrer dès la phase de conception d'un système. La méthodologie de modélisation d'un axe souple permet d'obtenir les caractéristiques modales de la structure à partir d'un modèle continu de type poutre, dérivé d'un modèle éléments-finis. L'application de principes d'inversion sur les modèles de commande obtenus permet d'élaborer une méthode de conception de commandes adaptées aux axes souples. Les nombreux algorithmes de précommande ou de planification de trajectoire proposés permettent d'atténuer les vibrations en gardant des performances acceptables. La robustesse de l'architecture de commande par rapport aux erreurs de modélisation et aux perturbations extérieures est assurée par des asservissements dont la synthèse prend en compte la flexibilité du robot. Les stratégies de commande ont été validées sur deux robots cartésiens SEPRO-Robotique de génération et de taille différentes. Enfin, des méthodes d'autoréglage des principaux asservissements et précommandes proposés auparavant sont présentées.

**Mots-clés :** Structures de commande, comportement vibratoire, système flexible, système à dynamique élevée, modélisation, loi de mouvement, précommande, asservissement, Graphe Informationnel Causal.

# Abstract

Cartesian robots are generally devoted to industrial pick-and-place applications such as demoulding plastic injection machines. From the industrial point of view, the demand for improved performances motivates the use of lightweight structures. Indeed the lightening of moving masses makes it possible to cut production costs while improving the overall dynamics. However, additional stresses are generated which consequently induce undesirable vibrations. Adequate controller design, which is the core of this study, has been shown to be able to improve the performances of flexible axes while damping mechanical vibrations. A modelling/control/self-tuning development has been introduced, which can be considered from the mechanical design stage. The modal parameters of the system are obtained from a continuous model which has been derived from a finite element model. A control synthesis method using the inversion principle has been developed to monitor flexible axes. The many feedforward or trajectory planning algorithms thereby designed have shown to be able to enhance the overall dynamics of the machine while limiting the deformation modes vibrations. A feedback control has been embedded into the control architecture in order to develop robustness with respect to model uncertainties and rejection of external disturbances. Control strategies have been validated on two Cartesian robots with different generation and size. At last, auto-tuning methods tailored to the feedforward and feedback controllers introduced previously have been presented.

**Keywords:** Robot control, Mechanical vibrations, Flexible structure, Trajectory Planning, Feedforward control, Robust control, Causal Ordering Graph, Iterative Learning.



*Le commencement de toutes les sciences,  
c'est l'étonnement de ce que les choses sont ce qu'elles sont*

[Aristote]



# Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein de l'Équipe de Recherche CEMODYNE associée au Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal (LAGIS – UMR 8146) en cotutelle avec la société SEPRO-Robotique basée à la Roche-sur-Yon (convention CIFRE).

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur Mohamed M'Saad pour avoir accepté de présider mon jury de thèse et d'être rapporteur de ce mémoire. Je remercie également Monsieur le Professeur Philippe Poignet pour avoir accepté d'être rapporteur de ce mémoire. Je n'oublie pas Henri David qui a accepté de participer au jury en tant qu'invité.

Je remercie mes encadrants industriels de SEPRO-Robotique, Hervé Sennedot, Jean-Christophe Augé puis Frédéric Bonnardot et Francis Columbeau pour m'avoir permis de réaliser cette étude. Je remercie tout particulièrement Henri David pour son aide précieuse et ses remarques pragmatiques qui m'ont permis de conserver le sens du concret.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse, Pierre Borne, Professeur à l'Ecole Centrale de Lille, qui a accepté d'encadrer cette thèse et qui m'a témoigné son soutien et sa confiance. Je remercie mon co-directeur de thèse Jean-Yves Dieulot, Maître de conférences à l'école Polytech'Lille, pour sa disponibilité et son implication totale dans ce travail. Il a su m'apporter toute l'aide et la motivation nécessaires à la bonne réussite de ce projet. Je remercie Pierre-Jean Barre, instigateur de l'Equipe de recherche CEMODYNE, co-directeur de thèse également, Professeur des Universités et directeur du centre ENSAM de Lille, pour son suivi permanent et ses remarques fondées. Je remercie également Richard Béarée, Maître de conférences à l'ENSAM de Lille, pour sa complicité et son immense contribution.

Mes pensées se tournent plus particulièrement vers les membres de l'équipe de recherche CEMODYNE, Olivier Ruelle, Julien Gomand, Ghislain Remy, Xavier Kestelyn, Eric Dumetz et Jean-Luc Munoz avec lesquels j'ai pu partager de nombreux moments de distractions. Cette équipe unie m'a toujours apporté un soutien inestimable. Je remercie aussi Fabrice Locment, Jeune docteur du L2EP, pour son amitié.

Je n'oublie pas dans mes remerciements les membres de l'ENSAM et tout particulièrement le personnel du service AEE. Je commencerai par Bernard Détand pour ces innombrables coups de main et sa sympathie. Je remercie Luc Bulteau, Marc Suffys, Rodolphe Sory et Gérard Saillot pour leur bonne humeur et sans qui les réalisations pratiques n'auraient pas pu se concrétiser.

Enfin et surtout, merci à mes parents et à Gaëlle pour m'avoir soutenu tout au long de ces trois années.



# Sommaire

|                                                                                                |             |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| <i>Résumé</i>                                                                                  | <i>i</i>    |
| <i>Remerciements</i>                                                                           | <i>v</i>    |
| <i>Sommaire</i>                                                                                | <i>vii</i>  |
| <i>Liste des figures</i>                                                                       | <i>xi</i>   |
| <i>Liste des tableaux</i>                                                                      | <i>xv</i>   |
| <i>Notations et acronymes</i>                                                                  | <i>xvii</i> |
| <i>Introduction générale</i>                                                                   | <i>1</i>    |
| <i>Chapitre 1 Introduction à la commande des machines de positionnement à dynamique élevée</i> | <i>4</i>    |
| 1.1 Commande des machines de positionnement à dynamique élevée                                 | 4           |
| 1.2 Problématique et cahier des charges de la société SEPRO-Robotique                          | 6           |
| 1.2.1 Architecture globale des robots cartésiens SEPRO-Robotique                               | 8           |
| 1.2.2 Problématique de la société SEPRO-Robotique                                              | 8           |
| 1.3 Démarche générale de synthèse d'une architecture de commande d'un robot cartésien          | 10          |
| 1.4 Principales contributions de cette thèse                                                   | 11          |
| 1.5 Hypothèses de travail                                                                      | 11          |
| <i>Chapitre 2 Modélisation physique générique d'un axe souple</i>                              | <i>14</i>   |
| 2.1 Démarche générale de modélisation d'un axe souple                                          | 14          |
| 2.2 Modèle de connaissance                                                                     | 16          |
| 2.2.1 Modélisation éléments-finis d'un robot cartésien                                         | 16          |
| 2.2.2 Analyse modale du modèle éléments-finis                                                  | 17          |
| 2.2.3 Validations par analyse modale expérimentale                                             | 19          |
| 2.2.4 Bilan du modèle de connaissance de l'axe Y                                               | 21          |
| 2.3 Modèle de comportement de l'axe Y                                                          | 23          |

|                                                                     |                                                                                                       |            |
|---------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.3.1                                                               | Modélisation de la dynamique d'une poutre continue                                                    | 25         |
| 2.3.2                                                               | Application au modèle de comportement de l'axe Y                                                      | 33         |
| 2.3.3                                                               | Assemblage des deux modèles                                                                           | 37         |
| 2.4                                                                 | Modèles à paramètres localisés                                                                        | 40         |
| 2.4.1                                                               | Graphe Informationnel Causal (GIC)                                                                    | 40         |
| 2.4.2                                                               | Discretisation du modèle continu                                                                      | 41         |
| 2.4.3                                                               | Prise en compte des frottements                                                                       | 45         |
| 2.5                                                                 | Bilan sur la modélisation physique générique d'un axe souple                                          | 45         |
| <b>Chapitre 3 Commande d'un axe souple</b>                          |                                                                                                       | <b>48</b>  |
| 3.1                                                                 | Elaboration d'une architecture de commande en utilisant le principe d'inversion                       | 48         |
| 3.1.1                                                               | Principe d'inversion directe                                                                          | 49         |
| 3.1.2                                                               | Principe d'inversion indirecte                                                                        | 50         |
| 3.1.3                                                               | Couplage des deux principes d'inversion                                                               | 51         |
| 3.1.4                                                               | Architecture de commande générique d'un axe                                                           | 53         |
| 3.2                                                                 | Lois de mouvement et Précommande de l'extrémité d'un axe souple en boucle ouverte (Inversion directe) | 54         |
| 3.2.1                                                               | Génération de lois de mouvement adaptées aux déplacements d'un axe                                    | 54         |
| 3.2.2                                                               | Conception de la précommande d'un axe souple                                                          | 62         |
| 3.2.3                                                               | Application à la génération d'une précommande d'un axe souple                                         | 67         |
| 3.2.4                                                               | Bilan et choix d'un type de loi de mouvement et d'une précommande d'un axe souple                     | 77         |
| 3.3                                                                 | Synthèse de l'asservissement du moteur (inversion indirecte)                                          | 78         |
| 3.3.1                                                               | Classification de Techniques d'asservissement adaptées aux axes souples                               | 78         |
| 3.3.2                                                               | Commande industrielle – Commande par boucles en cascade                                               | 87         |
| 3.3.3                                                               | Synthèse de correcteur par approche paramétrique                                                      | 90         |
| 3.3.4                                                               | Compensation directe d'un mode souple par retour accélérométrique                                     | 99         |
| 3.3.5                                                               | Bilan sur la synthèse d'un asservissement du moteur                                                   | 103        |
| 3.4                                                                 | Bilan sur la commande d'un axe souple                                                                 | 104        |
| <b>Chapitre 4 Autoréglage par apprentissage indirect itératif</b>   |                                                                                                       | <b>106</b> |
| 4.1                                                                 | Techniques d'apprentissage                                                                            | 106        |
| 4.2                                                                 | Apprentissage indirect et commande en boucle fermée                                                   | 108        |
| 4.3                                                                 | Estimation de fréquence en vue du réglage d'une précommande rigide                                    | 110        |
| 4.3.1                                                               | Techniques d'estimation fréquentielle                                                                 | 110        |
| 4.3.2                                                               | Mise en œuvre de techniques d'estimation – application à un axe souple                                | 113        |
| 4.3.3                                                               | Estimation de fréquence et adaptation de la loi de mouvement                                          | 114        |
| 4.4                                                                 | Bilan sur les techniques d'autoréglage                                                                | 115        |
| <b>Chapitre 5 Conclusions générales et principales perspectives</b> |                                                                                                       | <b>116</b> |

|                                                                             |                   |
|-----------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| 5.1 Synthèse des travaux réalisés                                           | 116               |
| 5.2 Perspectives                                                            | 117               |
| <b><i>Glossaire</i></b>                                                     | <b><i>120</i></b> |
| <b><i>Bibliographie</i></b>                                                 | <b><i>122</i></b> |
| <b><i>Annexe A Principe de l'analyse modale expérimentale</i></b>           | <b><i>128</i></b> |
| <b><i>Annexe B Analyse modale du modèle continu de l'axe Y</i></b>          | <b><i>134</i></b> |
| <b><i>Annexe C Réduction de l'ordre du modèle de comportement</i></b>       | <b><i>138</i></b> |
| <b><i>Annexe D Bancs d'essais</i></b>                                       | <b><i>140</i></b> |
| <b><i>Annexe E Réalisation d'un observateur algébrique de fréquence</i></b> | <b><i>142</i></b> |



# Liste des figures

|                                                                                                                                                                      |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Figure 1.1 – Architecture des différents types de robots manipulateurs.</i>                                                                                       | 5  |
| <i>Figure 1.2 – Représentation d'un robot cartésien 3 axes dans son contexte d'utilisation.</i>                                                                      | 7  |
| <i>Figure 1.3 – Cycle type d'un robot de décharge de presse.</i>                                                                                                     | 7  |
| <i>Figure 1.4 – Architecture générique d'une transmission d'un axe de robot cartésien SEPRO-Robotique.</i>                                                           | 8  |
| <i>Figure 1.5 – Oscillations relevées au niveau du chariot et de la charge sur le banc d'essais n°1.</i>                                                             | 9  |
| <i>Figure 1.6 – Démarche déterministe adoptée pour la synthèse d'une architecture de commande d'un robot cartésien.</i>                                              | 10 |
| <i>Figure 2.1 – Démarche de modélisation générale d'un axe souple.</i>                                                                                               | 15 |
| <i>Figure 2.2 – Principe de réalisation d'un modèle éléments finis d'un robot cartésien.</i>                                                                         | 17 |
| <i>Figure 2.3 – 1<sup>er</sup> mode de déformation du robot.</i>                                                                                                     | 18 |
| <i>Figure 2.4 – 2<sup>ème</sup> mode de déformation du robot.</i>                                                                                                    | 19 |
| <i>Figure 2.5 – 3<sup>ème</sup> mode de déformation du robot.</i>                                                                                                    | 19 |
| <i>Figure 2.6 – Principe de l'analyse spectrale expérimentale appliquée à une poutre.</i>                                                                            | 20 |
| <i>Figure 2.7 – Analyse modale expérimentale d'un robot cartésien.</i>                                                                                               | 21 |
| <i>Figure 2.8 – Réponse d'un accéléromètre placé dans la direction de l'axe Y et en bout de bras Z à une excitation de l'extrémité du bras Z au marteau de choc.</i> | 21 |
| <i>Figure 2.9 – Forme du premier mode de déformation des bras Z fixe et mobile selon la direction Y pour différentes positions du bras Z mobile.</i>                 | 22 |
| <i>Figure 2.10 – Modèle retenu pour modéliser l'axe Y.</i>                                                                                                           | 23 |
| <i>Figure 2.11 – Définition d'une poutre continue.</i>                                                                                                               | 25 |
| <i>Figure 2.12 – Déformations fondamentales des poutres continues.</i>                                                                                               | 25 |
| <i>Figure 2.13 – Etude d'une poutre en flexion.</i>                                                                                                                  | 26 |
| <i>Figure 2.14 – Cas simple utilisé pour illustrer la démarche de résolution en dimension infinie.</i>                                                               | 29 |
| <i>Figure 2.15 – Modélisation de la partie fixe.</i>                                                                                                                 | 33 |
| <i>Figure 2.16 – Modélisation de la partie mobile.</i>                                                                                                               | 36 |
| <i>Figure 2.17 – Assemblage des deux modèles.</i>                                                                                                                    | 37 |
| <i>Figure 2.18 – Comparaison des réponses fréquentielles obtenues expérimentalement et à partir de la modélisation continue.</i>                                     | 39 |

|                                                                                                                                                                                                       |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Figure 2.19 – Evolution de la fréquence du principal mode de déformation de l'axe Y obtenu par différentes méthodes d'analyse pour le robot cartésien modélisé.</i>                                | 40 |
| <i>Figure 2.20 – Graphe Informationnel Causal (GIC).</i>                                                                                                                                              | 40 |
| <i>Figure 2.21 – Symbolisme GIC.</i>                                                                                                                                                                  | 41 |
| <i>Figure 2.22 – Modèle souple à non-minimum de phase.</i>                                                                                                                                            | 42 |
| <i>Figure 2.23 – Modèle GIC du modèle souple à non-minimum de phase.</i>                                                                                                                              | 43 |
| <i>Figure 2.24 – Modèle souple classique.</i>                                                                                                                                                         | 44 |
| <i>Figure 2.25 – Modèle GIC du modèle souple classique.</i>                                                                                                                                           | 44 |
| <i>Figure 2.26 – Modèle rigide.</i>                                                                                                                                                                   | 44 |
| <i>Figure 2.27 – Modèle GIC du modèle rigide.</i>                                                                                                                                                     | 45 |
| <i>Figure 2.28 – Prise en compte des frottements dans les modèles de commande.</i>                                                                                                                    | 45 |
| <i>Figure 3.1 – Principe général d'inversion directe : commande directe à modèle.</i>                                                                                                                 | 49 |
| <i>Figure 3.2 – Principe d'inversion directe (<math>n = 0</math>).</i>                                                                                                                                | 50 |
| <i>Figure 3.3 – Principe d'inversion indirecte.</i>                                                                                                                                                   | 51 |
| <i>Figure 3.4 – Commande utilisant le couplage des deux principes d'inversion – Commande à modèle de référence des états (CMRE).</i>                                                                  | 52 |
| <i>Figure 3.5 – Commande générique couplant inversion directe et indirecte.</i>                                                                                                                       | 52 |
| <i>Figure 3.6 – Passage du couplage inversion directe et indirecte à une représentation par schéma-bloc.</i>                                                                                          | 53 |
| <i>Figure 3.7 – Structure de commande à deux degrés de liberté du système <math>\Sigma</math>.</i>                                                                                                    | 54 |
| <i>Figure 3.8 – Architecture de commande générique d'un axe.</i>                                                                                                                                      | 54 |
| <i>Figure 3.9 – Forme générique d'une loi de mouvement.</i>                                                                                                                                           | 56 |
| <i>Figure 3.10 – Loi de mouvement en sinus et sinus carré d'accélération.</i>                                                                                                                         | 58 |
| <i>Figure 3.11 – Lois de mouvement à accélération, jerk et snap minimum.</i>                                                                                                                          | 59 |
| <i>Figure 3.12 – Définition générique d'une loi de mouvement bang-bang.</i>                                                                                                                           | 59 |
| <i>Figure 3.13 – Lois de mouvement en temps minimum à jerk limité.</i>                                                                                                                                | 61 |
| <i>Figure 3.14 – Mise en forme d'une loi de mouvement.</i>                                                                                                                                            | 61 |
| <i>Figure 3.15 – Principe des techniques d'input-shaping.</i>                                                                                                                                         | 62 |
| <i>Figure 3.16 – Modèles utilisés pour la conception d'une précommande.</i>                                                                                                                           | 63 |
| <i>Figure 3.17 – Schéma GIC d'une précommande pour un système linéaire.</i>                                                                                                                           | 66 |
| <i>Figure 3.18 – Schéma GIC d'une précommande d'un système non-linéaire.</i>                                                                                                                          | 67 |
| <i>Figure 3.19 – Schéma GIC de la précommande rigide.</i>                                                                                                                                             | 68 |
| <i>Figure 3.20 – Sensibilité d'une loi de mouvement en jerk limité et d'un ZV shaper en fonction du rapport entre la pulsation estimée et la pulsation réelle du mode propre dominant du système.</i> | 69 |
| <i>Figure 3.21 – Schéma GIC de la précommande souple.</i>                                                                                                                                             | 71 |
| <i>Figure 3.22 – Evolution de la fréquence propre en fonction de la position <math>y_1</math>.</i>                                                                                                    | 72 |
| <i>Figure 3.23 – Simulation comparative pour différentes lois de commande.</i>                                                                                                                        | 73 |

|                                                                                                                                                                                                                                            |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Figure 3.24 – Evolution de l'erreur en accélération pour une variation de la raideur modale <math>k</math> de <math>\pm 50\%</math>.</i>                                                                                                | 75  |
| <i>Figure 3.25 – Résultats expérimentaux pour différentes lois de commande appliquées sur l'axe Y du banc d'essais n°1.</i>                                                                                                                | 76  |
| <i>Figure 3.26 – Choix d'un type de précommande.</i>                                                                                                                                                                                       | 77  |
| <i>Figure 3.27 – Architecture de commande générique d'un axe.</i>                                                                                                                                                                          | 78  |
| <i>Figure 3.28 – Répartition des techniques d'asservissement retenues en fonction de la finesse de modélisation.</i>                                                                                                                       | 80  |
| <i>Figure 3.29 – Graphiques utilisés pour évaluer un asservissement.</i>                                                                                                                                                                   | 81  |
| <i>Figure 3.30 – Performances des asservissements de la famille A.</i>                                                                                                                                                                     | 82  |
| <i>Figure 3.31 – Problème <math>H_\infty</math> standard.</i>                                                                                                                                                                              | 84  |
| <i>Figure 3.32 – Performances des asservissements de la famille B.</i>                                                                                                                                                                     | 85  |
| <i>Figure 3.33 – Performances des asservissements de la famille C.</i>                                                                                                                                                                     | 86  |
| <i>Figure 3.34 – Aire des surfaces grisées pour chacun des asservissements retenus.</i>                                                                                                                                                    | 87  |
| <i>Figure 3.35 – Structure générale d'une régulation en cascade.</i>                                                                                                                                                                       | 88  |
| <i>Figure 3.36 – Illustration du principe d'une régulation en cascade en appliquant les principes d'inversion propres au GIC.</i>                                                                                                          | 88  |
| <i>Figure 3.37 – Structure de la commande par boucles en cascades.</i>                                                                                                                                                                     | 89  |
| <i>Figure 3.38 – Lieu d'Evans de la boucle de vitesse constituée d'un processus souple et résultats obtenus expérimentalement pour un déplacement de 0,9 m de l'axe X du banc d'essais n°1.</i>                                            | 90  |
| <i>Figure 3.39 – Domaines de stabilité usuels.</i>                                                                                                                                                                                         | 91  |
| <i>Figure 3.40 – Système incertain à asservir.</i>                                                                                                                                                                                         | 92  |
| <i>Figure 3.41 – Modèle et Asservissement d'un axe souple à partir du capteur de position de <math>m_1</math>.</i>                                                                                                                         | 94  |
| <i>Figure 3.42 – Principe d'inversion appliqué à un système masse-ressort.</i>                                                                                                                                                             | 94  |
| <i>Figure 3.43 – Structure de correcteur utilisé pour la synthèse par approche paramétrique.</i>                                                                                                                                           | 96  |
| <i>Figure 3.44 – Placement de pôles obtenu dans le cas de l'axe Y du banc d'essais n°1 avec le domaine de stabilité correspondant au demi-plan complexe stable.</i>                                                                        | 96  |
| <i>Figure 3.45 – Réponses obtenues expérimentalement sur le banc d'essais n°1 avec un correcteur PID réglé à l'aide d'une approche paramétrique pour un déplacement de l'axe Y de 60 mm et comparaison avec la commande industrielle.</i>  | 97  |
| <i>Figure 3.46 – Réponses obtenues expérimentalement sur le banc d'essais n°2 avec un correcteur PID réglé à l'aide d'une approche paramétrique pour un déplacement de l'axe X de 900 mm et comparaison avec la commande industrielle.</i> | 98  |
| <i>Figure 3.47 – Inversion du GIC du modèle souple.</i>                                                                                                                                                                                    | 100 |
| <i>Figure 3.48 – Réponses obtenues expérimentalement sur le banc d'essais n°1 avec une commande par retour accélérométrique pour un déplacement de l'axe Y de 60 mm et comparaison avec la commande industrielle.</i>                      | 102 |

---

|                                                                                                                                                                                                                        |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <i>Figure 3.49 – Réponses obtenues expérimentalement sur le banc d'essais n°2 avec une commande par retour accélérométrique pour un déplacement de l'axe X de 900 mm et comparaison avec la commande industrielle.</i> | <i>103</i> |
| <i>Figure 4.1 – Structure d'une commande par apprentissage.</i>                                                                                                                                                        | <i>107</i> |
| <i>Figure 4.2 – Apprentissage indirect appliqué à la commande par retour accélérométrique.</i>                                                                                                                         | <i>110</i> |
| <i>Figure 4.3 – Principe de la méthode d'estimation par calcul moyen des périodes.</i>                                                                                                                                 | <i>111</i> |
| <i>Figure 4.4 – Principe de la méthode d'estimation par Transformée de Fourier.</i>                                                                                                                                    | <i>112</i> |
| <i>Figure 4.5 – Comparaison des méthodes d'estimation fréquentielle sur le banc d'essais n°1.</i>                                                                                                                      | <i>113</i> |
| <i>Figure 4.6 – Comparaison des méthodes d'estimation fréquentielle sur le banc d'essais n°2.</i>                                                                                                                      | <i>114</i> |
| <i>Figure 4.7 – Adaptation de la loi à jerk limité après estimation de la fréquence dominante.</i>                                                                                                                     | <i>115</i> |

# Liste des tableaux

|                                                                                                                                                            |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Tableau 2.1 – Conditions aux limites courantes.</i>                                                                                                     | 28  |
| <i>Tableau 3.1 – Expressions des lois à accélération, jerk et snap minimum.</i>                                                                            | 58  |
| <i>Tableau 3.2 – Performances théoriques des précommandes retenues.</i>                                                                                    | 73  |
| <i>Tableau 3.3 – Performances obtenues expérimentalement des lois de commande retenues.</i>                                                                | 76  |
| <i>Tableau 3.4 – Performances obtenues expérimentalement sur le banc d’essais n°1 avec un correcteur PID réglé en utilisant une approche paramétrique.</i> | 98  |
| <i>Tableau 3.5 – Performances obtenues expérimentalement sur le banc d’essais n°2 avec un correcteur PID réglé en utilisant une approche paramétrique.</i> | 99  |
| <i>Tableau 3.6 – Performances obtenues expérimentalement sur le banc d’essais n°1 avec une commande par retour accélérométrique.</i>                       | 101 |
| <i>Tableau 3.7 – Performances obtenues expérimentalement sur le banc d’essais n°2 une commande par retour accélérométrique.</i>                            | 102 |
| <i>Tableau 4.1 – Comparatif de l’amplitude des vibrations de la charge avant et après estimation de la fréquence dominante de l’axe mis en mouvement.</i>  | 115 |



# Notations et acronymes

## *Notations*

|                      |                                                                                 |
|----------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| $\omega_n, f_n$      | <i>Pulsation [rad/s] et fréquence naturelle [Hz] d'un mode vibratoire</i>       |
| $(.)^T$              | <i>Transposé</i>                                                                |
| $\mathcal{L}_f h(x)$ | <i>Dérivée de h le long de f</i>                                                |
| $\dot{y}, \ddot{y}$  | <i>Dérivée première et seconde par rapport au temps de la variable y</i>        |
| $(.)^{(n)}$          | <i>Dérivée n<sup>ième</sup></i>                                                 |
| $y$                  | <i>Sortie du système à contrôler</i>                                            |
| $q$                  | <i>Position des axes du système</i>                                             |
| $y_1, y_2$           | <i>Respectivement position de la masse <math>m_1</math> et <math>m_2</math></i> |
| $s$                  | <i>Variable de Laplace</i>                                                      |
| $\succ$              | <i>Définie positive</i>                                                         |

## *Abréviations et acronymes*

|                      |                                                                  |
|----------------------|------------------------------------------------------------------|
| $\Psi_{\text{préc}}$ | <i>Précommande</i>                                               |
| $\Psi_{\text{ass}}$  | <i>Asservissement</i>                                            |
| $\Psi_{\text{ref}}$  | <i>Générateur de loi de mouvement</i>                            |
| $\Sigma$             | <i>Système à contrôler</i>                                       |
| GIC                  | <i>Graphe Informationnel Causal</i>                              |
| LMI                  | <i>Inégalité Matricielle Linéaire (Linear Matrix Inequality)</i> |



# Introduction générale

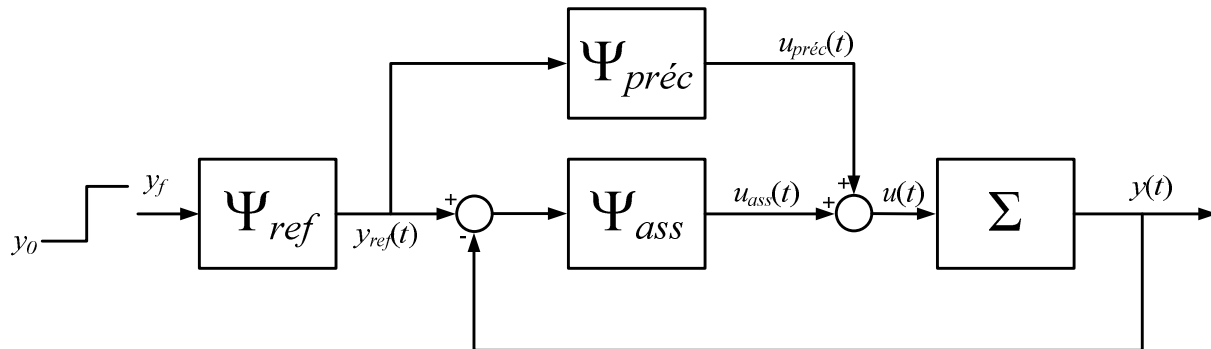
**L**es travaux présentés dans le cadre de cette thèse sous convention CIFRE ont été réalisés au sein de l'Equipe de Recherche CEMODYNE (Commande et Entrainement de Machine-Outils à DYnamique Elevée ; anciennement E.R.T. int. 1022) en partenariat avec la société SEPRO-Robotique. Le sujet de cette thèse s'inscrit directement dans le cadre de l'amélioration des performances de robots cartésiens de pose et dépose à dynamique élevée (pour donner un ordre de grandeur, les accélérations maximales sur ces types de système varient de 4 à 100 m/s<sup>2</sup>).

Pour des raisons de productivité et de compétitivité, la société SEPRO-Robotique – leader européen dans la fabrication de robots manipulateurs – est amenée à concevoir des systèmes de positionnement précis et de plus en plus rapides. La conception de structures plus légères répond à ces préoccupations, mais les souplesses et flexibilités qui en résultent entraînent une grande sensibilité aux différentes excitations. Cette sensibilité se traduit par l'apparition de phénomènes vibratoires lors du mouvement, dont la maîtrise passe généralement par une diminution des performances globales de la machine, ce qui va à l'encontre des objectifs visés. Il s'ensuit que la commande d'un axe à dynamique élevée en translation ne peut plus sous-estimer l'influence des phénomènes vibratoires sur les performances d'un mouvement réalisé [Isermann, 2005].

Il devient alors indispensable, lors de la conception de systèmes à dynamique élevée, de maîtriser les phénomènes vibratoires pour ne pas sacrifier les performances. Une des solutions possibles consiste tout naturellement à rigidifier la structure mécanique ou à augmenter l'amortissement du système soit par l'intermédiaire d'une conception « mieux pensée », soit par l'utilisation de matériaux adaptés comme des matériaux composites [Lee, Lee et coll., 2004] – [Ghazavi et Gordaninejad, 1995]. Une deuxième solution envisageable est d'utiliser des capteurs ou des actionneurs supplémentaires comme des cellules piézoélectriques afin de mesurer directement le phénomène vibratoire et de pouvoir agir sur ce dernier « au bon endroit » [Sloss, Brush et coll., 2003] – [Hernandez, Park et coll., 1999]. Mais la piste privilégiée dans ce mémoire, parce que la moins coûteuse et donc industriellement la plus viable, consiste à élaborer une structure de commande faisant appel à des algorithmes spécifiques, utilisant des références déterminées pour d'une part, convenir à la physique du système et, d'autre part, atteindre les performances escomptées [Paijmans, Symens et coll., 2006] – [Torfs, Vuerinckx et coll., 1998].

Toutefois, une architecture de commande, aussi savante soit-elle, ne peut répondre à notre problématique que si l'ensemble des paramètres du système est pris en compte ce qui passe nécessairement par une modélisation suffisamment fine de celui-ci. Dans notre cas, la modélisation se doit d'être suffisamment générique et adaptable à toute la gamme des robots de la société SEPRO-Robotique. Cette généricité passe nécessairement par une modélisation ayant un sens physique.

Dans la majorité des applications industrielles, la commande d'un système de positionnement  $\Sigma$  est généralement effectuée par une structure possédant deux leviers [Horowitz, 1963] comme celle présentée dans la figure suivante.



**Architecture de commande générique d'un axe de machine.**

La précommande  $\Psi_{préc}$  (aspect boucle ouverte) permet d'atteindre des objectifs de suivi de trajectoire pour la sortie  $y$ . L'asservissement  $\Psi_{ass}$  (aspect boucle fermée) est conçu de façon à rendre le système  $\Sigma$  stable et robuste vis-à-vis des incertitudes de modélisation et des perturbations extérieures. Le générateur de lois de mouvement  $\Psi_{ref}$  fournit à la précommande et à l'asservissement, la loi de mouvement  $y_{ref}$  qui permet à la sortie  $y$  de se déplacer du point  $y_0$  au point  $y_f$ .

Les travaux développés dans cette thèse visent une contribution directement applicable à la commande des robots cartésiens et plus particulièrement ceux développés par la société SEPRO-Robotique. **Nous présentons une démarche déterministe complète qui vise à obtenir une architecture de commande adaptable à toute la gamme des robots SEPRO-Robotique.** Tout d'abord, nous proposons une démarche de modélisation générique et avec un sens physique d'un axe de robots cartésiens. Les modèles obtenus sont ensuite utilisés dans les chapitres suivants pour concevoir une architecture de commande. La présentation de méthodes d'auto-réglage adaptée aux structures de commande retenues complète cette étude.

Ce mémoire est donc divisé en cinq chapitres :

Le chapitre 1 développe la problématique générale de la génération de commande d'une machine de positionnement à dynamique élevée ainsi que le cahier des charges et la problématique de la société SEPRO Robotique. La terminologie utilisée tout ou long de cette étude est soulignée dans ce chapitre. La philosophie de la démarche générale adoptée dans cette étude y est notamment détaillée.

Le chapitre 2 présente une méthodologie générique de modélisation d'un axe flexible en translation, démarche indispensable avant toute synthèse de commande. L'originalité de cette méthodologie réside dans le passage d'un modèle de connaissance du type modèle éléments-finis à un modèle servant de base à une synthèse de commande en utilisant un modèle simplifié basé sur une modélisation entièrement continue de la structure.

Le chapitre 3 est axé sur la génération de commande d'un axe souple. Cette génération est basée sur des principes d'inversion qui permettent d'élaborer une structure générique de commande d'un axe de machine. Les modèles obtenus dans le chapitre précédent sont ensuite utilisés pour concevoir une précommande. La méthode adoptée s'inspire de la théorie des systèmes plats [Fliess, Lévine et coll., 1995]. Deux types de précommande sont déduits en fonction du modèle utilisé, une précommande rigide lorsque le modèle est uniquement inertiel et une précommande souple lorsque le modèle tient compte de la flexibilité des axes. L'illustration de celles-ci sous forme de Graphe Informationnel

Causal (formalisme développé par le laboratoire L2EP de Lille) permet de faire un lien entre commande plate et représentation causale. Les deux bancs d'essais présentés en Annexe D sont utilisés pour valider, en totale boucle ouverte, ces deux précommandes. La partie asservissement fait l'objet de la suite de ce chapitre. Il est, en effet, industriellement impensable d'utiliser une précommande seule qui, par nature, ne permet pas de compenser l'effet d'une perturbation extérieure ou d'une erreur de modélisation. Il est donc nécessaire de lui adjoindre un asservissement. Ce chapitre montre que différents types d'asservissements sont plus ou moins adaptés à la commande des axes à dynamique élevée. Les commandes les plus pertinentes sont alors étudiées en détail et validées sur nos deux bancs d'essais.

Le chapitre 4 est la suite logique du chapitre précédent et présente des techniques d'apprentissage qui permettent d'utiliser des mesures effectuées sur un robot cartésien pour améliorer ou même régler les architectures de commandes présentées dans le chapitre 3.

Enfin, le dernier chapitre fait la synthèse des principaux résultats et détaille les perspectives concernant de futures investigations.



# Chapitre 1

## Introduction à la commande des machines de positionnement à dynamique élevée

**D**éplacer un système d'un point à un autre le plus rapidement possible est une des principales fonctions de tout système de positionnement. Dans le cadre des systèmes de positionnement dédiés aux opérations de chargement et/ou déchargement, les contraintes de ce déplacement s'expriment essentiellement au point d'arrivée et éventuellement au point de départ. Ce type de mouvement que nous nommerons par la suite mouvement du type point-à-point, est aussi trouvé dans la littérature sous le qualificatif de mouvement du type « pick-and-place ». Une question vient alors à l'esprit : quel est la démarche à suivre pour exécuter de tels mouvements sur un système de positionnement ?

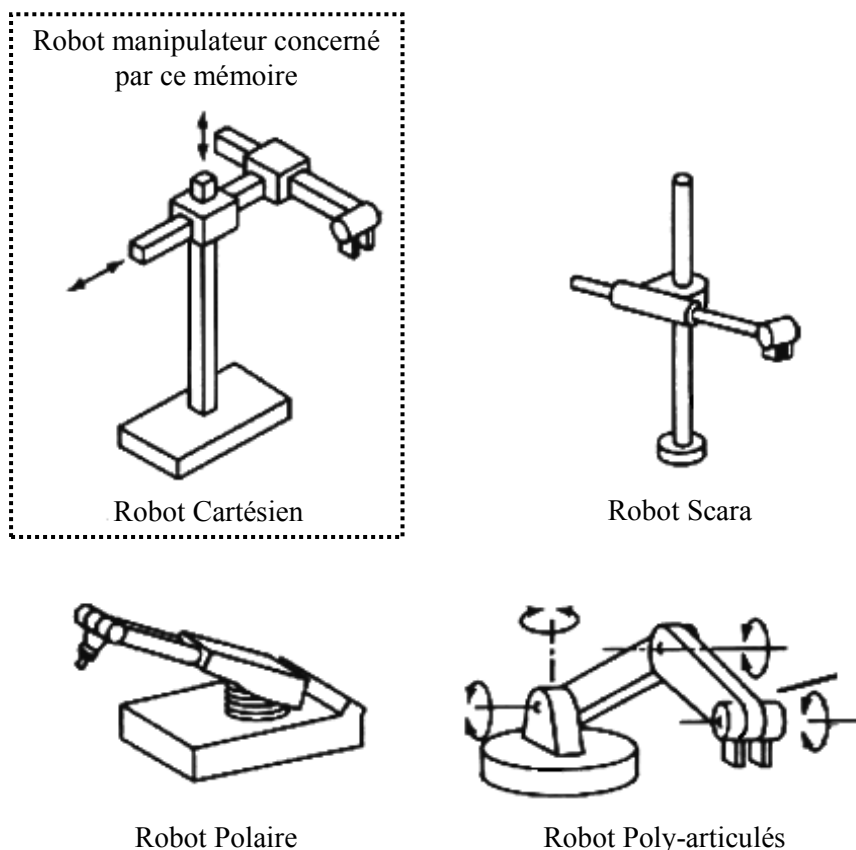
Ce chapitre a pour objectif d'exposer la problématique générale de la génération de commande des machines de positionnement ainsi que celle de la société SEPRO-Robotique. Les parties suivantes exposent la démarche adoptée ainsi que les principales contributions de cette thèse.

### 1.1 Commande des machines de positionnement à dynamique élevée

La thématique de ce mémoire s'inscrit dans la problématique générale posée par les systèmes de nouvelle génération utilisés pour le positionnement à grande cadence. Parmi ces systèmes, on y retrouve tous les dispositifs de transitique et les machines de production. L'objectif primordial est évidemment dans la réduction des temps de production qui passe nécessairement par la diminution des inerties de toute nature et par l'augmentation des sollicitations ou des efforts globalement imposés aux structures. Ainsi, apparaît le paradoxe à l'origine de cette problématique générale. En effet, ces dispositions conjointes conduisent généralement à une dégradation des performances des machines concernées si leur comportement dynamique n'est pas pris en compte dès la phase de conception. En effet, la réduction des inerties de toutes natures fait prévaloir le caractère élastique des liaisons, amenant ainsi une situation de modes oscillatoires dans la bande des fréquences d'utilisation de ces systèmes. La vitesse et la précision dynamique s'en trouvent donc considérablement affectées, ce qui va à l'encontre des performances visées.

Pour la conception d'un dispositif de positionnement rapide, la problématique générale est donc claire : la diminution des coûts d'investissement, alliée à une exigence de cadence (synonyme de diminution des coûts de production), exige une diminution des puissances, un allègement des structures mécaniques, une simplification des chaînes cinématiques. Ces nouvelles dispositions induisent généralement l'apparition de modes vibratoires indésirables qui diminuent les performances dynamiques globales du dispositif de positionnement rapide. Il devient alors indispensable de prendre en compte ces phénomènes pour les intégrer dès la conception d'un système.

Cette contribution vise essentiellement les systèmes de positionnement du type robot manipulateur et plus particulièrement ceux du type robot cartésien (robot manipulateur effectuant uniquement des mouvements de translation cf. Figure 1.1). Dans ce cas, les sources de vibrations sont nombreuses et peuvent provenir de la motorisation électrique [Holtz et Springob, 1996], des bruits de mesures [Hanselman, 1994], des frottements [Armstrong-Helouvry, Dupont et coll., 1994], des jeux mécaniques, etc. Sur ce type de système, l'augmentation de la souplesse mécanique (conséquence directe de la réduction des masses en mouvement) dégrade fortement le comportement vibratoire. Par conséquent, les performances générales des robots cartésiens sont fortement limitées si leur comportement vibratoire n'est pas correctement modélisé et n'est pas pris en compte dans la synthèse de sa commande.



**Figure 1.1 – Architecture des différents types de robots manipulateurs.**

Il en découle, pour la pièce manipulée, une perte sensible de précision de son positionnement dynamique, ce qui, de toute évidence, devient préjudiciable par rapport aux objectifs de performances et de réduction globale des coûts. Cette difficulté se place manifestement au cœur de la conception d'un système de positionnement rapide, notamment de la partie électromécanique et de son contrôle. Il

existe des savoirs scientifiques en matière de stratégies de commande, mais il convient de les faire évoluer en prenant en compte le contexte particulier qui se décline comme suit :

- Aucun capteur n'existe au niveau de la charge, les capteurs existants sont de faible portée et bien trop coûteux. Seuls les actionneurs sont équipés d'un capteur de position en général. Ces actionneurs et la charge à contrôler sont souvent non colocalisés,
- Les modes vibratoires sont non stationnaires en raison des variations de masses et des différentes configurations du robot, de plus interviennent des non linéarités telles que jeux et frottements secs, même si la technologie met aujourd'hui à disposition des constructeurs des éléments de transmission de grande qualité,
- Les modes vibratoires sont généralement très oscillants et peu amortis ( $\zeta \ll 1$  et même  $\zeta < 0,1$ ), ce qui augmente la difficulté à commander ce type de système,
- Aux couplages inter-axiaux s'ajoutent inexorablement des couplages entre parties mécaniques et parties électriques, souvent occultés à tort, mais qui contribuent à l'imprécision du positionnement dynamique s'ils ne sont pas pris en compte,
- Le travail demandé consiste à effectuer de manière répétée des mouvements du type pick-and-place, ce qui veut dire que la phase critique est celle d'arrêt (les modes étant peu excités au cours du déplacement, et la précision finale important peu).

## 1.2 Problématique et cahier des charges de la société SEPRO-Robotique

La société SEPRO-Robotique est implantée à La Roche-sur-Yon et a été créée en 1973 en ayant comme première activité l'automatisation des processus de fabrication de pièces en tôle. En 1982, elle produit son premier manipulateur pour les presses à injecter le plastique et, depuis, elle a réussi à développer sa gamme de produits en proposant des robots à dynamique élevée pour des applications diverses : déchargement de presses d'injection, empilage de pièce et pose d'étiquettes, etc. De plus, elle a constitué un réseau mondial en créant des filiales dans plusieurs pays et se positionne aujourd'hui en tant que leader européen dans la fabrication de robots manipulateurs.

Les robots, sur lesquels reposent l'ensemble de cette étude, sont des robots cartésiens 3 axes développés par la société SEPRO-Robotique. Ils sont principalement dédiés à la décharge de presses à injection plastique. La figure 1.2 représente un dessin de robot cartésien similaire à ceux dont nous disposons pour effectuer nos validations. Nous renvoyons le lecteur vers l'annexe D pour une présentation détaillée des deux bancs d'essais servant de base à nos validations expérimentales.

La majeure partie des robots SEPRO-Robotique et des robots cartésiens en général sont constitués de trois axes appelés classiquement axes X, Y et Z. L'axe X est ici représenté par la poutre X, l'axe Y par le cadre Y et l'axe Z par le bras Z. Le bras Z est lui-même constitué d'une partie fixe et d'une partie mobile sur laquelle est fixé un outil préhenseur. Cette structure (Poutre X + Cadre Y + Bras Z) est la structure type des robots SEPRO-Robotique.

En fonctionnement, les pièces moulées sont saisies le plus souvent par un outillage pneumatique fixé sur le bras Z mobile. L'ensemble de ce dispositif peut effectuer une ou deux rotations afin de saisir correctement la pièce.

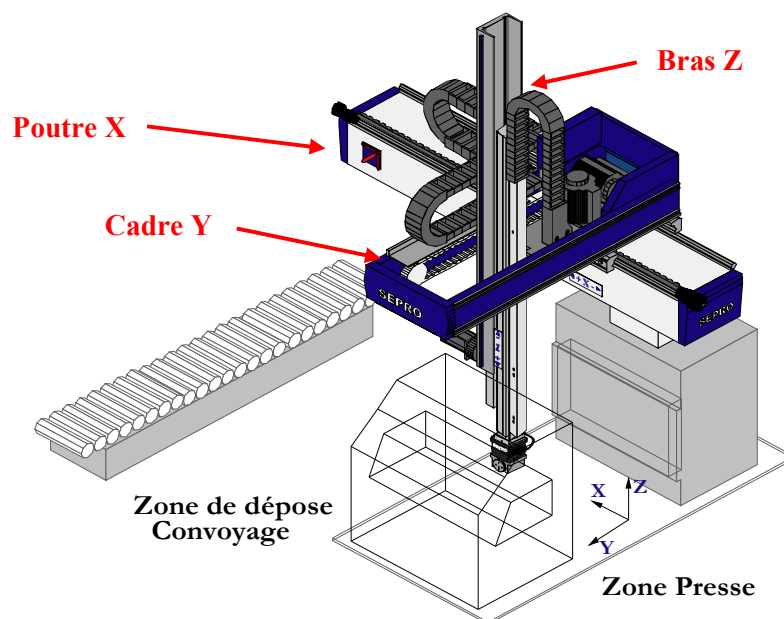
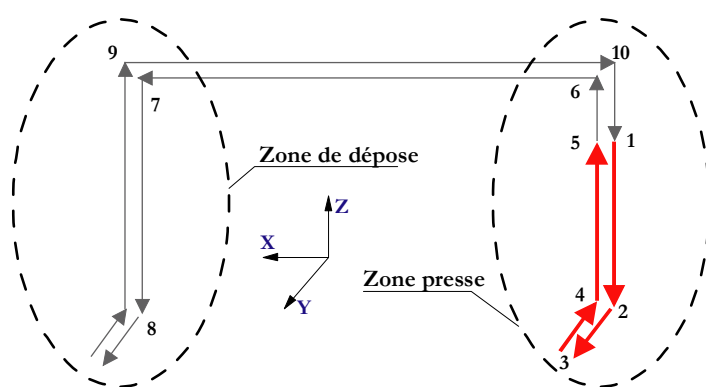


Figure 1.2 – Représentation d'un robot cartésien 3 axes dans son contexte d'utilisation.

Le cycle réalisé par le manipulateur est quasiment identique pour toutes les utilisations. La Figure 1.3 représente l'ordre des déplacements scindés par étape ainsi que la description de chaque déplacement pour un cycle type d'un robot de décharge de presse. Les mouvements de chacune des étapes sont toujours mono-axe (déplacement axe par axe selon une unique direction). Malgré cela, on s'aperçoit qu'il existe un couplage des dynamiques des axes, un mouvement selon la direction X peut, par exemple, entraîner des vibrations selon la direction Y.



|       |                                                                   |
|-------|-------------------------------------------------------------------|
| 1     | Départ du cycle : robot en attente au-dessus de la presse         |
| 1-2   | Avance Y 60 mm                                                    |
| 2-3   | Descente Z 1000 mm                                                |
| 3     | Prise pièce                                                       |
| 3-4   | Recul Y 60 mm                                                     |
| 4-5-6 | Remontée Z 1300 mm, passage du point 5 (à 1000 mm) relance presse |
| 6-7   | Déplacement X 1500 mm pour déchargement                           |
| 7-8   | Descente Z 1350 mm (mouvement Y en temps masqué)                  |
| 8     | Dépose de la pièce                                                |
| 8-9   | Remontée Z 1350 mm                                                |
| 9-10  | Retour X 1500 mm                                                  |
| 10-1  | Descente Z 300 mm et attente                                      |

Figure 1.3 – Cycle type d'un robot de décharge de presse.

Le temps de cycle du robot dépend bien entendu des différentes distances à parcourir, mais aussi des performances dynamiques. Dans ce cas, il est important de limiter le temps de cycle correspondant à la préhension de la pièce dans la presse d'injection puisque la cadence de production est le plus souvent conditionnée par la durée pendant laquelle la presse reste ouverte (le robot effectue les étapes 6 à 10 avant une nouvelle ouverture de la presse). C'est donc lors de ces phases (1 à 5 en trait fort sur la Figure 1.3) que le manipulateur se doit d'être le plus performant possible.

### 1.2.1 Architecture globale des robots cartésiens SEPRO-Robotique

Les manipulateurs SEPRO-Robotique sont constitués de trois axes orthogonaux (X, Y et Z). Leur motorisation est réalisée par des moteurs synchrones Brushless ou par des moteurs asynchrones, l'entraînement étant généralement direct (exempt de réducteur). Les transformations de mouvement sont assurées soit par un système du type poulie-courroie soit par un système du type pignon-crémaillère. La figure 1.4 présente l'architecture d'une transmission type d'un robot cartésien SEPRO-Robotique.

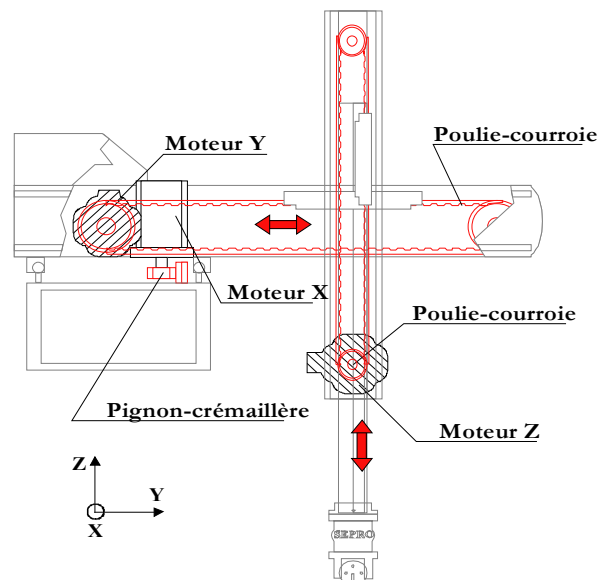


Figure 1.4 – Architecture générique d'une transmission d'un axe de robot cartésien SEPRO-Robotique.

Chaque moteur est composé d'un capteur de position d'arbre moteur du type résolveur et d'un frein électrique intégrés. **La mesure de position d'arbre est la seule information disponible** sur l'état du robot manipulateur puisqu'aucun autre capteur n'est installé. Dans toute la suite de cette étude, on définit la **mesure de position moteur** comme l'angle de l'arbre moteur mesurée par le résolveur multiplié par le rayon du pignon accouplé en sortie d'arbre. La **mesure de position de la charge** est, quant à elle, définie comme la mesure de position de l'extrémité du bras Z (si les robots étaient considérés totalement rigides, ces deux mesures seraient identiques).

### 1.2.2 Problématique de la société SEPRO-Robotique

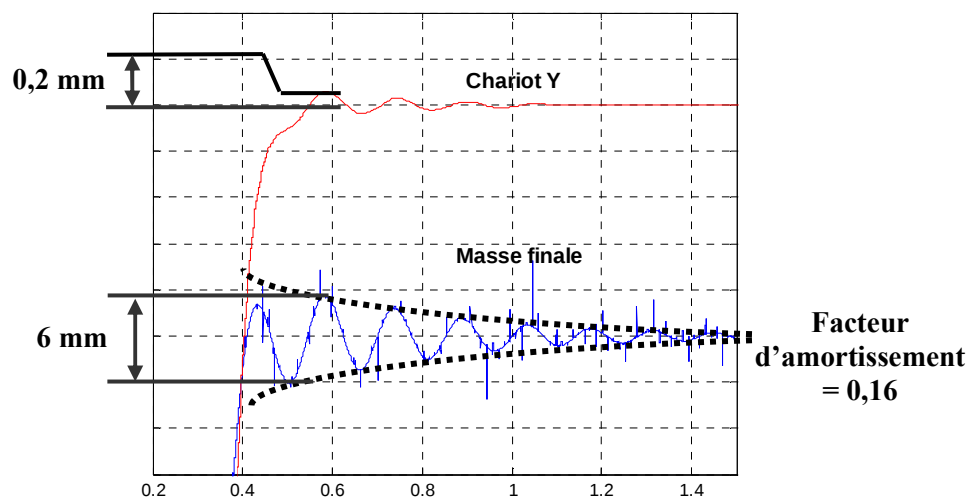
Comme nous l'avons précisé dans l'introduction générale, les évolutions technologiques ainsi que la demande industrielle pour augmenter les cadences de production sont à l'origine de cette étude. Les sollicitations dynamiques au niveau de chaque axe excitent les premiers modes vibratoires de la structure et par conséquent détériorent la précision dynamique du système. Cette précision ne constitue pas une caractéristique fondamentale pour ce type de manipulateur. Par contre, les oscillations visibles

de l'organe terminal (portant la charge) lors des phases d'arrêt, peuvent se révéler inacceptables. En effet, en des termes plus commerciaux, la « confiance » de l'opérateur sera fortement conditionnée par la qualité visuelle du comportement de la machine, c'est à dire par le degré d'amortissement des oscillations lors des phases d'arrêt. En d'autres termes, un niveau d'oscillations trop important ne permet pas de travailler à cadence maximale. De ce fait, la problématique industrielle pour ces robots manipulateurs pourrait se résumer en une phrase : **augmenter les performances du robot tout en conservant un comportement dynamique acceptable.**

Pour répondre à cette problématique, il a fallu établir un cahier des charges précis afin de servir d'objectif à respecter. Le cahier des charges fixé par la société s'énonce de la façon suivante :

- **Le temps de cycle** : il est déterminé lorsque l'on atteint la position de consigne -0,5 mm.
- **Les oscillations au niveau de la position moteur** : elles ne doivent pas dépasser le "tube d'acceptation" de -0,5 à +0,2 mm de la consigne.
- **Les oscillations de la masse finale** : il n'existe pas de valeurs prédéfinies, en réalité, c'est une appréciation visuelle de spécialistes qui déterminent si le comportement est acceptable ou non.

La figure 1.5 montre des mesures effectuées sur le banc d'essais n°1 pour un déplacement suivant la direction Y de 200 mm. Pour ce cas particulier, on peut donc en déduire un temps de cycle de 0,47 s et un amortissement des oscillations de la masse finale obtenu par interpolation exponentielle de 0,16. Il est important de constater que la position de la charge (en bout de bras Z) est très oscillante et de ce fait difficile à commander.



**Figure 1.5 – Oscillations relevées au niveau du chariot et de la charge sur le banc d'essais n°1.**

Le réglage de la commande industrielle du robot (réglage des gains des asservissements) n'est donc pas évident puisqu'imposer un tube d'acceptation au niveau de la position moteur se fait au détriment du temps du cycle et des performances en vitesse du robot. Le réglage est généralement effectué sur une position stratégique c'est-à-dire soit une position où les concepteurs savent que la charge transportée par le robot vibre le plus, soit une position où le robot subit la plus forte sollicitation (point 3 sur la Figure 1.3). Il est alors quasiment sûr que l'on restera dans le cahier des charges dans d'autres positions. Cependant le réglage de la commande ne sera plus optimal vis-à-vis de ce cahier des charges. La position moteur pourra, par exemple, être largement dans le tube d'acceptation, ce qui veut tout simplement dire que les performances du robot sont limitées par le réglage des asservissements.

## 1.3 Démarche générale de synthèse d'une architecture de commande d'un robot cartésien

Comme déjà décrit dans l'introduction générale, la méthode retenue pour répondre aux objectifs de performances est celle qui consiste à **optimiser le comportement du robot par l'intermédiaire d'une commande plus adaptée** à notre problématique que celle utilisée actuellement. La méthodologie de résolution adoptée tout au long de cette thèse s'inscrit dans une démarche déterministe qui est illustrée Figure 1.6. Elle a comme principal objectif **d'obtenir une architecture de commande implantable dans l'état sur un système de positionnement actuel et, plus particulièrement, sur toute la gamme des robots cartésiens SEPRO-Robotique.**

Notre méthodologie consistera ainsi à partir de la problématique de la société à mettre en place des solutions permettant de répondre aux aspects conception et autoréglage d'une architecture de commande adaptée aux systèmes de positionnement en translation. Comme il est indiqué sur la figure 1.6, cette démarche est basée sur un enchaînement modélisation-conception-apprentissage/adaptation. Cet enchaînement classique a été appliqué sur une machine outil à dynamique élevée dans [Poignet, Gautier et coll., 2002].

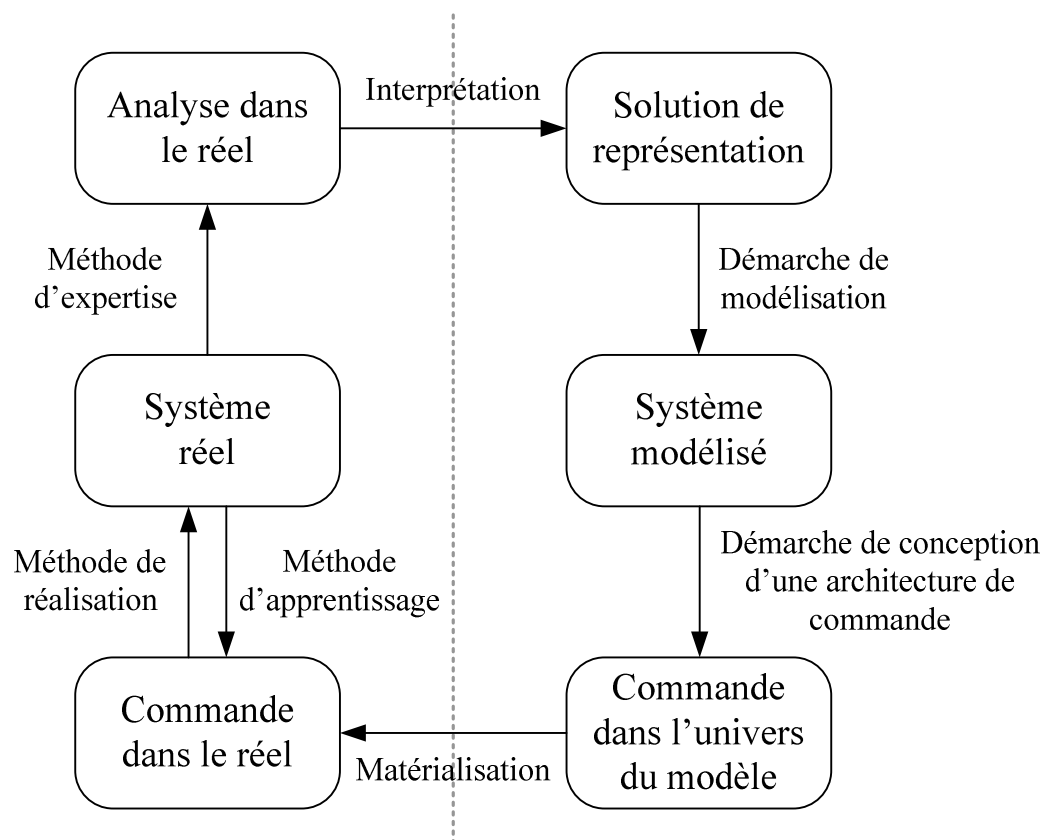


Figure 1.6 – Démarche déterministe adoptée pour la synthèse d'une architecture de commande d'un robot cartésien.

Il est important de garder à l'esprit le caractère générique de ce mémoire et notamment la notion d'adaptabilité à toute une famille de robots cartésiens. Les techniques de commande doivent pouvoir être étendues à l'ensemble de la famille des robots SEPRO, dont l'architecture est voisine (mais dont la taille varie d'un facteur 1 à 10, sans que les robots soient parfaitement homothétiques). Un des

enjeux consiste à raccourcir les procédures de conception et de réglage de la commande. La démarche adoptée permet donc l'obtention de modèles, d'architectures de commande et de méthodes d'apprentissage utilisables sur toute la gamme des robots SEPRO-Robotique et non sur une machine spécifique. Les modélisations éloignées de toutes significations physiques ne sont donc pas pertinentes dans notre cas. En effet, le manque de généricité rend les commandes basées sur ces modèles difficilement transférables dans le domaine industriel par manque d'outils de modélisation et de procédures de réglages simples.

## 1.4 Principales contributions de cette thèse

Cette thèse vise une contribution directe à la génération de commande d'un axe de machine et plus particulièrement d'un axe de robot cartésien, en partant de sa modélisation jusqu'à l'autoréglage de sa commande en utilisant des méthodes d'apprentissage :

- Le chapitre 2 propose une démarche de modélisation complète qui permet à partir d'une mécanique existante de déduire différents types de modèles qui serviront de base de conception pour la partie commande. La démarche utilisée permet de faire un lien entre une modélisation par éléments-finis et une modélisation par paramètres localisés.
- Le chapitre 3 présente une méthodologie d'élaboration d'une structure de commande adaptée à un axe souple. Elle se base sur les modèles obtenus dans le chapitre précédent et sur des principes d'inversion propre au formalisme du Graphe Informationnel Causal [Hautier et Barre, 2004]. L'application de ces principes d'inversion fait apparaître deux aspects :
  1. la précommande et la génération de lois de mouvement (inversion directe),
  2. l'asservissement (inversion indirecte).

Des méthodologies de conception pour ses deux aspects sont proposées. On notera que les structures de commande obtenues sont directement applicables à toute la gamme des robots SEPRO-Robotique.

- Le chapitre 5 expose des méthodes d'autoréglage utilisant des mesures sur le système qui permettent d'améliorer et/ou régler les structures de commande déduites au chapitre 3.

## 1.5 Hypothèses de travail

Les hypothèses de travail retenues pour cette étude sont les suivantes :

- **L'influence de la dynamique des grandeurs électriques est négligeable devant celle des grandeurs mécaniques.** La grandeur de commande des systèmes considérés est donc un effort ou un couple. Les architectures de commande qui font l'objet de ce mémoire génèrent donc un signal d'effort, la régulation de cet effort est laissée à la charge de la boucle de courant du variateur numérique.
- **La modélisation des phénomènes de frottement est limitée à des frottements visqueux,** les efforts de frottement sont directement proportionnels à un signal de vitesse.
- **Le processus est supposé à minimum de phase.** La justification de cette hypothèse sera apportée au chapitre 2.

- **Le comportement du processus ne dépend que de la configuration du robot.** Les paramètres de modélisation sont fonction uniquement de la position des axes du robot.
  - **Les couplages vibratoires entre les axes sont négligés.** Les modes vibratoires sont donc supposés orthogonaux entre eux et un déplacement dans une direction ne causera des vibrations que dans cette direction.
  - **Les jeux mécaniques ne sont pas pris en compte.** On suppose que l'entraînement mécanique peut être considéré comme parfait.
-



## Chapitre 2

# Modélisation physique générique d'un axe souple

**D**ans une démarche déterministe, la conception d'une bonne architecture de commande d'un système passe nécessairement par la création d'un bon modèle. Pour une structure telle qu'un robot cartésien, la complexité du modèle augmente rapidement si l'on souhaite prendre en compte tous ses éléments constitutifs. Il apparaît donc nécessaire de fixer l'ordre maximum des modèles désirés en fonction de l'objectif visé. Pour une synthèse efficace d'une architecture de commande, il faut donc gérer le compromis entre finesse et complexité du modèle. La difficulté posée par la recherche du compromis entre précision et simplicité nous conduit, par application de la méthodologie présentée dans cette partie, à une modélisation discrète du type paramètres localisés.

Le but de ce chapitre est de proposer une démarche de modélisation qui permet d'obtenir un modèle du type paramètres localisés, que nous utiliserons comme modèle de commande dans les chapitres suivants afin de concevoir des architectures de contrôle. La conception d'un modèle de comportement intermédiaire basé sur un assemblage de poutres flexibles permet le passage d'un modèle de connaissance type éléments-finis à un tel modèle de commande. Cette méthodologie est utilisée pour modéliser le comportement d'un axe d'un robot cartésien.

## 2.1 Démarche générale de modélisation d'un axe souple

La démarche de modélisation retenue, illustrée par la figure 2.1, a pour finalité d'obtenir un modèle de commande des axes souples en translation c'est-à-dire un modèle qui servira de base dans la conception d'une architecture de commande. Pour cela, il est nécessaire de comprendre les phénomènes qui influencent la dynamique d'un axe de machine afin d'obtenir un modèle transposable et paramétrable (changement de type de machine, de masse déplacée,...). En étudiant une structure flexible (Figure 2.1.a), il n'est pas facile de prédire la manière dont chaque élément constitutif se déforme en mouvement surtout si l'on considère une structure aussi complexe à étudier qu'un robot cartésien. Avant d'obtenir un modèle de commande, il est donc utile de réaliser dans un premier temps un modèle de connaissance et de disposer d'un outil d'analyse des structures flexibles. La première idée est de faire appel aux méthodes analytiques mais elles atteignent vite leurs limites sur des problèmes industriels courants, même dans le cas de calculs statiques linéaires. Les méthodes

simplifiées, telles que celles issues de la résistance des matériaux, ne sont utilisables que sur des structures au comportement mécanique bien particulier (barres en traction-compression, poutres en flexion-cisaillement, plaques...). Lorsque ces méthodes doivent s'appliquer à d'autres types de structures et de comportements, c'est au détriment de la qualité des résultats, ce qui les exclut généralement de toute utilisation comme modèle de connaissance.

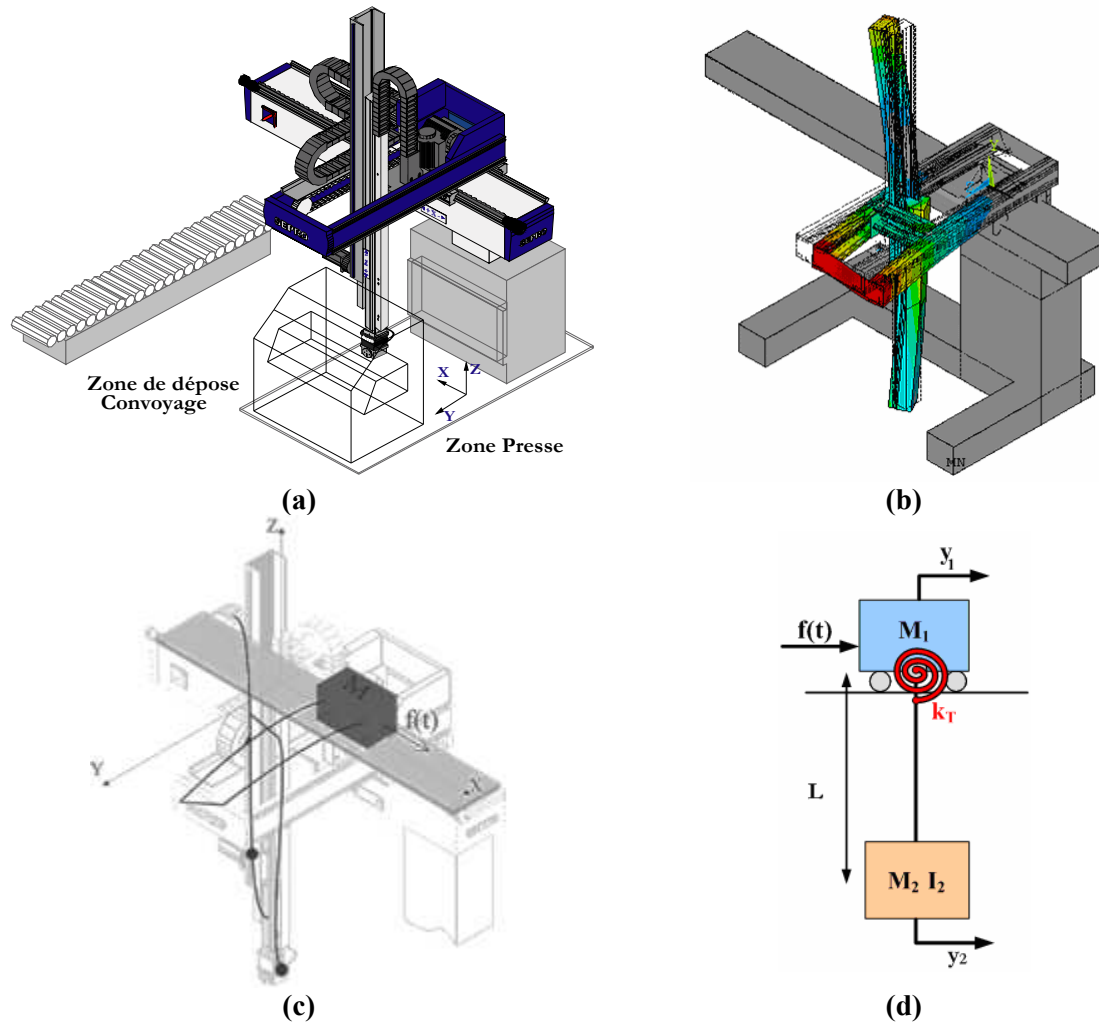


Figure 2.1 – Démarche de modélisation générale d'un axe souple.

(a) – Système réel à modéliser (b) – Modélisation éléments-finis (c) – Modélisation continue (d) – Modèle à paramètres localisés.

Il est alors possible de faire appel à la modélisation par éléments finis (Figure 2.1.b), qui est avant tout une méthode de résolution numérique d'équations bien adaptée à la dynamique des structures. Ces dernières sont décomposées en éléments raccordés les uns aux autres, de manière à décrire au mieux la structure réelle, par des nœuds pour les barres et les poutres, des lignes pour les surfaces planes et des surfaces pour les volumes. Cette méthode a émergé avec la nécessité de résoudre des problèmes de calcul complexes et généraux, dans un contexte où le développement massif de l'informatique permettait d'automatiser le traitement de systèmes d'équations conséquents. La puissance des calculateurs actuels permet en effet de pouvoir approcher le comportement vibratoire global d'une mécanique en un temps de calcul raisonnable. Cependant, ce type de modélisation reste encore trop complexe pour définir un modèle de commande [Harris, 1996].

L'application d'une telle méthode à des structures réelles conduit à améliorer la connaissance de leurs déformations grâce à ce que l'on appelle une analyse modale. Le but de cette analyse est de déterminer les modes de vibration d'une structure en identifiant ses déformées et ses fréquences propres. Elle permet de dégager une tendance générique que l'on peut ensuite utiliser pour obtenir un modèle de comportement basé sur des caractéristiques physiques du robot manipulateur. Ce modèle de comportement (Figure 2.1.c) correspond à une modélisation continue des modes de déformation dominants issue de la précédente analyse modale. Il est obtenu par un assemblage de poutres continues dont la dynamique permet de représenter un comportement en flexion, torsion ou traction-compression.

La réduction du modèle continu aux principaux modes de déformation permet d'aboutir à différents types de modèles à paramètres localisés (Figure 2.1.d) comme ceux introduits dans [Barre, 2004] et [Khalil et Gautier, 2000]. Ces modèles seront utilisés dans les chapitres suivants comme modèles de commande.

Pour illustrer cette méthodologie, la démarche générale présentée Figure 2.1 sera utilisée pour modéliser le comportement de l'axe Y du banc d'essais n°1 (Annexe D). Dans toute la suite de ce chapitre, seul le comportement selon cette direction Y sera donc considéré.

## 2.2 Modèle de connaissance

### 2.2.1 Modélisation éléments-finis d'un robot cartésien

Le robot cartésien à modéliser (Figure 2.2) peut être considéré comme étant constitué de quatre sous-ensembles principaux dédiés au mouvement d'un axe : une poutre horizontale représentant l'axe X, un cadre orthogonal représentant l'axe Y, un bras vertical fixe sur lequel se translate une partie mobile représentant l'axe Z. La modélisation par éléments finis permet d'obtenir les principaux modes de déformation des structures. Nous verrons par la suite qu'un modèle simplifié peut être proposé lorsque les modes de déformation sont clairement identifiés.

Le principe de réalisation du modèle éléments finis du robot cartésien est illustré Figure 2.2. Il a été réalisé à partir de ses caractéristiques mécaniques et structurelles en utilisant le logiciel de modélisation ANSYS®. Son principe de construction est basé sur une modélisation des quatre sous-ensembles principaux (Figure 2.2.b) et une modélisation des liaisons qui existent entre ces éléments (Figure 2.2.c).

Les quatre sous-ensembles principaux sont constitués de profilés en aluminium. Deux méthodes de modélisation éléments-finis sont utilisables pour ces profilés :

- la méthode volumique, pour laquelle tout le volume du profilé sera maillé (ce qui entraîne généralement un nombre d'éléments importants et des temps de calcul élevés),
- la méthode surfacique, où le volume du profilé est simplifié en éléments surfaciques.

Les profilés présentent une très grande longueur (510 à 1441 mm) pour une faible épaisseur (3 à 5 mm). Pour s'affranchir de la prise en compte de cette épaisseur, une discrétisation en éléments surfaciques peut être utilisée. Les temps de calcul par rapport à une méthode volumique sont réduits du fait de la diminution du nombre d'éléments. Une telle modélisation sous-entend une simplification au niveau de la section des profilés : il est donc nécessaire d'établir une méthodologie de modélisation adaptée (Figure 2.2.b). Le principe général de celle-ci correspond à une simplification de la section des

profilés en assemblage de lignes neutres qui possède les caractéristiques mécaniques initiales (masse, position du centre de gravité, moment quadratique).

La représentation des liaisons entre ces quatre sous-ensembles est un point sensible dans la modélisation. Les contacts galets-rails qui composent les modules de guidage entre chaque sous-ensemble sont simplifiés par des éléments ressorts (Figure 2.2.c). Ces éléments ressorts représentent les souplesses de ces contacts ainsi que les précontraintes qui plaquent les galets sur les rails de guidage.

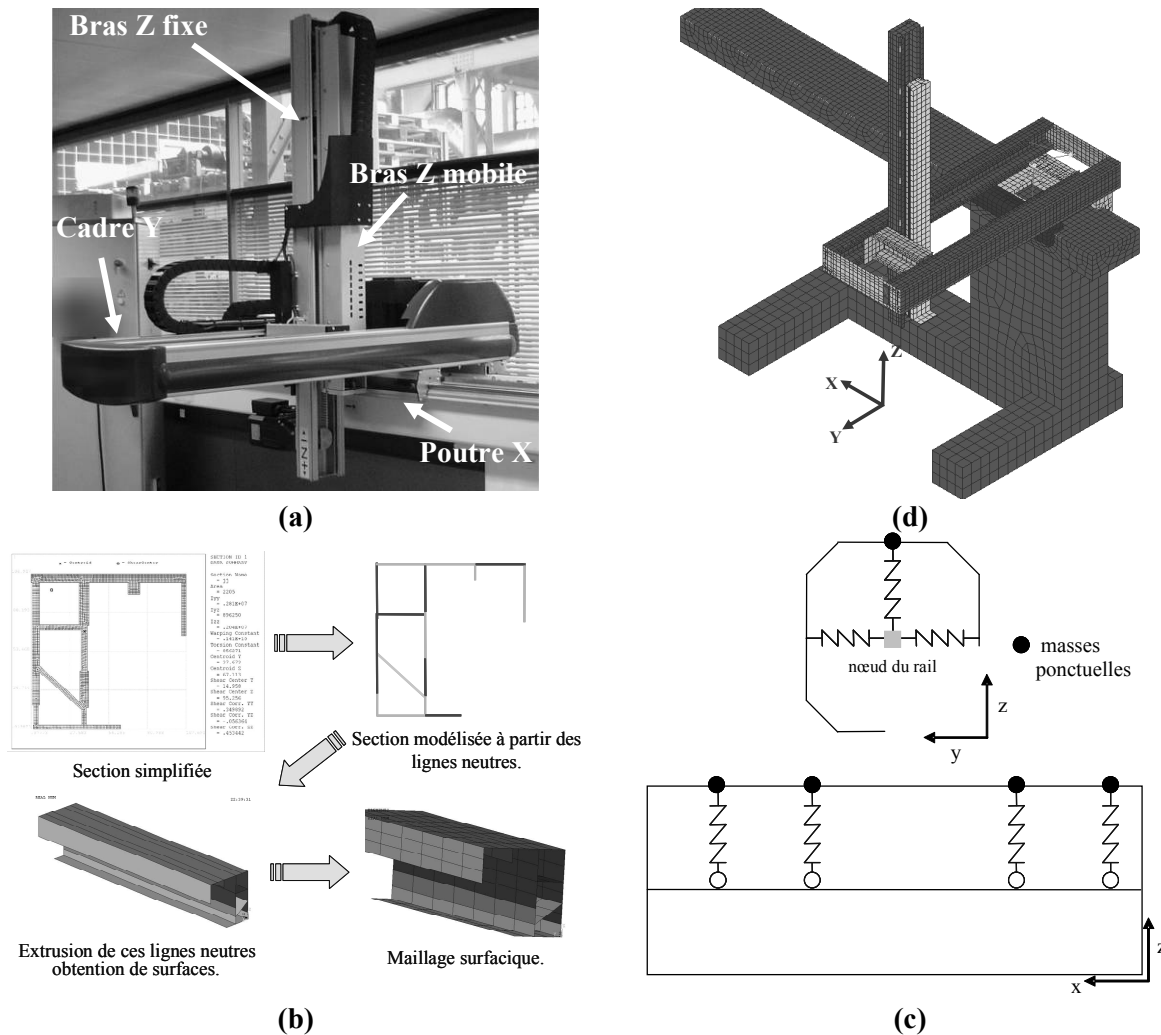


Figure 2.2 – Principe de réalisation d'un modèle éléments finis d'un robot cartésien.

(a) – Robot cartésien à modéliser (b) – Modélisation des sous-ensembles principaux (c) – Modélisation des liaisons (d) – Modélisation éléments-finis.

Le modèle éléments-finis complet (Figure 2.2.d) est obtenu par assemblage des quatre sous-ensembles principaux, chacun des ces ensembles étant reliés par des liaisons telles que celles représentées Figure 2.2.c.

## 2.2.2 Analyse modale du modèle éléments-finis

L'analyse modale d'un modèle éléments finis permet d'obtenir les fréquences propres et les déformées associées [Barre, Hautier et coll., 1996]. Les modèles obtenus peuvent être assimilés à une juxtaposition de modèles du second ordre, sans amortissement (qui reste inconnu après analyse modale d'un modèle éléments finis) et avec des paramètres variables selon les positions. Cette analyse fournit

plusieurs modes de déformations classés par ordre de fréquence croissante qui correspondent à des résonances mécaniques du système, le mode de déformation dominant étant généralement celui correspondant à la fréquence la plus basse. Pour identifier les premiers modes propres du robot modélisé, nous réalisons dans un premier temps une analyse modale. Celle-ci permet de comprendre le comportement dynamique du robot et de prendre des hypothèses simplificatrices pour modéliser simplement chacun de ses axes. Les trois premiers modes de déformation sont résumés dans la suite de cette partie, ces modes étant classés par fréquence croissante.

### 1<sup>er</sup> Mode

Ce mode correspond à une torsion du cadre Y dans le plan X/Z. Il entraîne un basculement du chariot Y et du bras Z fixe. Compte tenu de leurs longueurs respectives, les déformées aux extrémités des bras Z sont prédominantes (Figure 2.3).

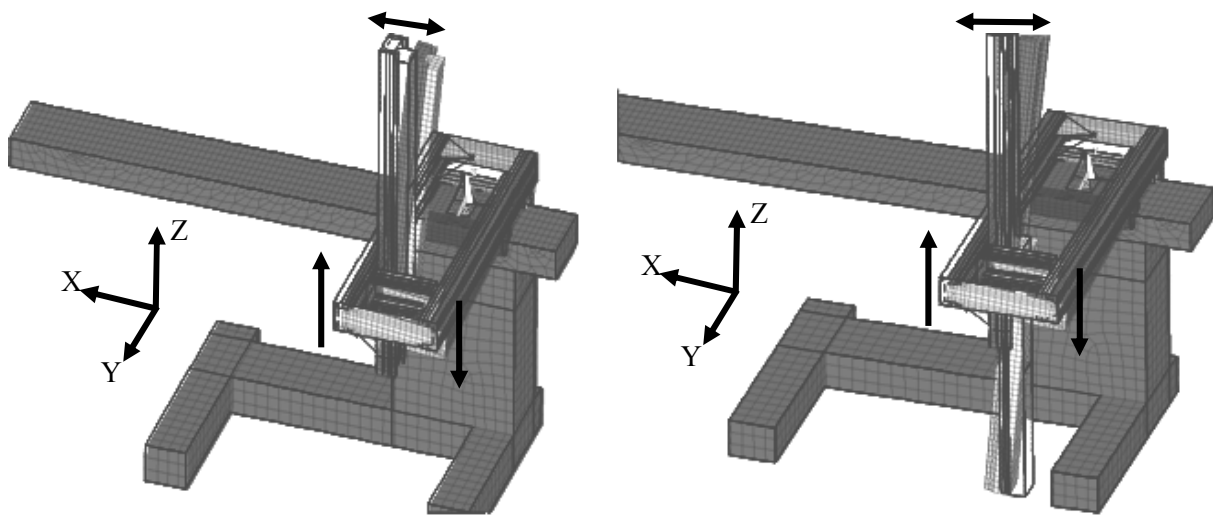


Figure 2.3 – 1<sup>er</sup> mode de déformation du robot.

Les résultats de l'analyse modale indiquent que les bras Z fixe et mobile restent rigides dans ce mode. Seul le cadre Y semble se déformer. L'analyse modale montre que la fréquence de ce mode évolue en fonction de la position Y et Z du robot. En effet, physiquement, on comprend bien que la rigidité du cadre Y dépend de l'éloignement de l'ensemble mobile par rapport à la poutre X et de l'effet « bras de levier » qu'exerce le bras Z. Ce mode de déformation correspond, d'après cette analyse, au **1<sup>er</sup> mode de déformation de l'axe X** du robot.

### 2<sup>ème</sup> Mode

Ce mode correspond à la combinaison d'une faible flexion du cadre Y selon Z, d'une flexion et d'une faible torsion du bras Z mobile dans le plan Y/Z ainsi qu'une faible flexion du bras Z fixe dans le plan Y/Z (Figure 2.4).

Les résultats indiquent que la déformation principale provient essentiellement de la flexion des bras Z fixe et mobile selon la direction Y. Il semble que seul le comportement en flexion du bras Z influence ce mode, cependant il faut retenir que le cadre Y subit aussi une faible flexion selon Z et que le bras Z mobile subit une faible torsion autour de Z. L'analyse modale montre que la fréquence de ce mode

dépend essentiellement de la position Z du robot, la position du bras Z sur le cadre Y n'a en effet pas beaucoup d'influence. Ce mode de déformation correspond au **1<sup>er</sup> mode de déformation de l'axe Y**.

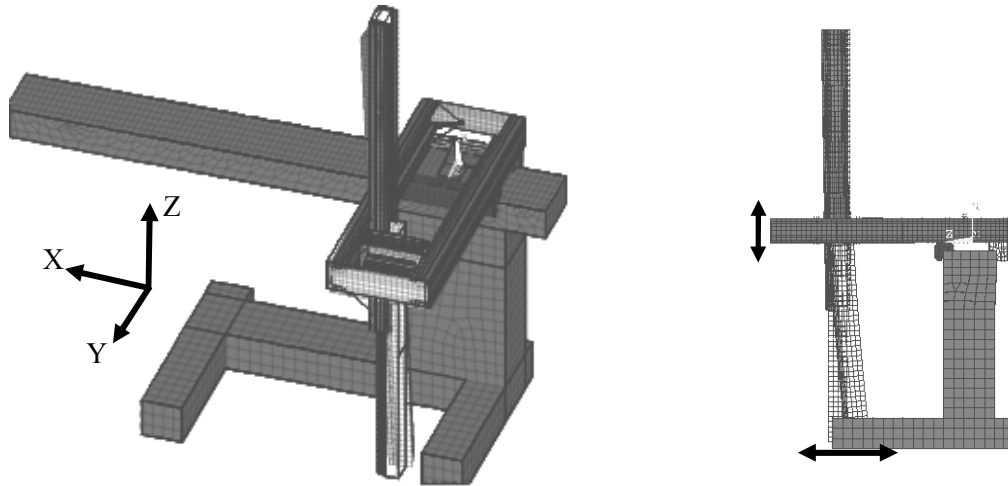


Figure 2.4 – 2<sup>ème</sup> mode de déformation du robot.

### 3<sup>ème</sup> Mode

Ce mode correspond à une flexion des bras Z fixe et mobile dans le plan X/Z. Les bras se déforment en phase. Il correspond donc à un « repliement des éléments Z » (Figure 2.5).

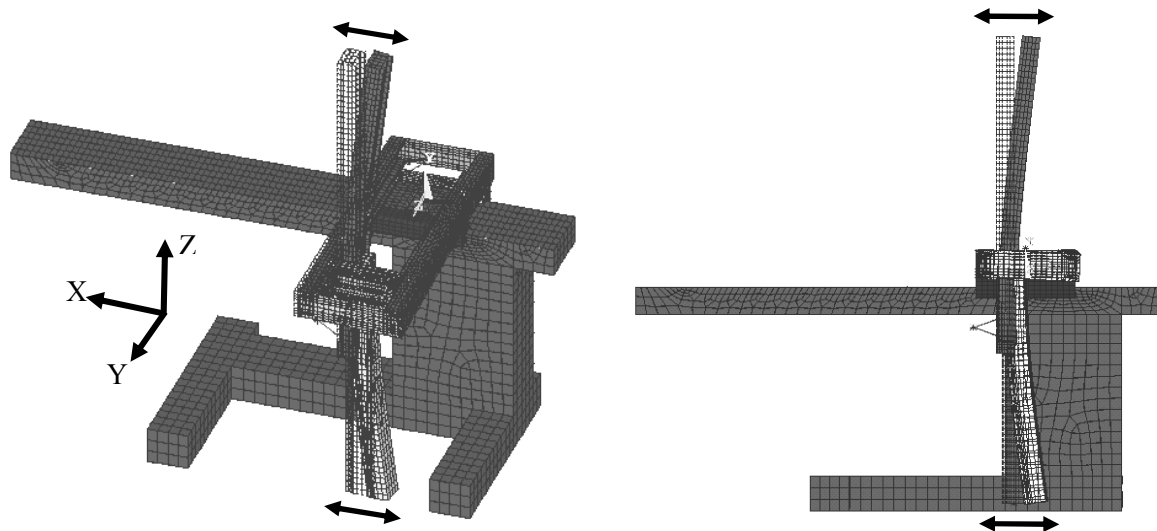
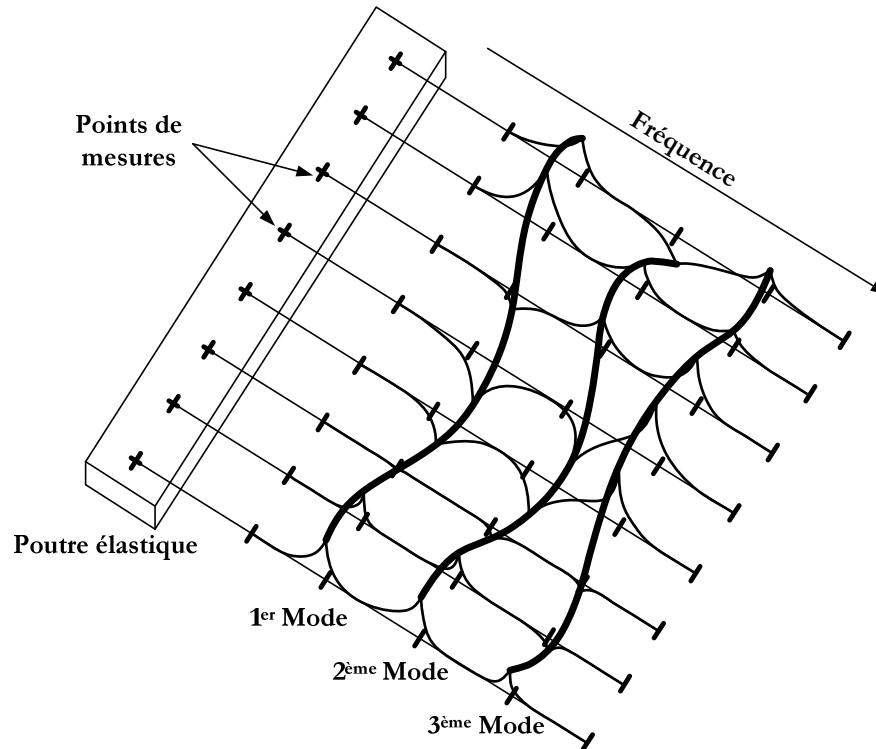


Figure 2.5 – 3<sup>ème</sup> mode de déformation du robot.

## 2.2.3 Validations par analyse modale expérimentale

Pour contrôler la validité du modèle éléments finis, il est nécessaire de vérifier expérimentalement les résultats de l'analyse modale de ce modèle. Pour cela, il est possible de faire appel à l'analyse modale expérimentale. Cette analyse modale expérimentale consiste à déterminer les paramètres modaux (fréquences naturelles des vibrations, coefficients d'amortissement, etc.) d'un système linéaire invariant. Le comportement dynamique de la structure ne requiert généralement que la seule connaissance de ces paramètres [Ewins, 1999] - [Bruël&Kjaer]. Réaliser une analyse modale expérimentale sur une structure permet essentiellement de recaler ou de vérifier les résultats obtenus à partir de différentes méthodes de modélisation.

La figure 2.6 représente une application de l'analyse spectrale expérimentale. Dans cet exemple, les trois premiers modes de vibration d'une poutre continue sont analysés. La théorie de l'analyse modale montre que ce système est linéaire et que les modes de déformation sont orthogonaux entre eux. Pour chaque point de mesure, la partie imaginaire de la fonction de transfert entre la réponse mesurée et l'excitation de la poutre est représentée perpendiculairement à celle-ci. En connectant les extremums entre eux, nous avons alors une idée de la forme de chacun des modes.



**Figure 2.6 – Principe de l'analyse spectrale expérimentale appliquée à une poutre.**

La figure 2.7 présente le dispositif expérimental utilisé pour analyser le robot cartésien modélisé Figure 2.1. La connaissance de la direction (X, Y ou Z) des modes propres est essentielle pour obtenir des résultats corrects. Une mauvaise interprétation des relevés expérimentaux peut aboutir à des résultats ne correspondant en rien à la réalité. La direction des modes propres n'étant pas triviale, l'analyse du modèle éléments finis nous permet de positionner les capteurs à des endroits stratégiques et de vérifier que le mode relevé expérimentalement correspond bien aux résultats obtenus par éléments finis. Par exemple, il nous est possible de détecter les phénomènes de couplages qui se traduisent, dans notre cas, par une vibration dans une direction autre que celle excitée. Une mauvaise interprétation de ce phénomène aboutirait à la détection d'un mode propre supplémentaire selon la direction testée alors qu'il peut s'agir tout simplement d'un mode dominant d'une autre direction.

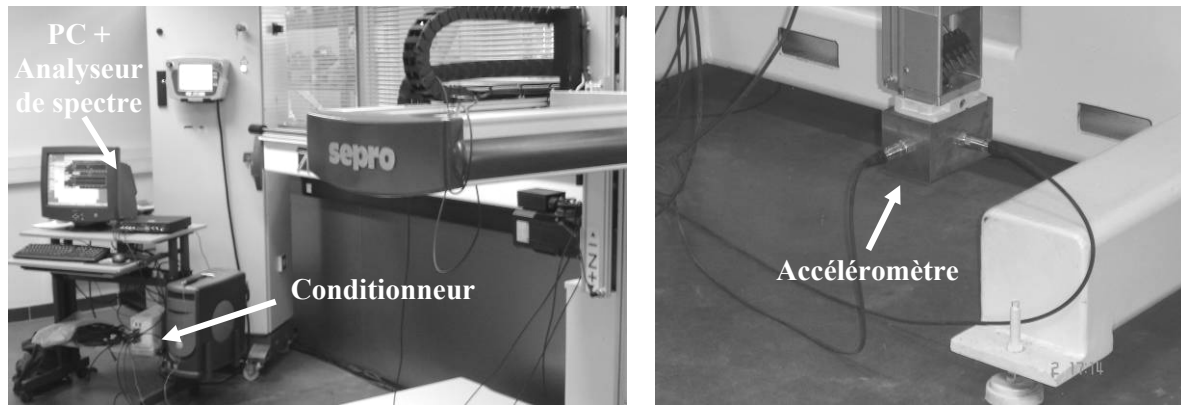


Figure 2.7 – Analyse modale expérimentale d'un robot cartésien.

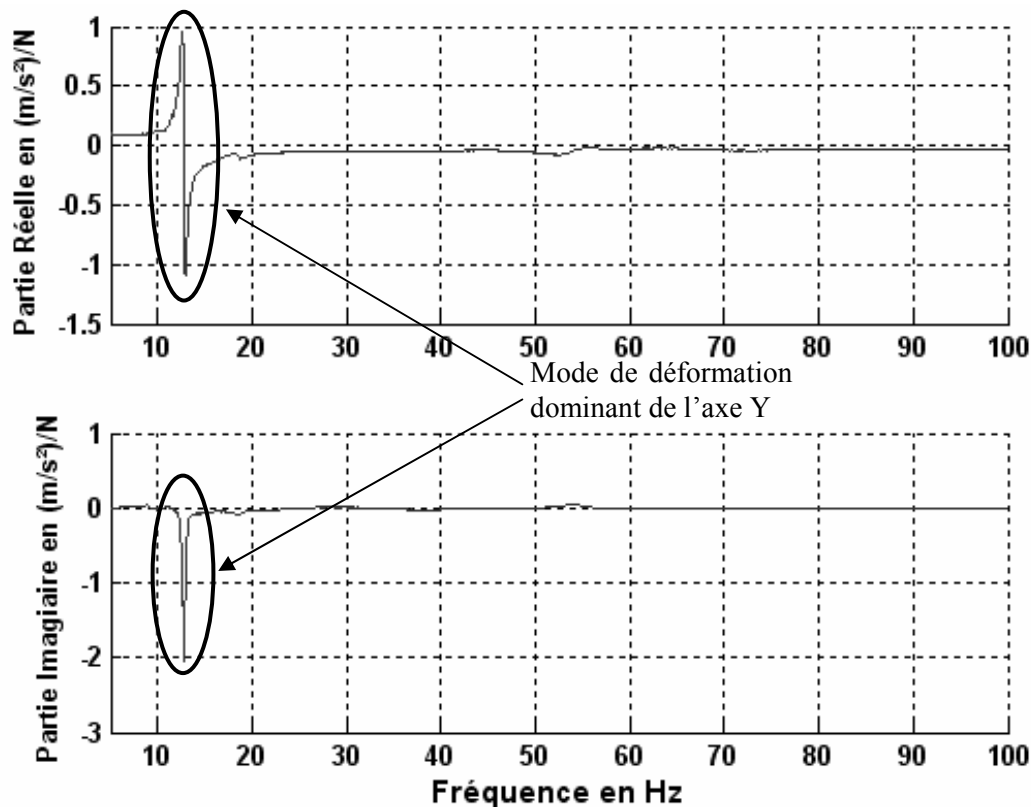


Figure 2.8 – Réponse d'un accéléromètre placé dans la direction de l'axe Y et en bout de bras Z à une excitation de l'extrémité du bras Z au marteau de choc.

Les réponses des accéléromètres placés en bout de bras et selon la direction Y ont toutes l'allure de la figure 2.8 ce qui permet de retrouver la forme introduite Figure A.3. Il est à retenir que sur une bande de fréquence allant de 0 à 100 Hz, l'analyse modale expérimentale nous montre que la déformée principale du robot correspond au deuxième mode issu de l'analyse modale de son modèle éléments finis. Ce résultat est présenté Figure 2.9 où la forme de la déformée du premier mode propre de l'axe Y issue des relevés expérimentaux est représentée pour différentes positions du bras Z. On retrouve bien les formes caractéristiques correspondant au deuxième mode issu de l'analyse modale du modèle éléments finis.

## 2.2.4 Bilan du modèle de connaissance de l'axe Y

Les résultats obtenus par analyse modale expérimentale (Figure 2.8 et Figure 2.9) ont montré que sur une bande de fréquence de 100 Hz, le mode dominant selon la direction Y correspond au deuxième

mode propre obtenu par analyse modale du modèle éléments-finis. Les modes propres qui se situent à des fréquences plus élevées ne seront pas pris en compte. En effet, le but final de cette partie étant d'obtenir un modèle utilisable pour synthétiser la commande de ce robot, les bandes passantes des asservissements pour ce type de machine ayant pour ordre de grandeur quelques dizaines de Hertz, seuls les modes propres de 0 à 100 Hz sont significatifs. Les modes propres se situant à des fréquences supérieures auront peu d'influence sur le comportement dynamique du système asservi et ne seront donc pas pris en compte dans la suite de ce travail.

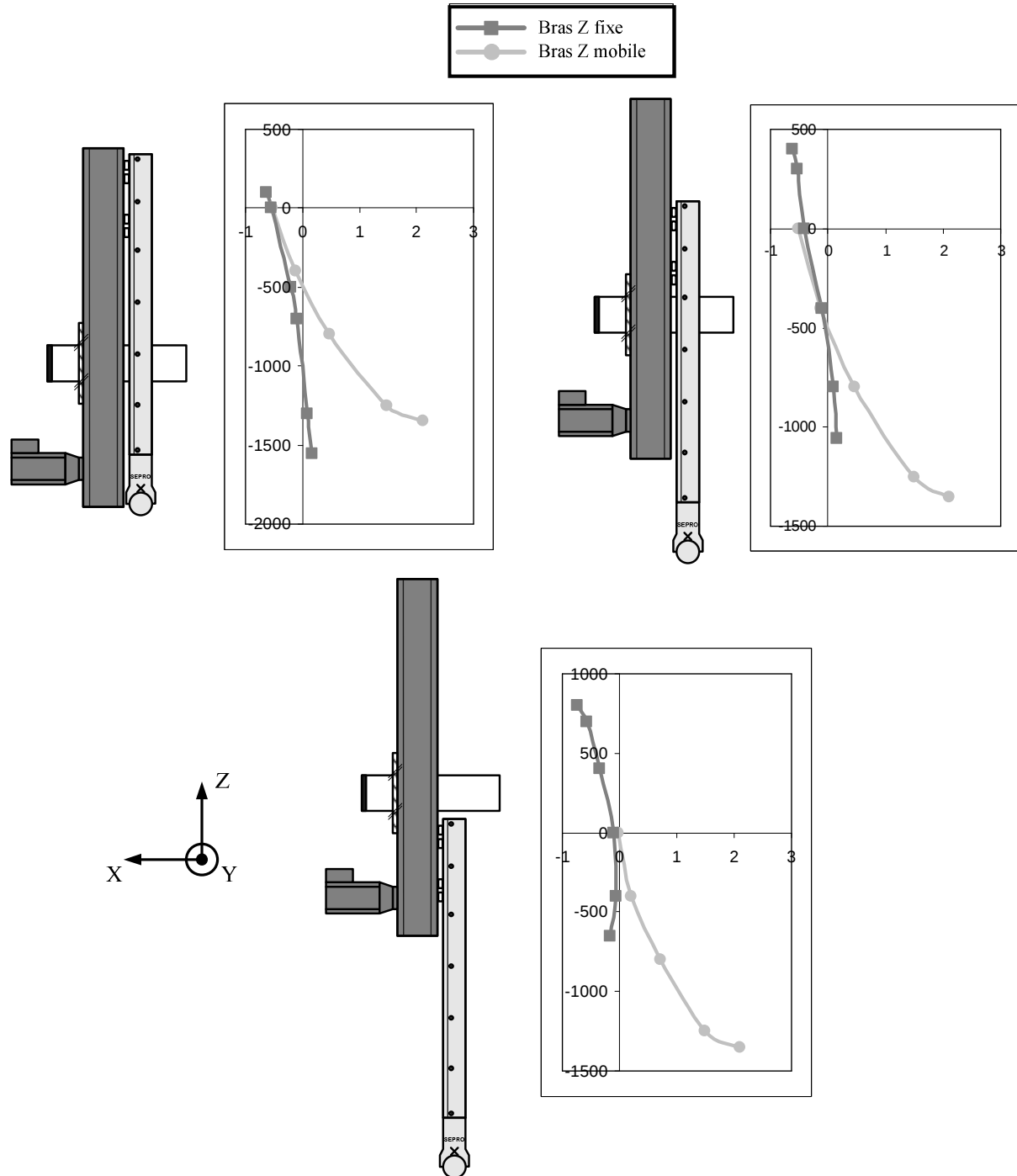


Figure 2.9 – Forme du premier mode de déformation des bras Z fixe et mobile selon la direction Y pour différentes positions du bras Z mobile.

## 2.3 Modèle de comportement de l'axe Y

Nous avons montré qu'un modèle de connaissance permet de comprendre les phénomènes influençant la dynamique d'un système. Cependant, les modèles simplifiés (obtenus par les méthodes précédentes) sont valables pour une configuration du robot et difficiles à relier aux paramètres physiques, il n'est donc pas possible de les extrapoler à une gamme de robots. Il est donc nécessaire de déterminer un modèle simple à mettre en œuvre pouvant représenter l'ensemble des systèmes locaux (un modèle à paramètres distribués), assez simple pour permettre une commande directe ou une réduction de modèle rapide et dont les paramètres ont une signification physique.

D'après les résultats obtenus à partir de la modélisation en éléments finis et des validations expérimentales, le premier mode de déformation de l'axe Y du robot provient principalement de la flexion pure des bras Z fixes et mobiles. En tenant compte de ce résultat, le comportement de l'axe Y peut être simplifié et modélisé par un chariot que l'on vient pousser et sur lequel seraient fixées des poutres continues qui ne se déforment qu'en flexion pure (Figure 2.10). Le modèle comprend deux parties, correspondant aux bras fixe et mobile. Ces deux parties sont reliées entre elles par deux ressorts qui modélisent les deux paires de galets qui assurent la liaison entre les bras Z fixe et mobile. Il est alors important de noter que dans les deux représentations (ou modélisation) éléments finis ou poutre, seules les premiers modes selon la direction Y sont identiques.

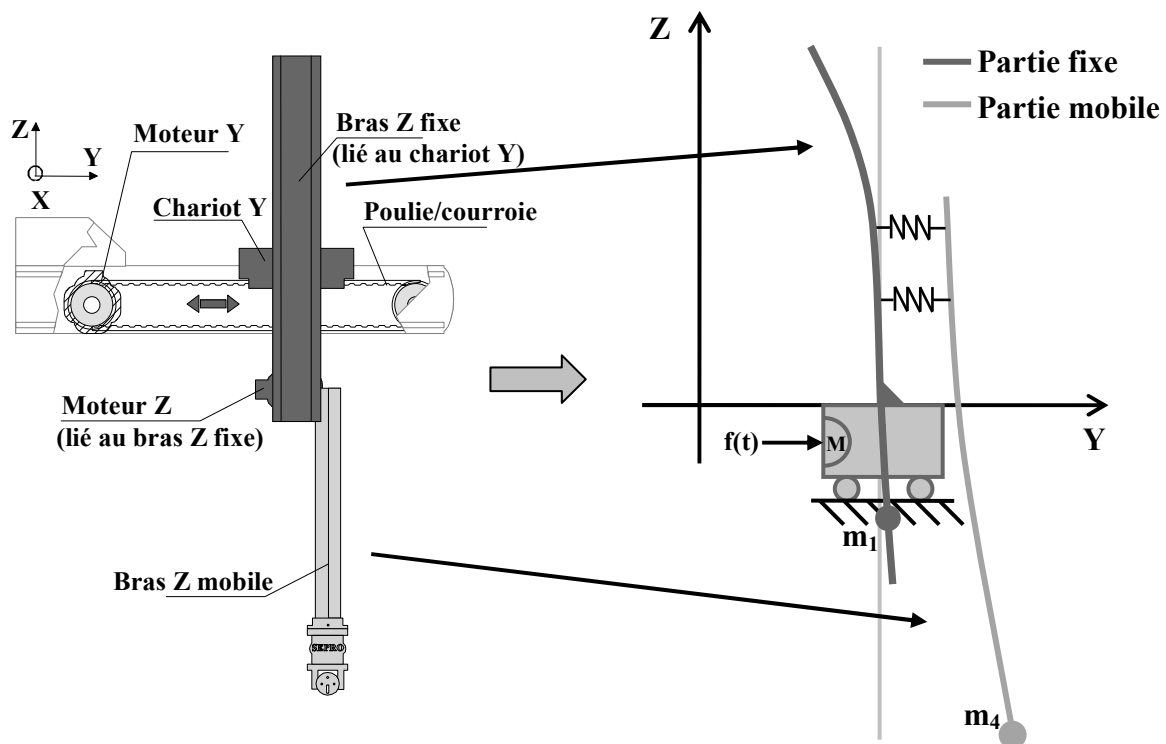


Figure 2.10 – Modèle retenu pour modéliser l'axe Y.

Notre objectif dans ce chapitre est donc de résoudre les Equations aux Dérivées Partielles (EDP) qui régissent les mouvements en traction-compression, torsion et flexion des poutres continues pour obtenir un modèle simplifié de la mécanique d'un système dont les modes de déformation sont connus par avance. Le modèle obtenu est alors beaucoup plus simple à interpréter qu'un modèle éléments finis.

Dans la littérature, il existe de nombreuses études des vibrations des structures flexibles basées sur ce type de modélisation. Une grande partie des travaux concerne l'étude d'une poutre munie d'une masse ponctuelle attachée à l'une de ses extrémités et fixée de l'autre côté : Parnell et Cobble [Parnell et Cobble, 1976] ont résolu l'équation de mouvement pour une poutre uniforme ayant une masse attachée à son extrémité pour n'importe quels types de chargements et de conditions aux limites en utilisant le formalisme de Laplace. Gürgöze [Gürgöze, 1996] a déterminé l'équation en fréquence d'une poutre encastree-libre avec une masse au bout sur laquelle est fixée un ressort.

D'autres se sont ensuite intéressés à l'étude d'une poutre munie de plusieurs masses fixées à différentes positions de la poutre. Chen [Chen, 1963] a trouvé la solution du mouvement d'une poutre avec une masse fixée au milieu de la poutre. Low [Low, 1998] a obtenu l'équation en fréquence d'une poutre portant un nombre fini de masses ponctuelles en la divisant aux points où sont fixés ces masses et en considérant les conditions aux limites en ces points.

Toutes ces études ont toujours été réalisées en considérant que l'une des extrémités de la poutre était fixe. Dans le cas où celle-ci est en mouvement (par exemple si la poutre est fixée sur un chariot), la dynamique de ce mouvement affecte énormément le comportement de la poutre et vice-versa. Dans le cas d'une poutre fixée sur un chariot, les comportements de la poutre et du chariot doivent être intégrés simultanément dans la modélisation pour obtenir la dynamique correcte de l'ensemble. To [To, 1982] a réussi à calculer les fréquences propres de ce modèle et à déterminer les modes propres d'une antenne qu'il a modélisé comme une poutre encastree excitée à sa base, une masse ponctuelle étant fixée à son extrémité. Park et coll. [Park, Chung et coll., 2000] ont modélisé et étudié la dynamique d'une poutre attachée à un chariot et munie d'une masse ponctuelle dont la position est quelconque. L'équation en fréquence, les modes propres et la réponse à n'importe quels types d'excitations ont pu être déterminés. Luo et coll. [Luo, Kitamura et coll., 1995] et Ge et coll. [Ge, Lee et coll., 1998] ont montré la stabilité asymptotique du contrôle de l'extrémité d'une poutre flexible fixée sur une base mobile avec une masse ponctuelle. Le comportement vibratoire d'une poutre flexible attachée à un support en mouvement a été étudié pour déterminer un contrôle actif de robots manipulateurs [Low, 1987] - [Low, 1997] - [Park, Kim et coll., 2001].

Les méthodes de résolution précédentes restent cependant limitées à des structures simples et ne comportant que peu d'éléments. Elles ne tiennent pas compte des liaisons entre les divers sous-ensembles. Enfin, elles n'ont été validées que sur des prototypes souvent conçus *ad hoc* s'appliquant donc à des structures qui restent éloignées des mécanismes réels. Cependant, Margolis [Karnopp, Margolis et coll., 2000] a développé une méthode qui permet de décomposer une structure flexible en sous-ensembles que l'on peut coupler ensemble pour obtenir un système à paramètres localisés à partir d'une modélisation type Euler-Bernoulli. Il a appliqué cette méthode pour un cadre de véhicule en forme de A [Margolis, 1978]. L'originalité de notre travail est de montrer que l'on peut réellement appliquer cette méthodologie, de manière générique, et que l'on peut la valider expérimentalement de manière probante.

Nous présentons, par souci de simplicité, la résolution complète des équations et la détermination des paramètres modaux du mouvement d'une poutre en flexion. Ensuite, nous utilisons ce principe de résolution pour modéliser le comportement des robots cartésiens SEPRO Robotique afin d'obtenir un modèle proche de la réalité du comportement dynamique d'un axe souple.

## 2.3.1 Modélisation de la dynamique d'une poutre continue

### 2.3.1.1 Classification des systèmes continus

Le mouvement des milieux continus est caractérisé par un champ de déplacements dont la valeur est une fonction continue de la position et du temps. De ce fait, un milieu continu peut être considéré comme possédant une infinité de degrés de liberté. Une poutre est le système continu dont le mouvement est régi de la façon la plus simple dynamiquement parlant. Elle est, par définition, le volume engendré par une succession de sections perpendiculaires à une ligne appelée « fibre neutre » qui se trouve être le lieu des centres de gravité de chacune de ces sections droites (Figure 2.11). Nous supposons aussi que les dimensions des sections droites sont beaucoup plus petites que la longueur de la poutre.

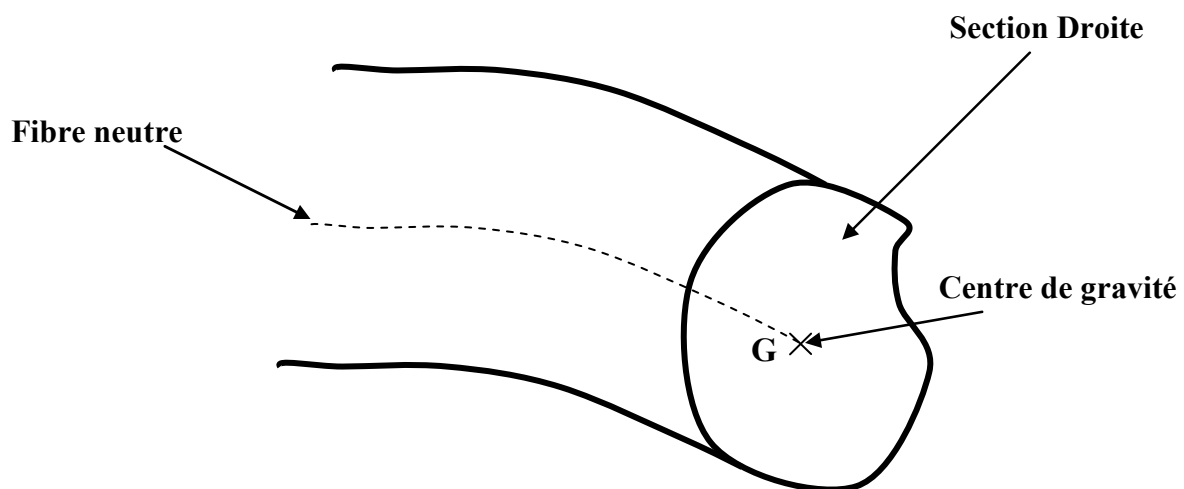


Figure 2.11 – Définition d'une poutre continue.

Une poutre continue subit 3 types de déformations fondamentales [Ginsberg, 2001] (Figure 2.12). Ce type de milieu continu peut être classé en 4 catégories selon le mode de déformation subi :

- système en traction-compression,
- système en torsion,
- système en flexion,
- système dont le mouvement est régi par un couplage des trois types précédents.

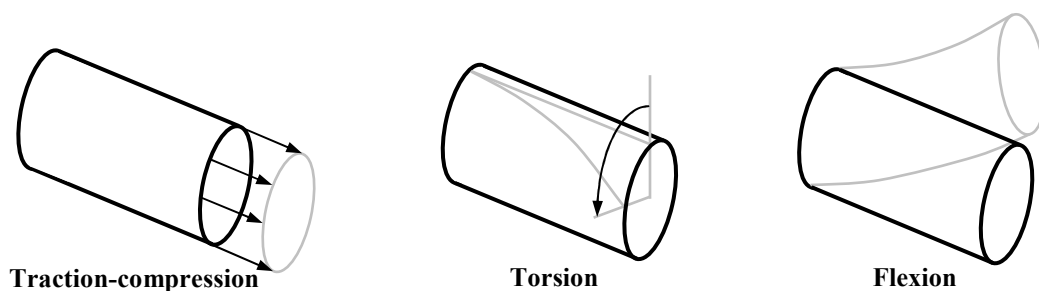


Figure 2.12 – Déformations fondamentales des poutres continues.

Pour une poutre en traction-compression, les sections droites se déplacent uniquement dans la direction de la fibre neutre, elles ne subissent qu'un effort normal (la contrainte normale est alors constante sur chaque section droite). Pour une poutre en torsion, les sections droites font un mouvement de rotation qui dépend de la position axiale, seul un moment de torsion s'applique sur celles-ci (la contrainte normale est nulle sur la section droite). Pour la flexion, comme pour la traction-compression, la déformation provient de la contrainte normale. Cependant, dans ce mode de déformation, la courbure de la poutre est prise en compte, la contrainte normale n'est alors plus constante sur les sections droites qui subissent un moment de torsion et un effort tranchant.

### 2.3.1.2 Exemple d'une poutre en flexion : modèle d'Euler-Bernoulli

Les équations de mouvement des poutres continues pour les déformations fondamentales peuvent être déduites par l'approche de Newton-Euler. Cette approche appliquée aux systèmes continus se base sur l'analyse d'un élément infinitésimal de poutre et permet de relier directement les efforts (intérieurs et extérieurs) et le mouvement. Plus précisément, elle consiste à appliquer la théorie de la mécanique continue (tenseur des contraintes, tenseur des déformations) à un élément de poutre et d'en déduire les équations de mouvement. Nous appliquons cette méthode à une poutre en flexion pure avec les hypothèses suivantes (modèle d'Euler-Bernoulli) :

- les centres de gravité des sections droites de la poutre se situent tous sur une ligne continue,
- les aires des sections droites doivent être petites par rapport à la longueur de la poutre,
- les sections droites restent droites et perpendiculaires à la fibre neutre de la poutre,
- on se place dans le cas linéaire, les déplacements doivent rester petits par rapport aux dimensions de la poutre.

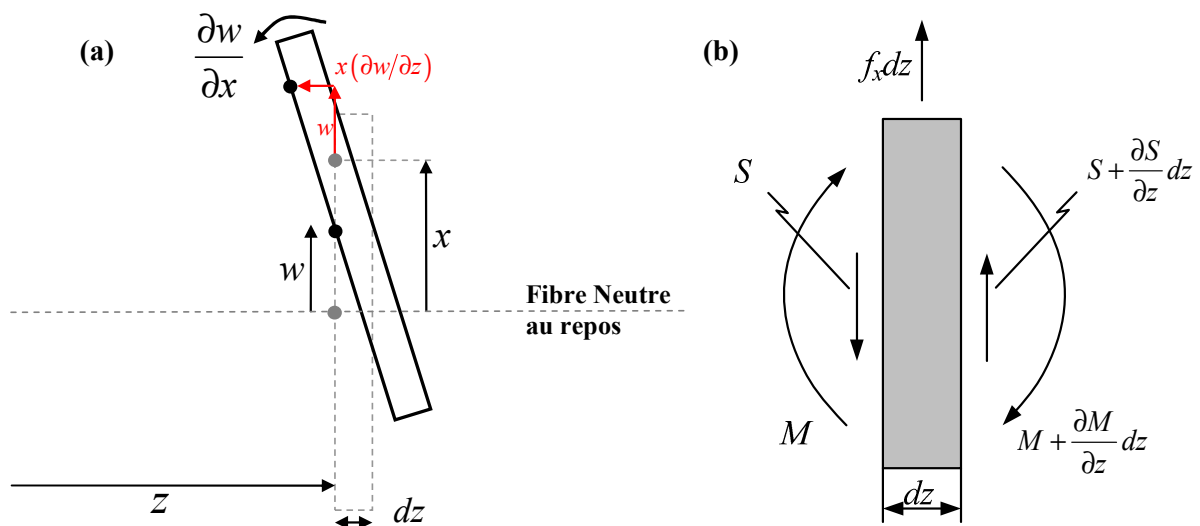


Figure 2.13 – Etude d'une poutre en flexion.

(a) – Mouvement d'une section droite d'une poutre en flexion (b) – Bilan des forces agissant sur un élément de poutre.

La figure 2.13 montre comment une section droite est amenée à se déplacer en considérant les hypothèses précédentes. En effet, comme cette section droite doit rester perpendiculaire à la fibre neutre et que les déplacements sont petits, nous pouvons considérer que la rotation d'une section droite peut être approximée par la pente ( $\partial w/\partial z$ ) de la tangente à la fibre neutre.

Un point situé à une cote  $x$  de la fibre neutre s'est donc déplacé de  $-x(\partial w/\partial z)$  par rapport au centre de gravité. La contrainte axiale  $\varepsilon_{zz}$  correspondant au déplacement de ce point s'écrit donc :

$$\varepsilon_{zz} = -x \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}. \quad (2.1)$$

Dans le cas linéaire, la pression normale  $\sigma_{zz}$  agissant sur une section droite a pour expression :

$$\sigma_{zz} = E \varepsilon_{zz}. \quad (2.2)$$

L'effort normal sur un élément de section  $dA$  en résultant a pour expression  $\sigma_{zz}dA$ . Chaque section droite subit donc un effort axial  $F$  et un moment fléchissant  $M$  :

$$F = \int_A \sigma_{zz} dA = \int_A -E x \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} dA = 0, \quad (2.3)$$

$$M = -\int_A \sigma_{zz} z dA = \int_A E x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} dA = EI \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \quad (2.4)$$

où  $I$  représente le moment quadratique des sections droites selon la direction normale à la flexion.

L'expression des efforts internes étant connue, il ne reste plus qu'à appliquer le principe fondamental de la dynamique sur une section droite pour déterminer les équations régissant le comportement d'une poutre en flexion.

En utilisant les notations de la figure 2.13, les équations de mouvement s'écrivent :

$$\sum F_x = dm \ddot{w}, \quad \sum M_G = dI_G \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z}, \quad (2.5)$$

où  $dm$  est la masse de l'élément de poutre et  $dI_G$  est son moment d'inertie.

La longueur de l'élément étant  $dz$ , nous avons :  $dm = \rho A dx$ . En ce qui concerne la valeur de  $dI_G$ , la théorie développée par Timoshenko [Timoshenko, 1970] montre que l'effet de l'inertie de rotation n'est pas important pour les faibles fréquences de vibration. En effet, les résultats obtenus en considérant ou non le moment d'inertie sont très proches pour les premiers modes de déformation. Pour cette raison, on choisit :  $dI_G = 0$ . On obtient :

$$\sum F_x = \frac{\partial S}{\partial z} dz + f_x dz = \rho A dx \ddot{w}, \quad (2.6)$$

$$\sum M_G = S dz + \frac{\partial M}{\partial z} dz = 0. \quad (2.7)$$

En substituant (2.4) et (2.7) dans (2.6), nous retrouvons l'équation d'Euler-Bernoulli :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho A \ddot{w} = f_x. \quad (2.8)$$

Cette équation est généralement utilisée pour modéliser le comportement dynamique d'une poutre continue excitée longitudinalement.

### 2.3.1.3 Détermination des conditions aux limites

La résolution de l'équation de mouvement pour des poutres en torsion, traction-compression ou en flexion nécessite la spécification de conditions aux limites qui sont directement dépendantes de la géométrie de la poutre modélisée. Ce sont ces conditions aux limites qui vont fixer les caractéristiques des modes propres et donc le comportement dynamique de la structure dynamique. Elles sont choisies pour correspondre au mieux à la réalité physique. Les conditions aux limites les plus courantes sont généralement décrites aux extrémités de la poutre (en  $z_0 = 0$  ou  $z_0 = l$ ). Le tableau suivant présente une liste des principales conditions rencontrées en reprenant les notations introduites en 2.3.1.2 :

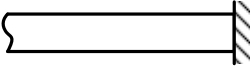
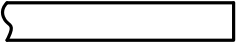
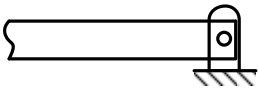
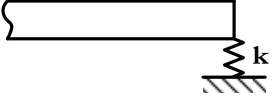
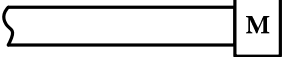
|                                                                                     | Types                                     | Conditions aux limites                                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | Encastrement                              | $w _{z=z_0} = 0$<br>$\frac{\partial w}{\partial z} _{z=z_0} = 0$                                                           |
|    | Libre                                     | $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} _{z=z_0} = 0$<br>$\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} _{z=z_0} = 0$                       |
|  | Appui simple/charnière                    | $w _{z=z_0} = 0$<br>$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} _{z=z_0} = 0$                                                       |
|  | Appui élastique (ressort de raideur $k$ ) | $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} _{z=z_0} = 0$<br>$\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} _{z=z_0} = \frac{k}{EI} w _{z=z_0}$ |
|  | Masse concentrée                          | $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} _{z=z_0} = 0$<br>$\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} _{z=z_0} = m \ddot{w} _{z=z_0}$     |

Tableau 2.1 – Conditions aux limites courantes.

### 2.3.1.4 Démarche de résolution : Application à une poutre en flexion

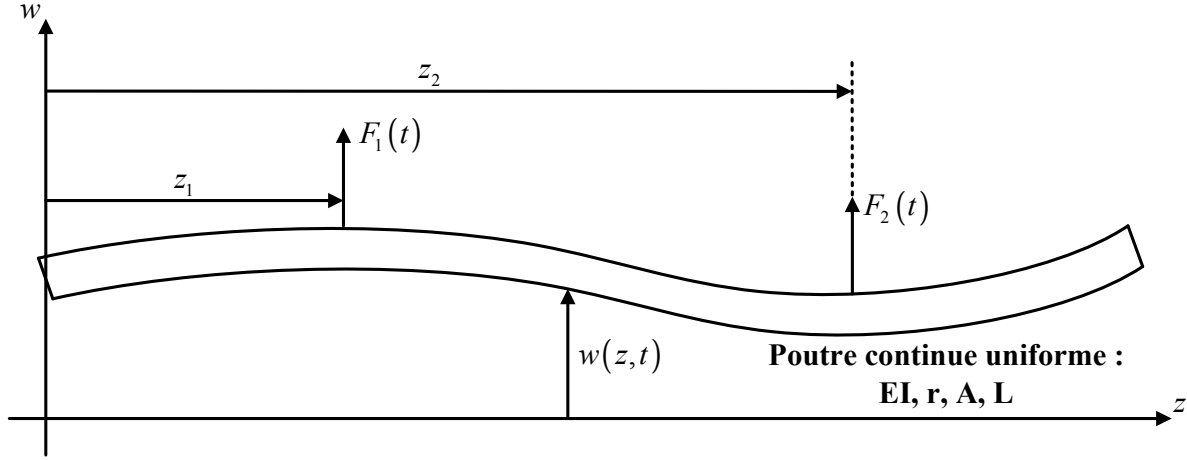


Figure 2.14 – Cas simple utilisé pour illustrer la démarche de résolution en dimension infinie.

Pour illustrer la démarche de résolution utilisée pour résoudre les équations de mouvement d'une poutre continue, nous allons l'appliquer au cas simple d'une poutre en flexion excitée par deux efforts extérieurs  $F_1(t)$  et  $F_2(t)$  (Figure 2.14). D'après 2.3.1.2, l'équation de mouvement correspondante s'écrit :

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F_1 \delta(z - z_1) + F_2 \delta(z - z_2), \quad (2.9)$$

où  $E$  représente le module d'élasticité du matériau constituant la poutre,  $I$  est le moment quadratique de la poutre,  $\rho$  sa densité volumique,  $A$  l'aire de sa section droite et  $L$  sa longueur.

Les deux extrémités de la poutre sont libres, d'après le tableau 2.1, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(0, t) = 0, \frac{\partial^3 w}{\partial z^3}(0, t) = 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(L, t) = 0, \frac{\partial^3 w}{\partial z^3}(L, t) = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Pour déterminer la forme des modes, nous allons commencer par résoudre l'équation homogène c'est-à-dire celle où les efforts extérieurs sont considérés comme nuls.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (2.11)$$

Nous utilisons ensuite le principe de séparation des variables pour séparer la translation  $w(z, t)$  en deux composantes, une purement temporelle (dépendante de  $t$ ) et une autre purement spatiale (dépendante de  $z$ ). On pose donc :

$$w(z, t) = \Phi(z) q(t). \quad (2.12)$$

En substituant cette relation dans (2.11), on obtient :

$$EI \frac{d^4 \Phi}{dz^4} \cdot q + \rho A \Phi \cdot \frac{d^2 q}{dt^2} = 0. \quad (2.13)$$

En regroupant les termes dépendant de  $z$  et les termes dépendant de  $t$ , (2.13) devient :

$$\frac{EI}{\rho A} \frac{1}{\Phi} \frac{d^4 \Phi}{dz^4} = - \frac{1}{q} \frac{d^2 q}{dt^2}. \quad (2.14)$$

Cette équation doit être valable quelles que soient les valeurs de  $z$  et de  $t$ . Cette condition ne peut être remplie que si chacun des termes sont constants. Par convention, ce terme constant sera pris égal à  $\omega^2$ . Nous verrons dans la suite que  $\omega$  représente la pulsation propre d'un des modes propres de la poutre considérée. Nous avons :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 q = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{d^4 \Phi}{dz^4} - k^4 \Phi = 0 \text{ avec } k^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega^2 \quad (2.16)$$

L'équation (2.16) est une équation différentielle du quatrième ordre qui peut être résolue en utilisant les conditions aux limites (2.10). En substituant (2.12) dans celles-ci, elles deviennent :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \Phi}{dz^2}(0, t) = 0, \frac{d^3 \Phi}{dz^3}(0, t) = 0, \\ \frac{d^2 \Phi}{dz^2}(L, t) = 0, \frac{d^3 \Phi}{dz^3}(L, t) = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

(2.16) a pour solution générale :

$$\Phi(z) = A \cosh(kz) + B \sinh(kz) + C \cos(kz) + D \sin(kz). \quad (2.18)$$

En utilisant les conditions aux limites (2.17) dans (2.18), nous obtenons une équation caractéristique appelée équation en fréquence :

$$\cosh(kL) \cos(kL) - 1 = 0. \quad (2.19)$$

Cette équation en fréquence est une équation transcendante qui ne peut être résolue analytiquement et qui possède une infinité de solutions. Il existe, en effet, une infinité de valeurs de  $k$  qui vérifie (2.19). Nous numérotons chacune de ces solutions de 0 à  $\infty$  par ordre croissant et on les note  $k_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . L'influence des modes sur le comportement dynamique global de la poutre diminue selon cet ordre. A chacune de ces valeurs correspond un mode propre de la poutre de pulsation propre vérifiant :

$$\omega_n^2 = \frac{EI}{\rho A} k_n^4. \quad (2.20)$$

La forme du mode propre correspondant à  $k_n$  a pour expression :

$$\begin{aligned} \Phi_n(z) = & (\cos(k_n L) - \cosh(k_n L)) (\sin(k_n z) + \sinh(k_n z)) \\ & - (\sin(k_n L) - \sinh(k_n L)) (\cos(k_n z) + \cosh(k_n z)). \end{aligned} \quad (2.21)$$

**Remarque :** (2.19) admet comme solution  $k_n = 0$  et donc  $\omega_n = 0$ . Il existe un mode de fréquence nulle dont la forme vérifie :

$$\frac{d^4 \Phi}{dz^4} = 0, \quad (2.22)$$

ou écrit autrement :

$$\Phi(z) = a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4. \quad (2.23)$$

Il existe deux différents types de solutions qui vérifient (2.23) et (2.17), soit  $\Phi_{00}(z) = a_4$  soit  $\Phi_0(z) = a_3 z + a_4$ . Ces deux modes sont généralement appelés modes rigides et ils doivent être vus comme représentant le mode de translation vertical de la poutre entière et le mode de rotation de la poutre autour de son centre de gravité. La forme de ces deux modes a donc été choisie telle que :

$$\Phi_{00}(z) = 1 \text{ et } \Phi_0(z) = x - \frac{L}{2}. \quad (2.24)$$

Nous allons maintenant montrer que ces modes propres sont orthogonaux entre eux. Chacun des modes  $\Phi_i$  vérifie (2.16) :

$$EI \frac{d^4 \Phi_i}{dz^4} = \omega_i^2 \cdot \rho A \Phi_i. \quad (2.25)$$

En multipliant cette équation par  $\Phi_j$  et en intégrant sur toute la longueur de la poutre, nous obtenons :

$$\int_0^L EI \frac{d^4 \Phi_i}{dz^4}(z) \Phi_j(z) dz = \omega_i^2 \cdot \int_0^L \rho A \Phi_i(z) \Phi_j(z) dz. \quad (2.26)$$

En intégrant par partie le premier terme de (2.26) et en utilisant les conditions aux limites (2.17), cette équation se transforme en :

$$\int_0^L \Phi_i(z) EI \frac{d^4 \Phi_j}{dz^4}(z) dz = \omega_i^2 \cdot \int_0^L \rho A \Phi_i(z) \Phi_j(z) dz. \quad (2.27)$$

Or  $\Phi_j$  vérifie :

$$EI \frac{d^4 \Phi_j}{dz^4} = \omega_j^2 \cdot \rho A \Phi_j. \quad (2.28)$$

En substituant (2.28) dans (2.27), on arrive à la relation d'orthogonalité des modes :

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \cdot \int_0^L \rho A \Phi_i(z) \Phi_j(z) dz = 0 \text{ ou } \int_0^L \rho A \Phi_i(z) \Phi_j(z) dz = 0, i \neq j. \quad (2.29)$$

Pour déterminer la réponse en régime forcé, nous supposons que celle-ci a la forme suivante (cette technique est appelée en anglais Assumed Mode Method) :

$$w(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i(z) q_i(t). \quad (2.30)$$

Ce qui revient à décomposer  $w(z, t)$  dans la base orthogonale formée par les formes des modes propres (d'où la nécessité d'avoir montré que ces modes propres sont orthogonaux entre eux). En substituant (2.30) dans l'équation en régime forcé (2.9), en la multipliant par  $\Phi_j(z)$  et en l'intégrant sur toute la longueur de la poutre, nous obtenons :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_0^L \rho A \Phi_i(z) \Phi_j(z) dz (\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t)) = F_1(t) \Phi_j(z_1) + F_2(t) \Phi_j(z_2). \quad (2.31)$$

En utilisant la relation d'orthogonalité des modes dans cette équation, on arrive à :

$$m_i \ddot{q}_i(t) + k_i q_i(t) = F_1(t) \Phi_i(z_1) + F_2(t) \Phi_i(z_2),$$

$$\text{avec } m_i = \int_0^L \rho A \Phi_i^2(z) dz \text{ et } k_i = m_i \omega_i^2. \quad (2.32)$$

**Remarque :** Si on s'intéresse aux deux modes rigides, on arrive aux deux équations suivantes :

$$m \ddot{q}_{00} = F_1 + F_2, \quad (2.33)$$

$$\frac{m L^2}{12} \ddot{q}_0 = F_1 \left( z_1 - \frac{L}{2} \right) + F_2 \left( z_2 - \frac{L}{2} \right), \quad (2.34)$$

où  $m = \rho A L$  est la masse totale de la poutre.

On retrouve ainsi les principes fondamentaux de dynamique puisque ces deux équations correspondent au théorème de la quantité de mouvement (2.33) et au théorème du moment cinétique (2.34).

Pour conclure sur la démarche de résolution, en se limitant aux  $n$  premiers modes, le comportement dynamique de la poutre en flexion présentée Figure 2.14 peut être représenté par l'ensemble d'équations différentielles du second ordre suivant :

$$\begin{pmatrix} m & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{m L^2}{12} & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & m_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_{00}(t) \\ \ddot{q}_0(t) \\ \vdots \\ \ddot{q}_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{00}(t) \\ q_0(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \Phi_0(z_1) \\ \vdots \\ \Phi_n(z_1) \end{pmatrix} F_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ \Phi_0(z_2) \\ \vdots \\ \Phi_n(z_2) \end{pmatrix} F_2. \quad (2.35)$$

### 2.3.1.5 Prise en compte des pertes

Le modèle obtenu n'inclut pas les pertes d'énergie dans les matériaux ou les pertes dues aux frottements. En effet, la démarche de résolution présentée (décomposition en modes orthogonaux) n'est correcte, mathématiquement parlant, qu'en absence totale de frottements ou en présence de frottements ayant une forme bien déterminée [Ginsberg, 2001] - [Bruël&Kjaer]. Il n'est pas possible d'identifier comment et à quel endroit les pertes agissent mais il est sûr que, une fois excitée, une structure dissipe son énergie. Ces mécanismes de dissipation sont complexes : les pertes peuvent provenir des petites déformations plastiques des matériaux, des radiations d'énergie venant des surfaces des matériaux ou encore des frottements avec l'environnement extérieur. La modélisation utilisée étant, à la base, continue, il n'est pas très judicieux de modéliser ces pertes par un ou plusieurs amortisseurs purs fixés sur un ou plusieurs points du modèle.

Au lieu d'essayer de modéliser ces pertes mécaniques, il est plus facile de représenter ces pertes individuellement comme un terme dissipatif s'ajoutant dans chaque mode. Le comportement d'un mode de vibration incluant et n'incluant pas les pertes s'écrit alors :

$$\text{Sans pertes: } m_i \ddot{q}_i(t) + k_i q_i(t) = \Phi_i(z_1) F_1 + \Phi_i(z_2) F_2, \quad (2.36)$$

$$\text{Avec pertes: } m_i \ddot{q}_i(t) + c_i \dot{q}_i(t) + k_i q_i(t) = \Phi_i(z_1) F_1 + \Phi_i(z_2) F_2, \quad c_i = 2 \zeta_i \omega_i m_i,$$

où  $\zeta_i$  représente le facteur d'amortissement modal.

Généralement les structures mécaniques que l'on étudie sont faiblement amorties et le facteur d'amortissement modal est compris entre 0,01 et 0,1. Des valeurs plus importantes correspondraient à des structures fabriquées en matériaux composites.

Il est d'ailleurs possible d'améliorer la prise en compte de ces pertes à partir de relevés expérimentaux. Cependant, le simple fait d'utiliser les ordres de grandeurs définis précédemment permet d'obtenir des modèles très proches de la réalité.

## 2.3.2 Application au modèle de comportement de l'axe Y

Cette partie a pour objectif d'appliquer la démarche de résolution présentée auparavant sur le modèle proposé Figure 2.10.

### 2.3.2.1 Mise en équation de la partie fixe

L'application du Principe Fondamental de la Dynamique sur l'ensemble fixe (Figure 2.15) permet d'obtenir l'équation (2.37) :

$$M \ddot{y}_2(t) + m_1 \left( \ddot{y}_2(t) + \frac{\partial^2 w_{21}(-l_0 + l_1, t)}{\partial t^2} \right) + \int_{-l_0}^0 \rho_{21} \left( \ddot{y}_2(t) + \frac{\partial^2 w_{21}(z, t)}{\partial t^2} \right) dz + \int_0^{l_2-l_0} \rho_{20} \left( \ddot{y}_2(t) + \frac{\partial^2 w_{20}(z, t)}{\partial t^2} \right) dz = f(t) + F_{21} + F_{22}, \quad (2.37)$$

où  $M$  représente la masse du chariot,  $m_1$  la masse du moteur  $Z$ ,  $\rho_i$  la masse linéique de l'ensemble  $i$ ,  $w_i(z, t)$  la translation due à la flexion de l'ensemble  $i$ .

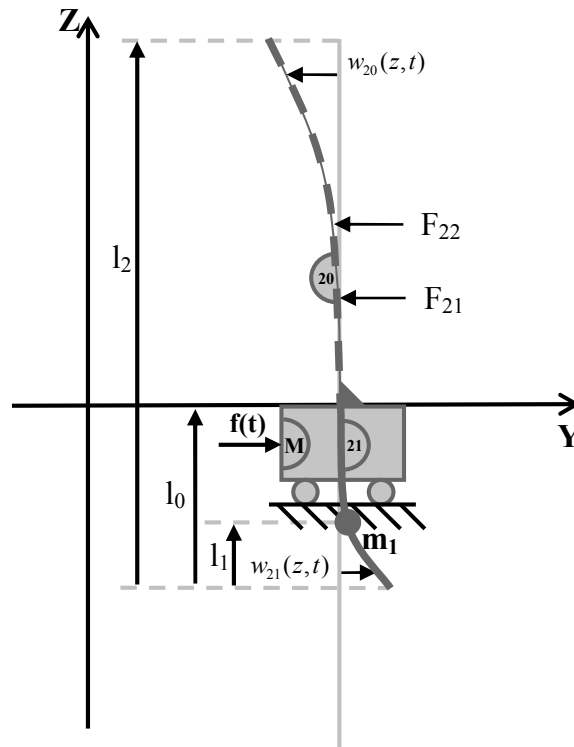


Figure 2.15 – Modélisation de la partie fixe.

Le comportement en flexion des ensembles 20 et 21 est régi par les équations suivantes (modèle d'Euler Bernoulli) :

$$EI_{20} \frac{\partial^4 w_{20}(z,t)}{\partial z^4} + \rho_{20} \left( \ddot{y}_2(t) + \frac{\partial^2 w_{20}(z,t)}{\partial t^2} \right) = \begin{matrix} F_{21} \delta(z - z_{F21}) \delta(z_{F21}) \\ + F_{22} \delta(z - z_{F22}) \delta(z_{F22}) \end{matrix}, \quad (2.38)$$

$$EI_{21} \frac{\partial^4 w_{21}(z,t)}{\partial z^4} + \bar{\rho}_{21} \left( \ddot{y}_2(t) + \frac{\partial^2 w_{21}(z,t)}{\partial t^2} \right) = \begin{matrix} F_{21} \delta(z - z_{F21}) (1 - \delta(z_{F21})) \\ + F_{22} \delta(z - z_{F22}) (1 - \delta(z_{F22})) \end{matrix}, \quad (2.39)$$

où  $E$  représente le module d'élasticité du matériau des profilés,  $I_i$  est le moment quadratique du profilé de l'ensemble  $i$  selon sa direction de flexion,  $\bar{\rho}_{21} = \rho_{21} + m_1 \delta(z - (-l_0 + l_1))$  et  $\delta$  est la fonction *Dirac*.

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\text{Sur le sous ensemble 20} \begin{cases} v_{20}(0,t) = 0 & \frac{\partial v_{20}(0,t)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial^2 v_{20}(l_2 - l_0, t)}{\partial z^2} = 0 & \frac{\partial^3 v_{20}(l_2 - l_0, t)}{\partial z^3} = 0, \end{cases} \quad (2.40)$$

$$\text{Sur le sous ensemble 21} \begin{cases} v_{21}(0,t) = 0 & \frac{\partial v_{21}(0,t)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial^2 v_{21}(-l_0, t)}{\partial z^2} = 0 & \frac{\partial^3 v_{21}(-l_0, t)}{\partial z^3} = 0. \end{cases} \quad (2.41)$$

L'analyse modale dont le développement théorique est présentée en Annexe B permet d'aboutir aux expressions (2.42) et (2.43) des déformées de chacun des ensembles.

$$\Psi_{20}(z) = B_{20}(z) \frac{C_2}{1 + D_2} \Psi_{21}(-l_0 + l_1), \quad (2.42)$$

$$\Psi_{21}(z) = \left( A_{21}(z) + B_{21}(z) \frac{C_2}{1 + D_2} \right) \Psi_{21}(-l_0 + l_1). \quad (2.43)$$

L'équation (B.21) pour  $z = -l_0 + l_1$  donne :

$$[1 + D_2 - A_{21}(-l_0 + l_1) - A_{21}(-l_0 + l_1) D_2 + B_{21}(-l_0 + l_1) C_2] \Psi_{21}(-l_0 + l_1) = 0. \quad (2.44)$$

Comme  $\Psi_1(-l_0 + l_1) = 0$  donne des déformées nulles et amène une solution triviale, l'équation en fréquence, c'est-à-dire celle qui donne la valeur des fréquences modales, a pour expression :

$$1 + D_2 - A_{21}(-l_0 + l_1) - A_{21}(-l_0 + l_1) D_2 + B_{21}(-l_0 + l_1) C_2 = 0. \quad (2.45)$$

Cette équation possède une infinité de solutions qui correspondent chacune à un mode de déformation de la partie fixe. Ces solutions sont numérotées de 1 à  $\infty$  par ordre croissant de fréquence. Dans toute la suite de ce chapitre, l'indice rajouté sur les différentes variables correspondra à la numérotation choisie précédemment.

Il est possible de montrer que l'ensemble des modes vérifient la propriété (2.46). Cette propriété d'orthogonalité a été démontrée mais n'est pas détaillée dans ce mémoire. Mathématiquement, elle permet de justifier que l'ensemble des modes de déformation forme une base orthogonale dans laquelle le comportement dynamique des ensembles 20 et 21 peut être décomposé.

$$\int_{-l_0}^0 \bar{\rho}_{21} \Psi_{21i}(z) \Phi_{21j}(z) dz + \int_0^{l_2-l_0} \rho_{20} \Psi_{20i}(z) \Phi_{20j}(z) dz = 0 \text{ pour } i \neq j. \quad (2.46)$$

Pour des raisons de simplicité, la condition (2.47) est choisie comme condition de normalisation des modes :

$$\Psi_{21}(-l_0 + l_1) = 1 + D_2. \quad (2.47)$$

L'expression des déformées des ensembles 20 et 21 s'écrit donc :

$$\Psi_{20}(z) = B_{20}(z) C_2, \quad (2.48)$$

$$\Psi_{21}(z) = A_{21}(z)(1 + D_2) + B_{21}(z) C_2. \quad (2.49)$$

La déformation globale du bras est donnée par :

$$w_{2k}(z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{2ki}(z) q_{2i}(t) \text{ pour } k = 0, 1. \quad (2.50)$$

En utilisant (2.50) dans (2.38) et (2.39), en multipliant par  $\Phi_{2ki}(z)$  et en intégrant chacune des expressions obtenues sur les ensembles 20 et 21, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \left( \ddot{q}_{2i}(t) + \omega_2^2 q_{2i}(t) \right) \left[ \int_{-l_0}^0 \bar{\rho}_{21} \Psi_{21i}(z) \Phi_{21j}(z) dz + \int_0^{l_2-l_0} \rho_{20} \Psi_{20i}(z) \Phi_{20j}(z) dz \right] \\ &= -\ddot{\alpha}_2(t) \left[ \int_{-l_0}^0 \bar{\rho}_{21} \Phi_{21j}(z) dz + \int_0^{l_2-l_0} \rho_{20} \Phi_{20j}(z) dz \right] + F_{21} \left( \Phi_{20j}(z_{F21}) \delta(z) + \Phi_{21j}(z_{F21}) \delta(-z) \right) \\ & \quad + F_{22} \left( \Phi_{20j}(z_{F22}) \delta(z) + \Phi_{21j}(z_{F22}) \delta(-z) \right). \end{aligned} \quad (2.51)$$

En utilisant la propriété d'orthogonalité des modes, l'équation précédente se simplifie et devient :

$$\begin{aligned} m_{2i} \ddot{q}_{2i}(t) + k_{2i} q_{2i}(t) &= -\ddot{\alpha}_2(t) \mu_{2i} + F_{21} \left( \Phi_{20i}(z_{F21}) \delta(z) + \Phi_{21i}(z_{F21}) \delta(-z) \right) \\ & \quad + F_{22} \left( \Phi_{20i}(z_{F22}) \delta(z) + \Phi_{21i}(z_{F22}) \delta(-z) \right), \\ \text{avec } m_{2i} &= \int_{-l_0}^0 \bar{\rho}_{21} \Psi_{21i}(z) \Phi_{21i}(z) dz + \int_0^{l_2-l_0} \rho_{20} \Psi_{20i}(z) \Phi_{20i}(z) dz, \quad k_{2i} = m_{2i} \omega_2^2 \text{ et } \mu_{2i} = \int_{-l_0}^0 \bar{\rho}_{21} \Phi_{21i}(z) dz \\ & \quad + \int_0^{l_2-l_0} \rho_{20} \Phi_{20i}(z) dz. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Grâce à (2.52), il est possible de connaître l'évolution de chacun des modes de déformation. Cependant ce système d'équation ne peut être résolu. Il est en effet impossible de prendre en compte une infinité de modes. Nous devons donc nous limiter à l'évolution d'un nombre fini de modes, ce nombre sera noté  $n$  dans toute la suite de l'étude. La dynamique de la partie fixe étant régie par les équations (B.1) et (2.52), la limitation aux  $n$  premiers modes permet d'obtenir le modèle de  $n+1$  équations différentielles du second ordre suivant :

$$\begin{pmatrix} M_{t2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & m_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\alpha}_2(t) \\ \ddot{q}_{21}(t) \\ \vdots \\ \ddot{q}_{2n}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2(t) \\ q_{21}(t) \\ \vdots \\ q_{2n}(t) \end{pmatrix} = \\
 \begin{pmatrix} M_{t2} \\ \mu_{21} \\ \vdots \\ \mu_{2n} \end{pmatrix} \frac{\sum f_{EXT}}{M_{t2}} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi_{20\,1}(z_{F_{21}})\delta(z) + \Phi_{21\,1}(z_{F_{21}})\delta(-z) \\ \vdots \\ \Phi_{20\,n}(z_{F_{21}})\delta(z) + \Phi_{21\,n}(z_{F_{21}})\delta(-z) \end{pmatrix} F_{21} \\
 + \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi_{20\,1}(z_{F_{22}})\delta(z) + \Phi_{21\,1}(z_{F_{22}})\delta(-z) \\ \vdots \\ \Phi_{20\,n}(z_{F_{22}})\delta(z) + \Phi_{21\,n}(z_{F_{22}})\delta(-z) \end{pmatrix} F_{22}. \quad (2.53)$$

### 2.3.2.2 Mise en équation de la partie mobile

La modélisation de la partie mobile est semblable à celle de la partie fixe (Figure 2.16), le chariot  $M$  étant simplement remplacé par la charge  $m_4$ . La démarche de résolution est identique et, comme précédemment, nous commençons par écrire le Principe Fondamental de la Dynamique sur toute la partie mobile :

$$m_4 \ddot{y}_3(t) + \int_0^{l_3} \rho_3 \left( \ddot{y}_3(t) + \frac{\partial^2 w_3(z,t)}{\partial t^2} \right) dz = F_{31} + F_{32}, \quad (2.54)$$

où  $m_4$  représente la masse de la charge transportée,  $\rho_3$  la masse linéique de l'ensemble 3,  $w_3(z,t)$  la translation due à la flexion de l'ensemble 3.

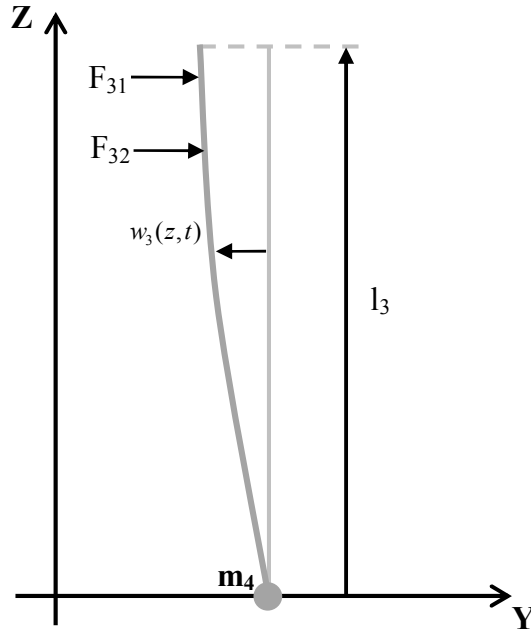


Figure 2.16 – Modélisation de la partie mobile.

On considère aussi que le comportement en flexion de l'ensemble 3 est régi par l'équation (2.55) (modèle d'Euler-Bernoulli) :

$$EI_3 \frac{\partial^4 w_3(z,t)}{\partial z^4} + \rho_3 \left( \ddot{y}_3(t) + \frac{\partial^2 w_3(z,t)}{\partial t^2} \right) = F_{31} \delta(z - z_{F31}) + F_{32} \delta(z - z_{F32}), \quad (2.55)$$

où  $E$  représente le module d'élasticité du matériau des profilés,  $I_3$  est le moment quadratique du profilé de l'ensemble 3 selon sa direction de flexion et  $\delta$  est la fonction *Dirac*.

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\text{Sur } 3 \begin{cases} w_3(0,t) = 0 & w_3'(0,t) = 0 \\ w_3''(l_3,t) = 0 & w_3^{(3)}(l_3,t) = 0 \end{cases} \quad (2.56)$$

La méthode de résolution précédente a été utilisée, le comportement vibratoire de la partie mobile est maintenant décrit par l'ensemble des  $n+1$  équations différentielles du second ordre :

$$\begin{pmatrix} M_{t3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{31} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & m_{3n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\alpha}_3(t) \\ \ddot{q}_{31}(t) \\ \vdots \\ \ddot{q}_{3n}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{31} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_{3n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3(t) \\ q_{31}(t) \\ \vdots \\ q_{3n}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{t3} \\ \mu_{31} \\ \vdots \\ \mu_{3n} \end{pmatrix} \frac{\sum F_{ext}}{M_{t3}} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi_{31}(z_{F31}) \\ \vdots \\ \Phi_{3n}(z_{F31}) \end{pmatrix} F_{31} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi_{31}(z_{F32}) \\ \vdots \\ \Phi_{3n}(z_{F32}) \end{pmatrix} F_{32}, \quad (2.57)$$

$$\text{avec } m_{3i} = \int_0^{l_3} \rho_3 \Psi_{3i}(z) \Phi_{3i}(z) dz, k_{3i} = m_{3i} \omega_3^2 \text{ et } \mu_{3i} = \int_0^{l_3} \rho_3 \Phi_{3i}(z) dz.$$

### 2.3.3 Assemblage des deux modèles

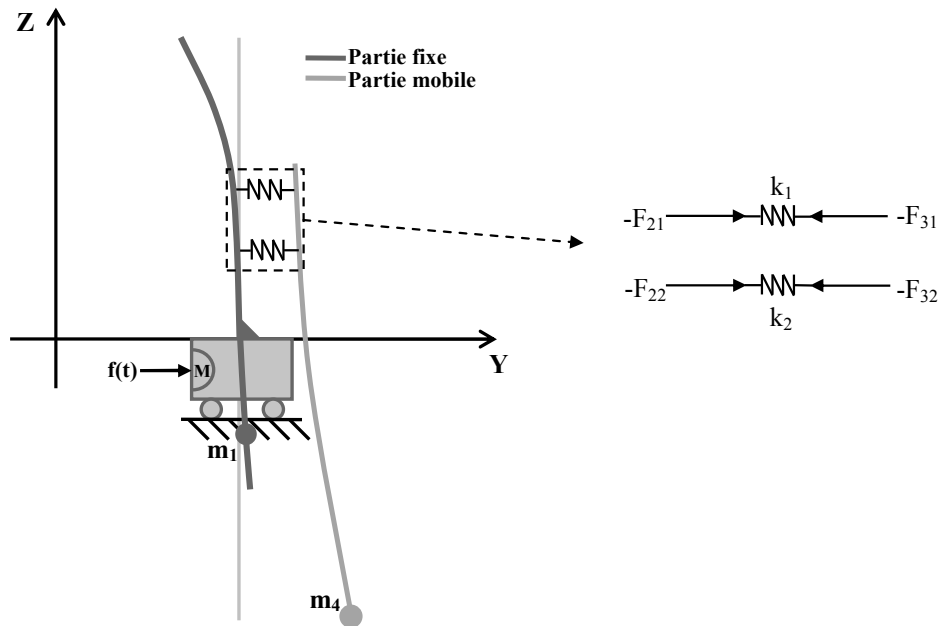


Figure 2.17 – Assemblage des deux modèles.

L'assemblage des deux modèles consiste à intégrer la modélisation du module de guidage dans le système. Le module de guidage qui relie la partie mobile à la partie fixe est modélisé par deux ressorts

de raideurs  $k_1$  et  $k_2$  (Figure 2.17). Ces deux raideurs sont analogues à la modélisation des liaisons dans le modèle éléments-finis (Figure 2.2.c), elles représentent la souplesse de la liaison entre les parties fixe et mobile.

Cette modélisation permet de faire un lien entre la déformation des poutres d'une part et les efforts transmis entre les parties fixe et mobile d'autre part :

$$\begin{aligned} F_{22}(t) &= -F_{32}(t) = k_1 (y_3(z_{F_{32}}, t) - y_2(z_{F_{22}}, t)), \\ F_{21}(t) &= -F_{31}(t) = k_2 (y_3(z_{F_{31}}, t) - y_2(z_{F_{21}}, t)), \end{aligned} \quad (2.58)$$

où  $y_2(z, t)$  et  $y_3(z, t)$  représente respectivement le déplacement global à la hauteur  $z$  de la partie fixe et le déplacement global à la hauteur  $z$  de la partie mobile.

Les valeurs des déplacements à chaque point d'attache des ressorts sont obtenues à partir des relations suivantes :

$$y_2(z_{F_{21}}, t) = \alpha_2 + \sum_{i=1}^n (\Psi_{20j}(z_{F_{21}}) \delta(z) + \Psi_{21j}(z_{F_{21}}) \delta(-z)) q_{2j}(t), \quad (2.59)$$

$$y_2(z_{F_{22}}, t) = \alpha_2 + \sum_{i=1}^n (\Psi_{20j}(z_{F_{22}}) \delta(z) + \Psi_{21j}(z_{F_{22}}) \delta(-z)) q_{2j}(t), \quad (2.60)$$

$$y_3(z_{F_{31}}, t) = \alpha_3 + \sum_{i=1}^n \Psi_{3j}(z_{F_{31}}) q_{3j}(t), \quad (2.61)$$

$$y_3(z_{F_{32}}, t) = \alpha_3 + \sum_{i=1}^n \Psi_{3j}(z_{F_{32}}) q_{3j}(t). \quad (2.62)$$

Le modèle dynamique du comportement du robot selon la direction Y est donc représenté par les équations (2.59) à (2.62) couplées aux équations (2.53) et (2.57).

La comparaison des réponses fréquentielles obtenues expérimentalement et à partir de la modélisation continue est présentée Figure 2.18. Elle compare les transferts entre l'accélération de la charge et l'effort  $f$  dans les deux cas. On remarque qu'il y a bien concordance entre les fréquences des premiers modes propres, la différence d'amplitude se justifie par l'absence de frottement dans le modèle continu. Une amélioration dans la modélisation peut donc être apportée en ajoutant artificiellement un coefficient d'amortissement comme expliqué au 2.3.1.5.

Il est important de constater que les modes supplémentaires du modèle continu ne correspondent pas à des modes du système réel. En effet, le modèle continu permet de représenter uniquement le premier mode de déformation de l'axe Y (correspondant à un mode flexion), les modes supplémentaires ne sont donc pas à prendre en compte. La discrétisation du modèle continu effectuée par la suite permet sa réduction à son premier mode de déformation seul.

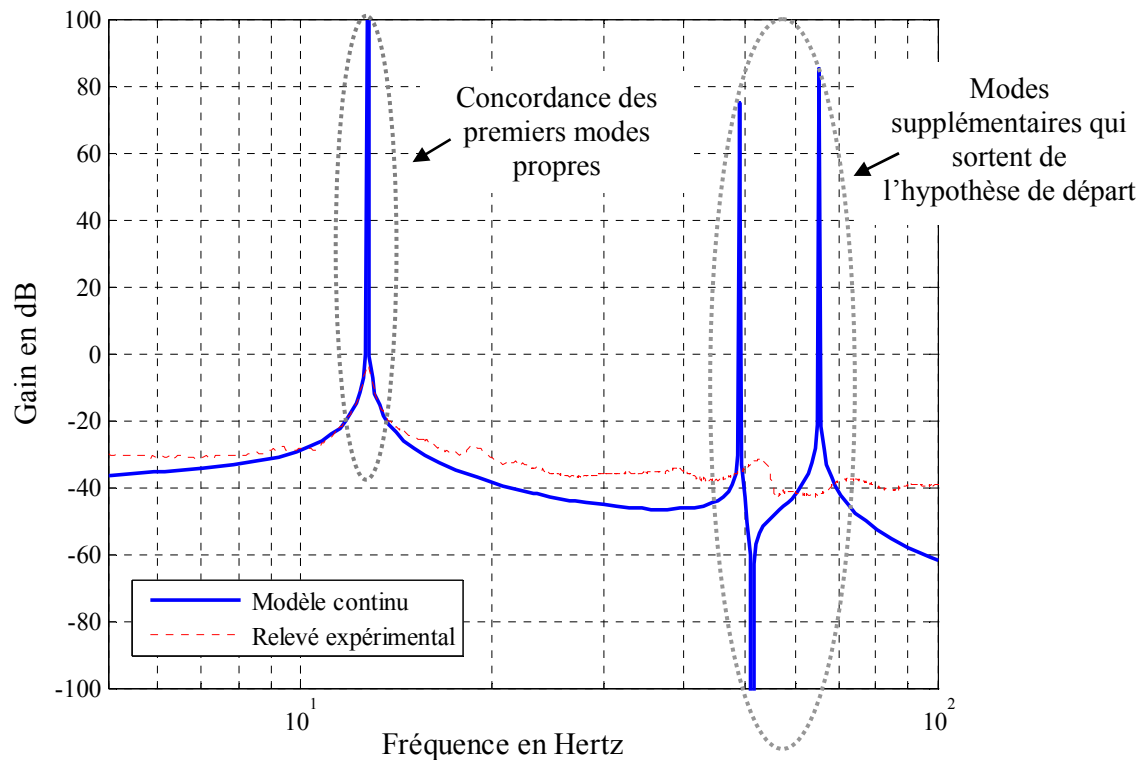


Figure 2.18 – Comparaison des réponses fréquentielles obtenues expérimentalement et à partir de la modélisation continue.

### 2.3.3.1 Evolution de la fréquence du mode dominant de l'axe Y

L'évolution de la fréquence du mode de déformation principal de l'axe Y en fonction de la position du bras Z mobile obtenue à partir de méthodes d'analyse (analyse éléments-finis, formulation continue) ou de méthodes expérimentales (analyse modale) est représentée Figure 2.19. Cette évolution permet d'avoir une bonne idée sur la qualité des modèles obtenus. Il est à noter que les résultats provenant de l'analyse modale expérimentale servent de référence dans ce comparatif et que la variation de 11 à 15 Hz est importante.

L'analyse par formulation continue se montre très précise (moins de 20% d'erreurs par rapport aux relevés expérimentaux), la précision obtenue peut être considérée suffisante, comme nous le verrons par la suite, pour la génération de trajectoire ou dans la conception de structures de commande. La figure 2.19 prouve aussi que cette formulation peut se montrer plus précise qu'une analyse par éléments-finis.

On notera le gros écart entre les relevés expérimentaux et les résultats issus de l'analyse éléments-finis, cette différence provient essentiellement de la difficulté de modélisation des liaisons entre chacun des sous-ensembles (poutre X, Cadre Y, etc.). Cette modélisation aurait pu être affinée pour se rapprocher des résultats expérimentaux. Cependant cette étape supplémentaire n'a pas été nécessaire puisque, dans cette étude, seul la forme des modes de déformation principaux nous intéressait, la précision du modèle éléments-finis est donc suffisante pour être utilisée dans notre démarche.

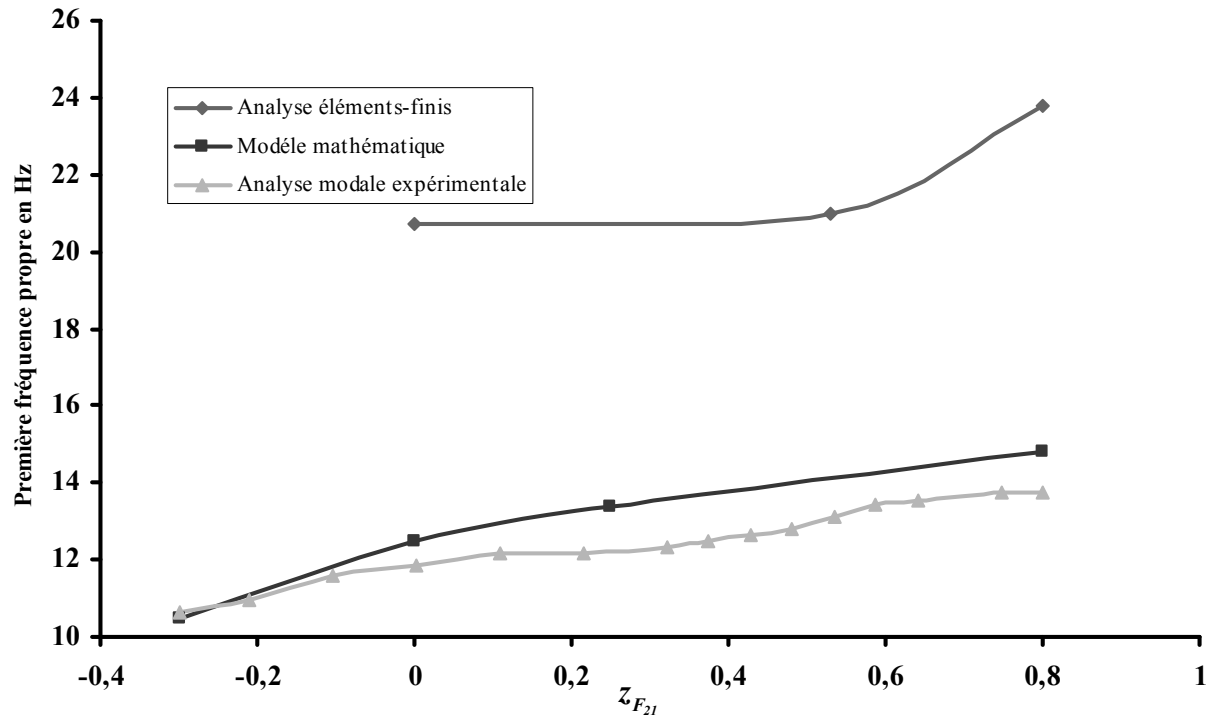


Figure 2.19 – Evolution de la fréquence du principal mode de déformation de l'axe Y obtenu par différentes méthodes d'analyse pour le robot cartésien modélisé.

L'avantage d'utiliser une formulation continue comme celle introduite dans cette partie est de rester générique, la même démarche peut être utilisée sur d'autres axes linéaires. De plus, ce modèle est basé sur des paramètres physiques et mécaniques (moment d'inertie, masses transportées, etc.). Il permet ainsi aux projeteurs du bureau d'études mécanique de choisir les matériaux et caractéristiques des profilés de manière à déterminer les paramètres essentiels, c'est-à-dire les fréquences propres du robot.

## 2.4 Modèles à paramètres localisés

Cette partie présente la discrétisation du modèle continu afin d'en déduire différents modèles de commande. Le formalisme basé sur le Graphe Informationnel Causal a été choisi pour représenter chacun de ces modèles.

### 2.4.1 Graphe Informationnel Causal (GIC)

Le graphe informationnel causal [Hautier et Barre, 2004] est une méthode systématique et simple d'accès pour la description des systèmes en vue de l'élaboration de leur commande. Ce formalisme permet de respecter la causalité propre à tout système. Par exemple, l'axe d'une machine se déplace d'une origine à un point donné parce que son actionneur est alimenté en tension. Cette première observation induit l'orientation de la transformation énergétique et il apparaît que la grandeur de commande  $u$  de l'actionneur, caractérisée, par exemple, en amplitude et en durée, est porteuse d'une information à l'égard de la position du chariot. Ce discours illustre l'analyse ainsi établie qui peut être représentée par le Graphe Informationnel Causal de la figure 2.20 ; ce dernier exprime que la position  $y$  est la grandeur de sortie influencée par la grandeur d'entrée influente  $u$ .



Figure 2.20 – Graphe Informationnel Causal (GIC).

Les processeurs sont des éléments graphiques distincts, attachés à un objet ou à un groupe d'objets localisés au sein du processus étudié. Comme nous avons pu l'observer ci-dessus, ils constituent le support d'une relation de transformation entre une ou plusieurs grandeurs influentes et une grandeur influencée. Cette relation est induite par le principe de la causalité naturelle régissant le fonctionnement énergétique de tout objet ou groupe d'objets. Pratiquement, la sortie du processeur ne dépend donc que des valeurs présentes et passées de ses entrées. Une telle formulation revient à exprimer la causalité sous forme intégrale et il existe en électricité et en mécanique des exemples significatifs :

- le flux dans une bobine idéale est la fonction intégrale de la tension appliquée ; par analogie le moment cinétique d'une masse indéformable est la fonction intégrale des efforts appliqués,
- la quantité d'électricité dans un condensateur idéal est l'intégrale du courant qui le traverse ; par analogie, la position des extrémités d'un ressort sans masse est l'intégrale de l'écart des vitesses aux extrémités (loi de Hooke).

Dans le cas général, l'expression des relations de transformation au moyen des équations d'état est le meilleur garant contre le contresens physique. Toutefois, pour simplifier la présentation, nous ne retiendrons que deux définitions complémentaires à la causalité intégrale :

- si un objet accumule de l'information, la causalité est interne : la sortie est nécessairement une fonction de l'état énergétique. La relation alors orientée est dite causale. Le temps et l'état initial sont des entrées implicites,
- si un objet n'accumule pas d'information, la causalité est externe : la sortie est fonction instantanée de l'entrée. La relation qui n'est pas orientée est alors dite rigide.

La figure 2.21 donne le symbolisme retenu pour différencier les deux natures de processeurs. Un grand nombre de processus électromécaniques peuvent s'envisager sous la forme d'assemblages d'objets localisés et identifiés : les sources, les éléments passifs accumulateurs d'énergie, les éléments dissipateurs (résistance et frottements), les éléments de couplage divers (convertisseur électromécanique, transformateur, réducteur,...).

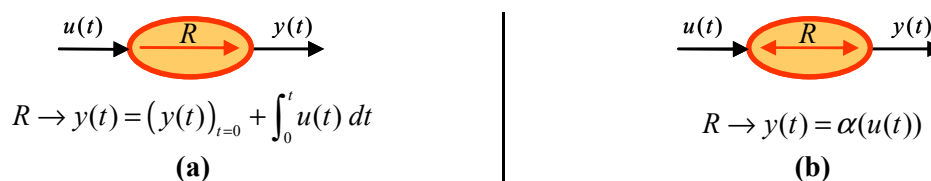


Figure 2.21 – Symbolisme GIC.

(a) relation causale – (b) relation rigide.

## 2.4.2 Discrétisation du modèle continu

Les résultats des différentes analyses modales expérimentales effectuées sur le robot cartésien ont montré que l'axe Y du robot est principalement soumis à un mode de flexion. Il est donc nécessaire de réduire le modèle continu précédent pour ne tenir compte que de son premier mode propre. En effet, contrairement à la modélisation par éléments-finis qui permet de prendre en compte tous les types de déformations possibles (flexion, torsion, ...), la modélisation présentée auparavant ne peut représenter que la dynamique du deuxième mode issue de l'analyse modale éléments-finis (les modes supplémentaires de l'axe Y du robot ne correspondent pas nécessairement à des modes de flexion). Par exemple, dans le cas de l'axe considéré ici, le premier mode de déformation selon Y correspond au

deuxième mode de déformation du modèle éléments-finis. Les autres modes de déformation issus de l'analyse du modèle éléments-finis n'apparaissent donc pas dans notre modèle continu.

**Remarque :** Le modèle de comportement proposé étant dépendant de la position des axes du robot cartésien, on note  $q$  cette position pour toute la suite. Dans le cas de la modélisation de l'axe Y, seule la position du bras Z mobile influence le comportement du robot,  $q$  correspond donc à celle-ci. Cependant, pour permettre la généralisation aux autres axes dont le comportement ne dépend pas obligatoirement de la position du bras Z mobile,  $q$  sera défini comme la position selon les coordonnées X, Y et Z des axes du robot.

La réduction du modèle continu à son premier mode présenté en Annexe C fait apparaître un zéro instable sur la fonction de transfert entre la position de la masse  $m_4$  et l'effort appliqué sur le chariot  $f$  (Figure 2.22). Cette caractéristique se traduit physiquement par le fait que le bout du bras commence son mouvement dans le sens inverse au mouvement global (effet « canne à pêche ») [Colas, Barre et coll., 2006]. Le modèle à paramètres localisés présenté Figure 2.22 permet de discrétiser le modèle continu en tenant compte de ce phénomène. Il est composé d'une masse  $m_1$  sur laquelle s'exerce un effort d'entrée  $f(t)$  et d'une masse  $m_2$  ayant un moment d'inertie  $I_2$ . Les positions des masses  $m_1$  et  $m_2$  correspondent respectivement à la position du chariot  $M$  et à la position de l'extrémité du bras et sont reliées par une liaison pivot et une raideur de torsion  $k_T$ . Il est important de noter que, comme le modèle continu dépend de la position du bras Z, les masses  $m_1$ ,  $m_2$ , le moment d'inertie  $I_2$  et la raideur de torsion  $k_T$  dépendent de la position du robot notée  $q$ . De plus, lors d'un déplacement, la masse totale en mouvement  $m_T$  reste constante,  $m_1$  et  $m_2$  vérifient donc :

$$m_1(q) + m_2(q) = m_T. \quad (2.63)$$

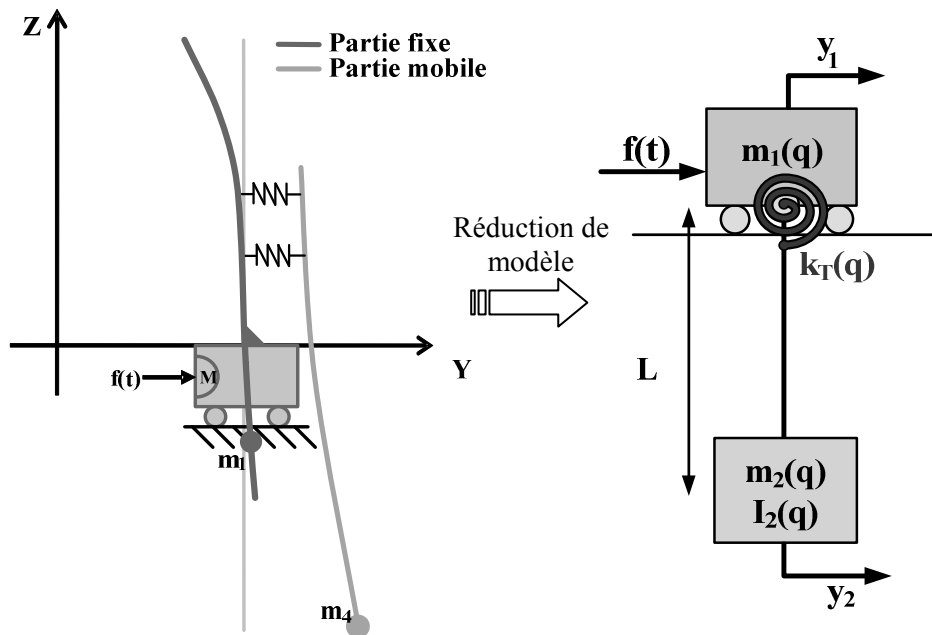


Figure 2.22 – Modèle souple à non-minimum de phase.

Dans toute la suite de cette étude, les modèles discrétisés présentés dans cette partie étant une représentation du comportement du mode de déformation dominant, on parlera de masses modales pour  $m_1$  et  $m_2$ , d'inertie modale pour  $I_2$  et de raideur modale pour  $k_T$ . La figure 2.23 décrit le modèle GIC équivalent à ce modèle souple. Ce GIC fait apparaître deux efforts  $F_k$  (provenant de la raideur de transmission) et  $F_\theta$  (provenant de l'inertie  $I_2$ ) qui perturbe la position de la masse  $m_1$  correspondant physiquement à la position mesurée au niveau du moteur.

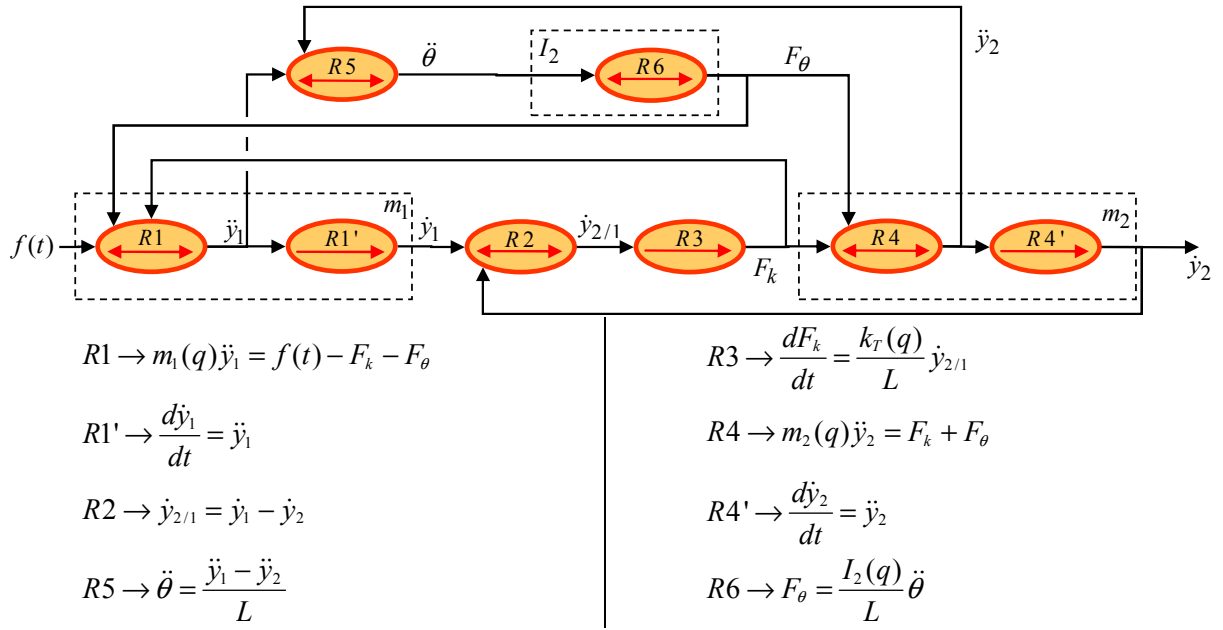


Figure 2.23 – Modèle GIC du modèle souple à non-minimum de phase.

Sur des structures comme celle du robot cartésien étudié, l'effet du zéro instable sur le comportement du bout du bras est minime ( $I_2$  est très faible) [Colas, Barre et coll., 2006]. Le modèle proposé Figure 2.22 se simplifie et la dynamique d'un système soumis à l'influence d'un mode de transmission peut alors se représenter par un couplage souple de deux masses ponctuelles. Ce système présenté à la figure 2.24 est composé d'une masse  $m_1$  et d'une masse  $m_2$ . Les deux masses sont couplées par une raideur de transmission  $k$  représentant la raideur du mode de flexion considéré. Ce modèle est équivalent au précédent lorsque le moment d'inertie  $I_2$  est nul, les masses  $m_1$ ,  $m_2$  et la raideur  $k$  dépendent donc de  $q$  et la relation  $m_1(q) + m_2(q) = m_T$  reste valable.

La figure 2.25 décrit le modèle GIC équivalent à ce modèle souple. Il est important de noter que la simplification du GIC Figure 2.23 en supprimant  $R5$  et  $R6$  amène directement au GIC Figure 2.25. L'effet du zéro instable est alors totalement occulté par cette modélisation, le seul effort perturbateur agissant  $m_1$  est l'effort  $F_k$  provenant de la raideur de transmission. La fréquence propre  $f_n$  à une position fixée est donnée par :

$$f_n(q) = \frac{\omega_n(q)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k(q)m_T}{m_1(q)m_2(q)}} \quad (2.64)$$

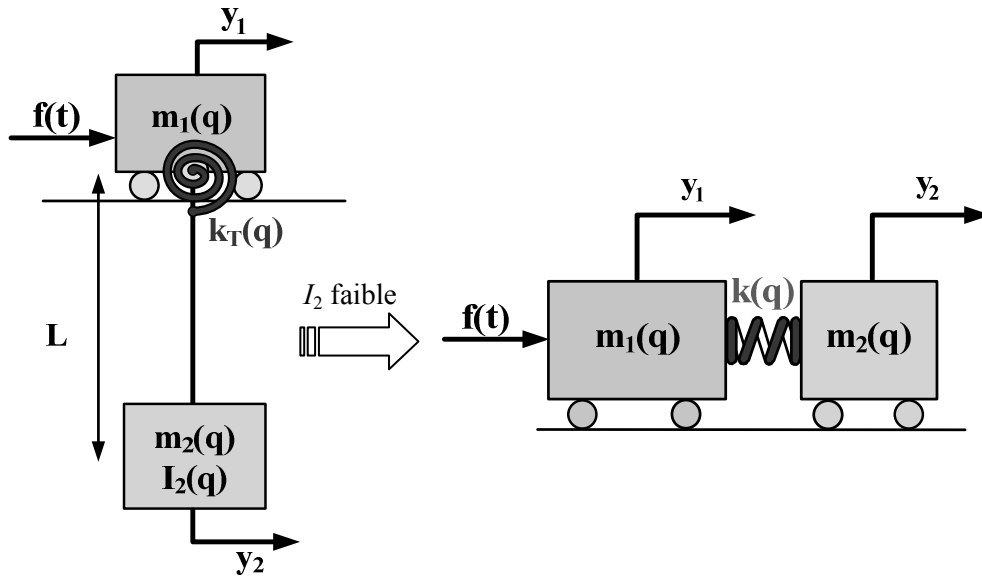


Figure 2.24 – Modèle souple classique.

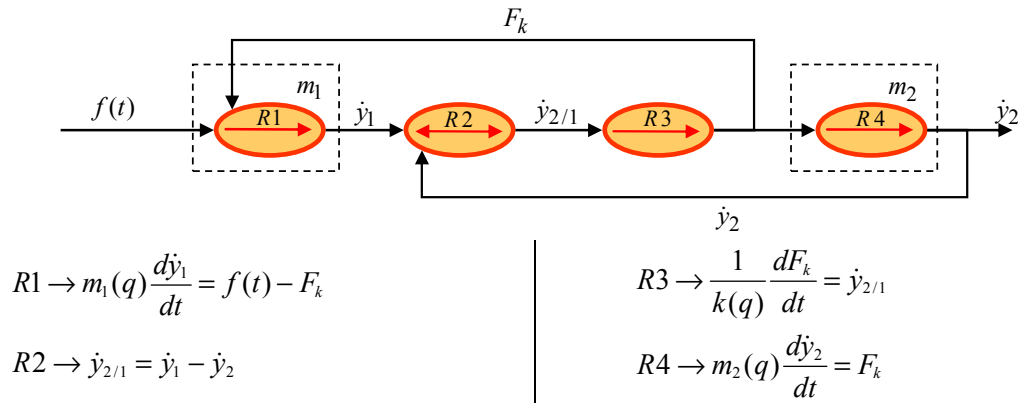


Figure 2.25 – Modèle GIC du modèle souple classique.

Lorsque les flexibilités structurales sont considérées négligeables par rapport au déplacement global de l'axe, le modèle rigide présenté Figure 2.26 peut être utilisé. Dans la deuxième partie, il sera aussi montré, de manière expérimentale, qu'une commande basée sur un modèle plus simple (rigide) mais pour lequel les incertitudes paramétriques sont plus réduites peut, dans certains cas, s'avérer plus performante. Le modèle rigide se résume à la masse  $m_T$  qui représente toute la masse en mouvement et sur laquelle s'exerce un effort d'entrée  $f$ :

$$m_T = m_1(q) + m_2(q) \quad (2.65)$$

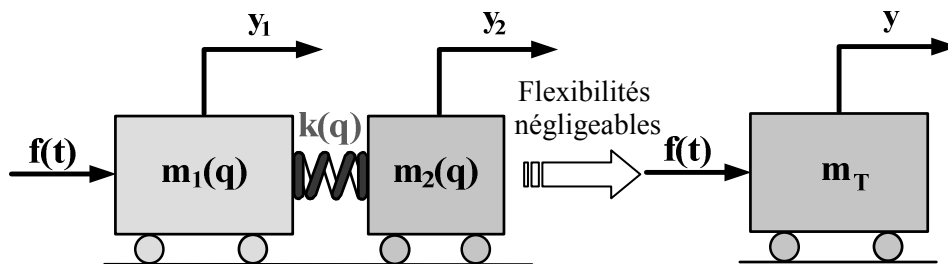


Figure 2.26 – Modèle rigide.

Durant un déplacement, la masse en mouvement ne change pas,  $m_T$  ne dépend pas de la position  $q$  et peut être considérée comme constante. La figure 2.27 décrit le modèle GIC équivalent à ce modèle rigide.

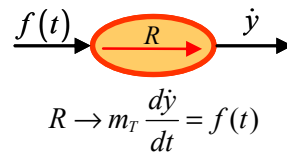


Figure 2.27 – Modèle GIC du modèle rigide.

### 2.4.3 Prise en compte des frottements

Les frottements n'ont, pour l'instant, jamais été pris en compte puisqu'ils sont généralement très complexes à intégrer dans une modélisation éléments-finis. Cependant, les frottements et les pertes dans les matériaux peuvent être artificiellement ajoutés aux modèles de commande précédents. En supposant que tous les frottements sont visqueux, les modifications à apporter aux éléments masses et ressorts sont représentées Figure 2.28.

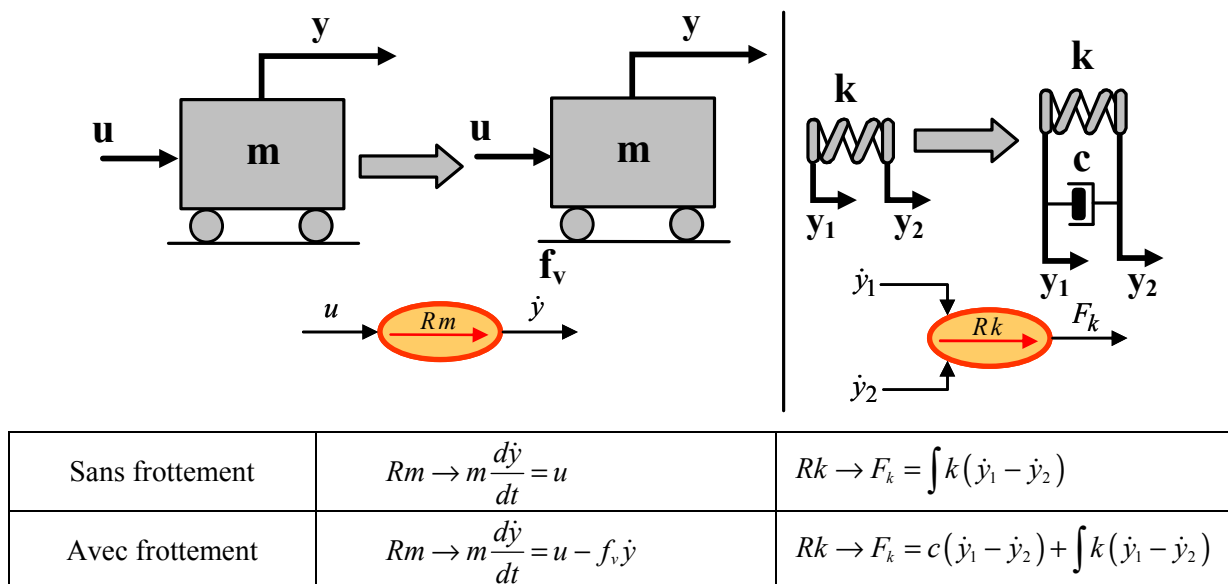


Figure 2.28 – Prise en compte des frottements dans les modèles de commande.

## 2.5 Bilan sur la modélisation physique générique d'un axe souple

La méthodologie de modélisation retenue consiste, tout d'abord à développer un modèle de connaissance (modèle éléments-finis) représentant les phénomènes observés sur le robot, ce modèle étant validé par des expérimentations. Cette partie doit être bien assimilée avant toute étape ultérieure de modélisation. Ensuite, il a été bâti un modèle de comportement (modèle continu) générique composé d'un assemblage de poutres, et basé sur la théorie d'Euler-Bernoulli. Ce modèle permet de modéliser le mode de déformation dominant du robot, de manière simple et générique, en utilisant les caractéristiques physiques du robot. On peut ainsi évaluer a priori, avec une précision au plus de 20 à 30 %, les caractéristiques fondamentales du robot.

Pour la synthèse de commande, on utilise un modèle à paramètres localisés, et donc localement linéaire, dont les paramètres sont obtenus par réduction du modèle de comportement précédent. Trois types de modèle à paramètres localisés ont été obtenus. Dans le cas des axes souples qui nous intéressent (robots cartésiens), seuls deux types sont à retenir pour une synthèse de commande : le modèle souple classique présenté Figure 2.24 et le modèle rigide présenté Figure 2.26.

Ce travail de modélisation d'un axe souple a fait l'objet de travaux nombreux et variés. Un logiciel se présentant sous la forme d'une simple feuille Excel a été développé. Il intègre la partie modélisation continue et est utilisable en bureau d'étude en tant qu'outil d'optimisation de structure. Ce travail a aussi fait l'objet de publications en congrès [Colas, Barre et coll., 2006] – [Colas, Dieulot et coll., 2005] et en revue internationale [Colas, Dieulot et coll., 2005].

---



## Chapitre 3

# Commande d'un axe souple

Dans notre démarche déterministe, nous tenterons dans le chapitre 3 d'utiliser les modèles obtenus auparavant pour en déduire différentes stratégies de commande. Pour cela, les méthodologies de conception basées sur des principes d'inversion de modèle sont bien adaptées à nos modèles de commande.

Parmi celles-ci on peut citer la notion de platitude introduite par Fliess, Lévine, Martin et Rouchon [Fliess, Lévine et coll., 1995]. Cette notion a récemment remis en cause une partie notable de l'automatique théorique et pratique, comme la supériorité absolue accordée à la représentation d'état et aux boucles de rétroaction. En effet, Ce type de commande pose les fondements d'une architecture de commande d'un axe de machine. Elle possède deux leviers :

1. une partie boucle ouverte composée d'une génération de lois de mouvement et d'une précommande qui s'assure de l'obtention d'une trajectoire désirée,
2. une partie boucle fermée composée d'un asservissement qui rejette toutes perturbations exogènes et robustifie le système.

Ce chapitre est axé sur l'étude de la commande d'un axe souple. Après avoir élaboré, à partir de principes d'inversion, une architecture de commande générique d'un axe de machine dans laquelle apparaissent les termes introduits précédemment, nous étudions dans un premier temps les aspects loi de mouvement et précommande. La partie suivante est consacrée à la partie asservissement.

### 3.1 Elaboration d'une architecture de commande en utilisant le principe d'inversion

Commander un processus, c'est contrôler les énergies accumulées par celui-ci. Cela revient aussi à imposer la trajectoire de l'une des composantes de la puissance transmise en utilisant une autre composante de réglage. Par exemple, la maîtrise de la vitesse d'un mobile s'obtient par des actions modulées de l'effort qui lui est appliqué. Ce concept se généralise : « *Puisque l'on connaît l'effet de la cause, il suffit de créer la bonne cause pour avoir le bon effet* », on parle alors d'inversion causale [Barre, 2004]. On retrouve également ce principe sous l'appellation commande dynamique dans [Khalil, Liegeois et coll., 1979] [Dombre et Khalil, 1999].

### 3.1.1 Principe d'inversion directe

L'inversion de la relation associée à un processeur détermine une relation de commande elle-même associée à un autre processeur. Dans le cas général, l'assemblage de plusieurs objets formant un processus monovarié (une entrée de réglage) conduit à une relation  $f$  telle que :

$$y(t) = f(u, t), \quad (3.1)$$

où  $f$  est représentée dans le cas linéaire par une équation différentielle d'ordre  $n$  correspondant à la forme compagne de la modélisation du modèle d'état,

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = u(t). \quad (3.2)$$

En posant  $v_{i+1}(t) = \frac{d^{i+1} y(t)}{dt^{i+1}}$ , il vient  $\frac{d^i y(t)}{dt^i} = \left( \frac{d^i y(t)}{dt^i} \right)_{t=0} + \int_0^t v_{i+1}(t) dt$ . En désignant  $y_{ref}$  la trajectoire souhaitée pour  $y$ , on détermine une grandeur de réglage du processus  $u_{reg}$  :

$$u_{REG}(t) = g(y_{REF}, t), \text{ Si } g = f^{-1} \text{ et } u = u_{REG} \text{ alors } y(t) \rightarrow y_{REF}(t). \quad (3.3)$$

Il apparaît donc que la fonction  $f$  doit être inversible (système stable en boucle ouverte), ce qui signifie que  $y_{ref}$  doit être préalablement connue et continûment dérivable jusqu'à l'ordre  $n$  telle que :

$$u_{reg}(t) = \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y_{ref}(t)}{dt^i}. \quad (3.4)$$

En posant  $v_{i+1,ref}(t) = \frac{d^{i+1} y_{ref}(t)}{dt^{i+1}}$ , il vient  $\frac{d^i y_{ref}(t)}{dt^i} = \left( \frac{d^i y_{ref}(t)}{dt^i} \right)_{t=0} + \int_0^t v_{i+1,ref}(t) dt$ .

Dans le cas général ( $n \neq 0$ ), on aboutit à la figure 3.1 qui met en évidence plusieurs exigences :

- la trajectoire  $y_{ref}$  doit être prédéfinie telle que la dérivée  $n^{ième}$  puisse exister,
- les conditions initiales doivent être connues.

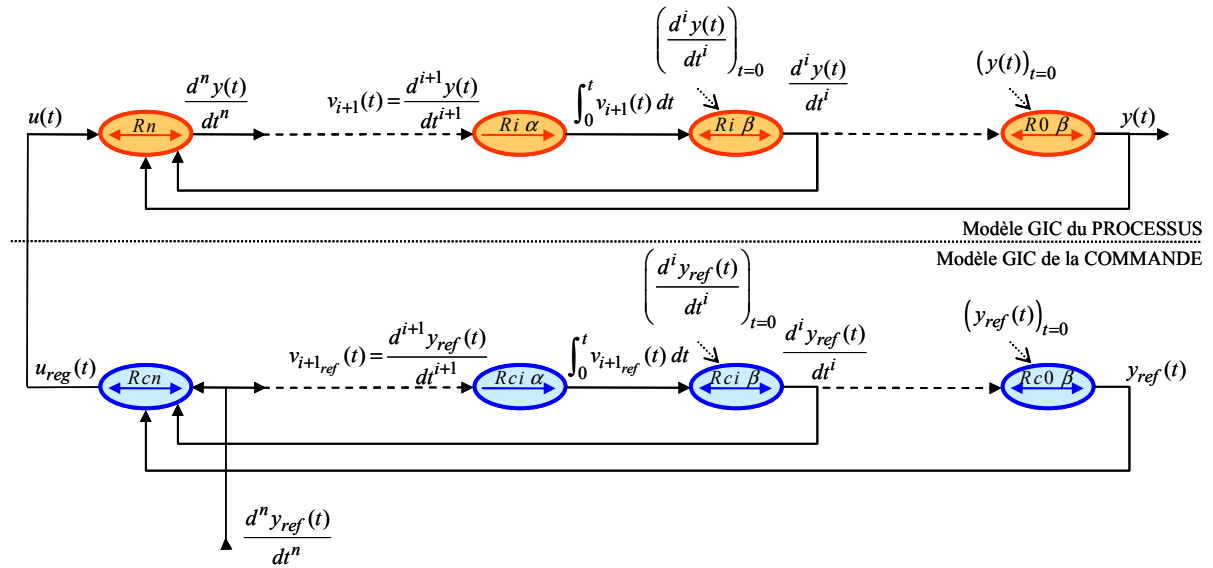


Figure 3.1 – Principe général d'inversion directe : commande directe à modèle.

Sur la figure 3.1, le modèle du processus résulte de l'interprétation graphique de l'expression (3.2). Elle montre que si  $y$  représente la grandeur à maîtriser, il faut disposer à tout instant de toutes ses

dérivées jusqu'à l'ordre  $n$ . Cela nécessite donc une étude de la trajectoire afin de respecter les conditions de dérivation exigées. L'intérêt de cette démarche est de pouvoir maîtriser tous les états du système et donc de ne réaliser que des trajectoires de  $y$  énergétiquement réalisables.

Dans le cas particulier où  $n$  est nul, il existe une relation instantanée entre l'entrée et la sortie, la solution est plus facilement applicable. On détermine alors une loi de commande par inversion directe. La figure 3.2 illustre ce principe qui conduit à déterminer la grandeur de réglage  $u_{reg}$  à partir de la trajectoire de référence  $y_{ref}$  souhaitée pour  $y$ . Il vient :

$$\begin{aligned} R \rightarrow y(t) = f(u, t), \quad Rc \rightarrow u_{reg}(t) = g(y_{ref}, t), \\ \text{Si } g = f^{-1} \text{ et } u = u_{reg} \text{ alors } y(t) \rightarrow y_{ref}(t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

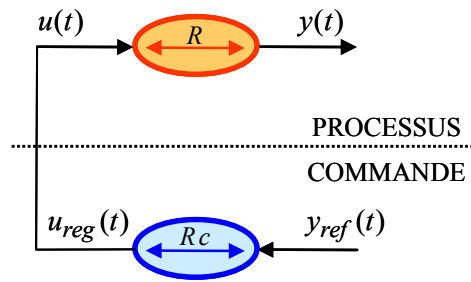


Figure 3.2 – Principe d'inversion directe ( $n = 0$ ).

Ce principe est applicable à toute relation bijective donc rigide (dissipateurs, opérateurs neutres). Il trouvera ses limites en cas de non linéarités irréversibles comme la saturation.

Se pose alors les questions concernant :

- l'écart entre la dimension et les paramètres du modèle, et donc par inversion entre ceux de la commande et ceux du processus réel,
- le comportement en régulation (rejet de perturbations),
- l'élaboration de la référence pour maîtriser tout ou partie des grandeurs d'état avec une connaissance a priori du système et du procédé pour lequel le processus est commandé,
- l'élaboration de la référence correspondant à la dérivée  $n^{ième}$  (ordre du modèle de commande retenu) de la grandeur à maîtriser. En effet, si l'on prend par exemple le domaine des machines de production (robot, machine-outil, ...), la position et la vitesse sont générées par la CFAO. Par contre, qui va élaborer les autres dérivées ?

Pratiquement, ce type de commande n'est quasiment jamais utilisé seul.

### 3.1.2 Principe d'inversion indirecte

Le principe de l'inversion indirecte découle du concept même d'asservissement à savoir imposer un comportement. La figure 3.3 illustre ce concept visant à minimiser l'écart  $e = y_{ref} - y$ . La relation de commande est maintenant exprimée comme suit :

$$Rc \rightarrow u_{reg} = g(c(y_{ref} - y), t), \quad (3.6)$$

où  $c$  représente la fonction de correction. Elle est déterminée de façon à assurer la stabilité du processus commandé et à minimiser l'écart  $e$ . On peut écrire :

$$\text{Si } |c| \rightarrow \infty \text{ et } u = u_{reg} \text{ alors } y(t) \rightarrow y_{ref}(t). \quad (3.7)$$

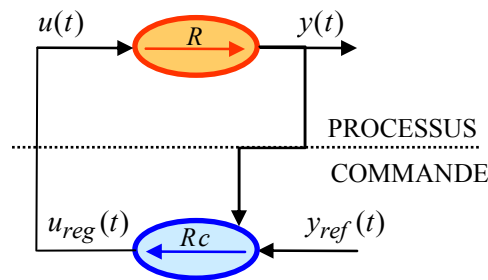


Figure 3.3 – Principe d'inversion indirecte.

On constate alors que la réponse suit la référence indépendamment de la connaissance a priori du processus. De plus, si le gain de la relation de commande tend vers une valeur infiniment grande, ce principe est théoriquement indépendant de la nature de la relation. Ainsi, il s'applique autant à une relation non linéaire mal connue qu'à une relation causale, puisque la grandeur de réglage est obtenue à partir de l'écart entre la grandeur asservie et la trajectoire que l'on souhaite lui imposer.

On pourrait penser que le principe est universel, applicable à des relations mal connues, linéaires ou non. En réalité, la présence de l'énergie emmagasinée dans le processus est à l'origine de retards dans les réponses conduisant la plupart du temps à des comportements oscillatoires, voire instables. De plus, l'augmentation du gain de boucle accroît la bande passante pouvant aller jusqu'aux fréquences des bruits de mesure. La limite de réglage est alors atteinte et les performances dynamiques du processus aussi. Ce sont les raisons pour lesquelles la notion de valeur infinie de gain dans la loi de commande est fallacieuse et qu'il faut recourir à des fonctions plus complexes. Le cas le plus classique est le correcteur proportionnel et intégral ; celui-ci amène une amplification infiniment grande de l'écart en régime stationnaire mais permet de respecter la stabilité du système grâce à la décroissance de cette amplification avec la fréquence.

Ce principe d'inversion indirecte a été généralisée dans [Barre, 2004] où son application a permis d'aboutir à différents types d'asservissement, commande par boucles en cascade, commande à modèle de comportement des Etats (CMRE cf. Figure 3.4), commande par retour d'Etat, commande à modèle de référence global, etc.

### 3.1.3 Couplage des deux principes d'inversion

La valeur de gain ne pouvant pas être infinie pour les raisons évoquées précédemment, une solution consisterait à coupler les deux principes d'inversion, chacun amenant ses avantages (suivi de trajectoire pour l'inversion directe et rejet de perturbations pour l'inversion indirecte). La commande envoyée au système correspond alors à l'ajout de deux contributions, une provenant de la partie inversion directe et l'autre de l'inversion indirecte. Ce concept est illustré Figure 3.4 où une commande à modèle de référence des états est couplée à une commande par inversion directe.

Ce couplage fait apparaître deux degrés de liberté :

- une inversion directe comprenant une précommande qui intègre la dynamique du système à commander et une génération de lois de mouvement,
- une inversion indirecte comprenant un asservissement.

On notera que la partie loi de mouvement est chargée de générer les références nécessaires à la précommande et à l'asservissement et que le degré de dérivabilité minimum de cette loi de mouvement est imposé par la partie inversion directe, grâce à cette technique la référence utilisée est « compatible » avec la dynamique du système commandé.

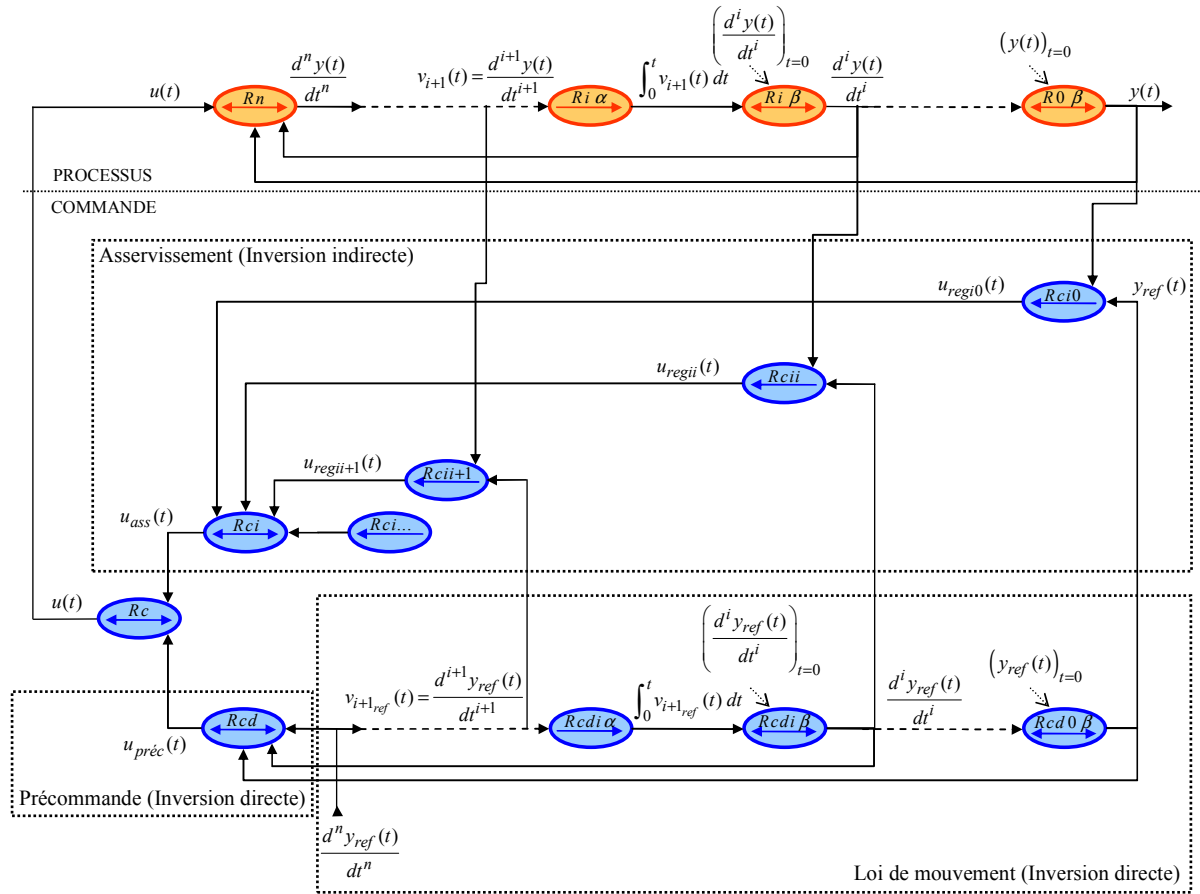


Figure 3.4 – Commande utilisant le couplage des deux principes d'inversion – Commande à modèle de référence des états (CMRE).

En simplifiant le schéma présenté Figure 3.4, on obtient l'architecture de commande générique couplant inversion directe et indirecte présentée Figure 3.5 où  $\Sigma$  correspond au système à commander,  $\Psi_{ass}$  à l'asservissement (inversion indirecte),  $\Psi_{préc}$  et  $\Psi_{ref}$  respectivement à la précommande et au générateur de lois de mouvement (inversion directe).

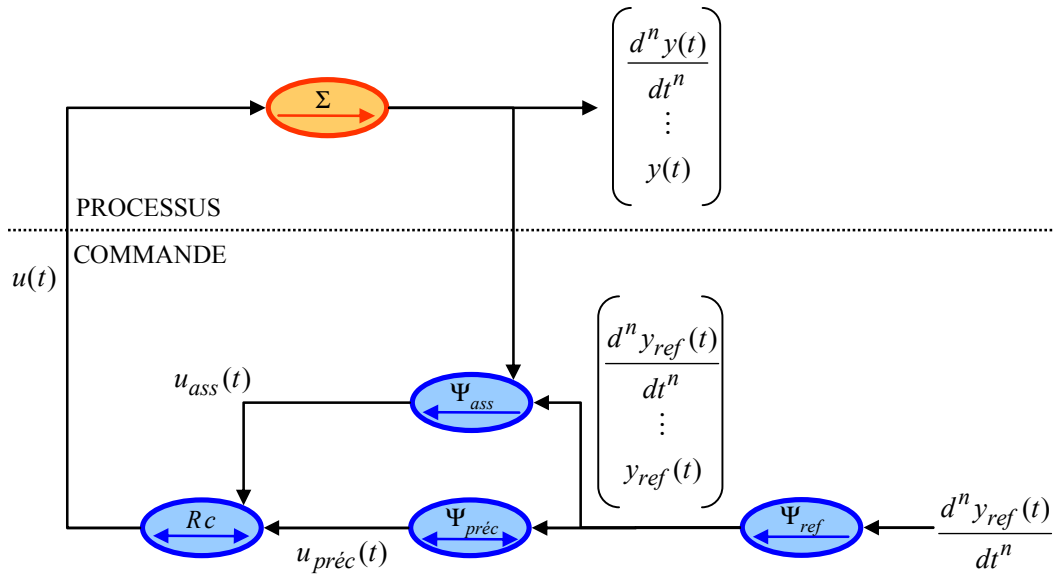


Figure 3.5 – Commande générique couplant inversion directe et indirecte.

### 3.1.4 Architecture de commande générique d'un axe

Le passage d'une représentation par GIC à une représentation plus classique par schéma-bloc permet d'aboutir à la structure de commande à deux degrés de liberté présentée Figure 3.6. Cette structure est généralement utilisée dans la majorité des applications industrielles [Horowitz, 1963]. La précommande  $\Psi_{préc}$  correspondant à l'inversion directe permet d'atteindre des objectifs de suivi de trajectoire pour la sortie  $y$ . L'asservissement  $\Psi_{ass}$  correspondant à l'inversion indirecte est conçu de façon à rendre le système  $\Sigma$  stable et robuste vis-à-vis des incertitudes de modélisation et des perturbations extérieures. Le générateur de lois de mouvement  $\Psi_{ref}$  fournit à la précommande et à l'asservissement la loi de mouvement  $y_{ref}$  avec un certain degré de dérivabilité qui est imposé après application des principes d'inversion directe.

Un dernier point reste cependant à éclaircir : le passage de l'ordre de déplacement du point  $y_0$  à  $y_f$  au type de loi de mouvement utilisé pour obtenir la dérivée  $n^{ième}$  de  $y_{ref}$ . Pour cela nous renvoyons le lecteur vers la thèse de Richard Béarée [Béarée, 2005] où une étude détaillée de l'influence du type de loi de mouvement utilisé sur le comportement du système a été réalisée.

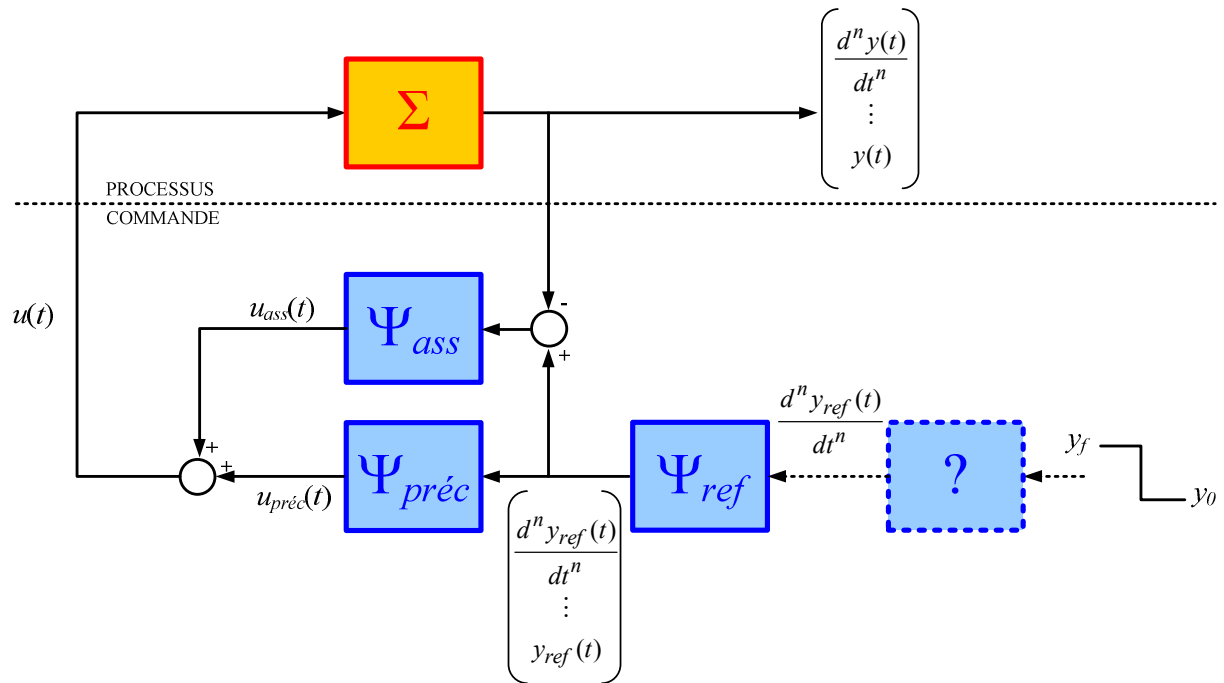


Figure 3.6 – Passage du couplage inversion directe et indirecte à une représentation par schéma-bloc.

$\Psi_{ref}$  : générateur de lois de mouvement,  $\Psi_{préc}$  : précommande,  $\Psi_{ass}$  : asservissement.

On remarquera que dans la majorité des applications industrielles, le générateur de loi de mouvement ne fournit que le signal  $y_{ref}$  et non sa dérivée  $n^{ième}$ . La reconstitution des  $n$  dérivées est laissée à la charge de la précommande, les différentes dérivées étant alors obtenues par une approximation numérique (méthode des rectangles, transformation bilinéaire, etc.) , nous renvoyons le lecteur vers [Barre, 2004] pour une étude plus approfondie de ce principe d'inversion approchée. Cette reconstitution est généralement sources de nombreux problèmes, bruits numériques, approximation qui engendre du retard, etc. La méthode la plus « propre » reste une génération complète de ces  $n$  dérivées par le générateur de lois de mouvement. Pour des raisons de simplicité, on ne fera apparaître dans les figures suivantes que les signaux  $y$  et  $y_{ref}$  et non leurs dérivées. On notera aussi que nous n'avons généralement pas accès à toutes les mesures des  $n$  dérivées de  $y$ . L'asservissement pourra donc soit

utiliser les mesures disponibles afin d'assurer le rejet de perturbations ou un observateur qui reconstituera ces  $n$  dérivées.

Après simplification du schéma-bloc présenté Figure 3.6 et en regroupant la génération de trajectoire dans un seul bloc  $\Psi_{ref}$  chargé de générer la loi de mouvement à partir d'un ordre de déplacement, notre étude s'appuiera sur la structure de commande de la Figure 3.7.

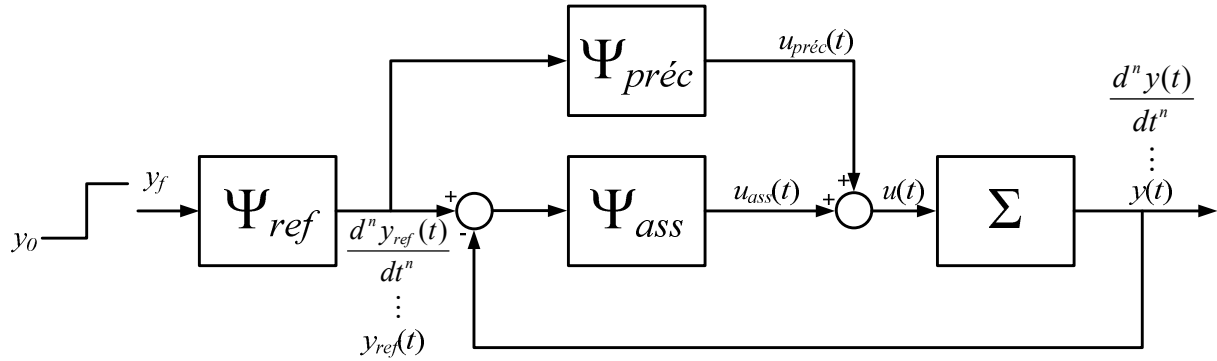


Figure 3.7 – Structure de commande à deux degrés de liberté du système  $\Sigma$ .

$\Psi_{ref}$  : générateur de lois de mouvement,  $\Psi_{prec}$  : précommande,  $\Psi_{ass}$  : asservissement.

## 3.2 Lois de mouvement et Précommande de l'extrémité d'un axe souple en boucle ouverte (Inversion directe)

Cette partie est essentiellement axée sur l'étude de l'inversion directe des modèles de commande présentés au chapitre 2 à savoir sur l'étude des notions de génération de lois de mouvement et de précommande. Nous passons tout d'abord en revue les différents types de lois de mouvement pouvant servir de référence à la précommande et nous proposons différentes méthodes de synthèse d'une précommande d'un axe souple.

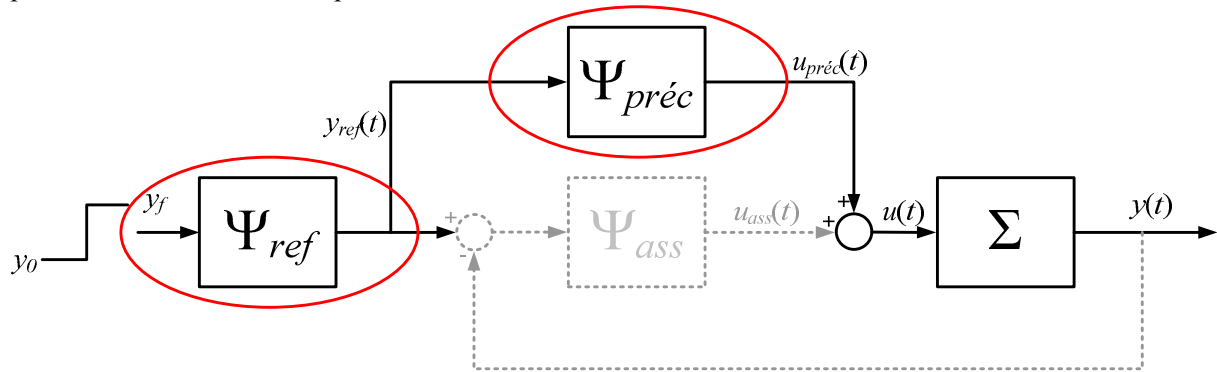


Figure 3.8 – Architecture de commande générique d'un axe.

(étude de la partie précommande  $\Psi_{prec}$  et génération de loi de mouvement  $\Psi_{ref}$ ).

### 3.2.1 Génération de lois de mouvement adaptées aux déplacements d'un axe

Il existe de nombreuses méthodes de synthèse d'asservissement qui seront en partie étudiées dans le chapitre suivant mais, en comparaison, il en existe très peu qui permettent de concevoir la

précommande et le générateur de lois de mouvement. Cette différence est essentiellement due à la difficulté d'inverser un système spécifiquement s'il est non-linéaire.

Le problème le plus fréquemment rencontré lors de la conception d'une précommande est la transition entre deux points de fonctionnement du système en un temps fini, qui correspond pratiquement au déplacement d'un point à un autre. La solution à ce problème peut être séparée en deux étapes :

1. La conception du générateur de lois de mouvement  $\Psi_{ref}$  qui fournit une loi de mouvement  $y_{ref}(t)$  qui raccorde le point de départ  $y_0$  au point d'arrivée  $y_f$ . Cette loi de mouvement est utilisée comme référence pour l'asservissement  $\Psi_{ass}$ . Elle permet de prendre en compte les limites énergétiques du système  $\Sigma$ .
2. La conception de la précommande  $\Psi_{préc}$  qui fournit le signal de commande nominal  $u_{préc}(t)$  au système  $\Sigma$  pour que sa sortie  $y(t)$  suive la trajectoire  $y_{ref}(t)$  en boucle ouverte. La précommande permet de prendre en compte la dynamique du système à commander.

Deux types de mouvement d'axe sont envisageables : **un mouvement de type suivi de trajectoire et un mouvement de type point à point.**

Un mouvement de type suivi de trajectoire permet à un axe de machine de suivre la trajectoire désirée  $y_{ref}(t)$  tout au long d'un déplacement. Ce type de mouvement est par exemple utilisé dans le domaine de la machine outil où la qualité d'un usinage dépend généralement des performances en suivi de trajectoire de la pointe outil.

Un mouvement de type point à point permet, quand à lui, de déplacer un axe d'un point à un autre le plus rapidement possible avec des contraintes au niveau des points de départ et d'arrivée, le comportement entre ces deux points n'étant pas nécessairement pris en compte. Ce type de mouvement est souvent utilisé pour des applications de chargement ou déchargement de pièces où l'objectif est de se déplacer le plus rapidement possible avec généralement des contraintes sur le comportement vibratoire au départ et à l'arrivée du mouvement. Les mouvements réalisés par un robot cartésien dédié au déchargement rentrent typiquement dans ce cadre.

Pour le déplacement d'un axe souple, ces deux types de mouvement correspondent à des contraintes différentes : dans le cas d'un mouvement du type suivi de trajectoire, le comportement vibratoire de l'axe est maîtrisé tout au long du déplacement et dans le cas d'un mouvement du type point à point, le comportement vibratoire de l'axe est maîtrisé au début et à la fin de chaque déplacement. De par sa nature moins contraignante, un mouvement de type point à point sera toujours plus rapide qu'un mouvement de type suivi de trajectoire.

Nous rappelons les principales hypothèses de travail utiles pour ce chapitre :

1. La dynamique des éléments électriques étant supposée négligeable par rapport à la dynamique des éléments mécaniques, le générateur de lois de mouvement et la précommande sont définis pour réaliser une commande en effort ou en couple. La variable de commande  $u$  correspond par conséquent à un effort appliqué au système mécanique.
2. Nous pouvons considérer, sans perte de généralité, que le point de départ correspond à une position nulle ( $y_0 = 0$ ) et donc que le point d'arrivée  $y_f$  correspond au déplacement relatif à réaliser.

### 3.2.1.1 Généralités sur les lois de mouvement

Avant toute chose, une fonction temporelle candidate au titre de loi de mouvement d'un axe de positionnement se doit de vérifier plusieurs propriétés :

1. Puisque la variable de commande correspond à un effort, elle doit disposer au moins d'une phase d'accélération et d'une phase de décélération, correspondant à des phases à effort positif et négatif,
2. Elle doit être capable de s'adapter aux variations d'échelle du mouvement, c'est-à-dire être "suffisamment paramétrable" pour décrire toutes les longueurs de déplacement possibles sans dégénérescence excessive de sa forme (donc de ses propriétés),
3. Elle doit avoir la capacité de limiter les vibrations du système.

Nous distinguerons dans la suite deux familles de lois de mouvement que nous appellerons respectivement *lois douces* et *lois bang-bang*. La figure 3.9 représente le principe de base différenciant les deux familles de loi de mouvement.

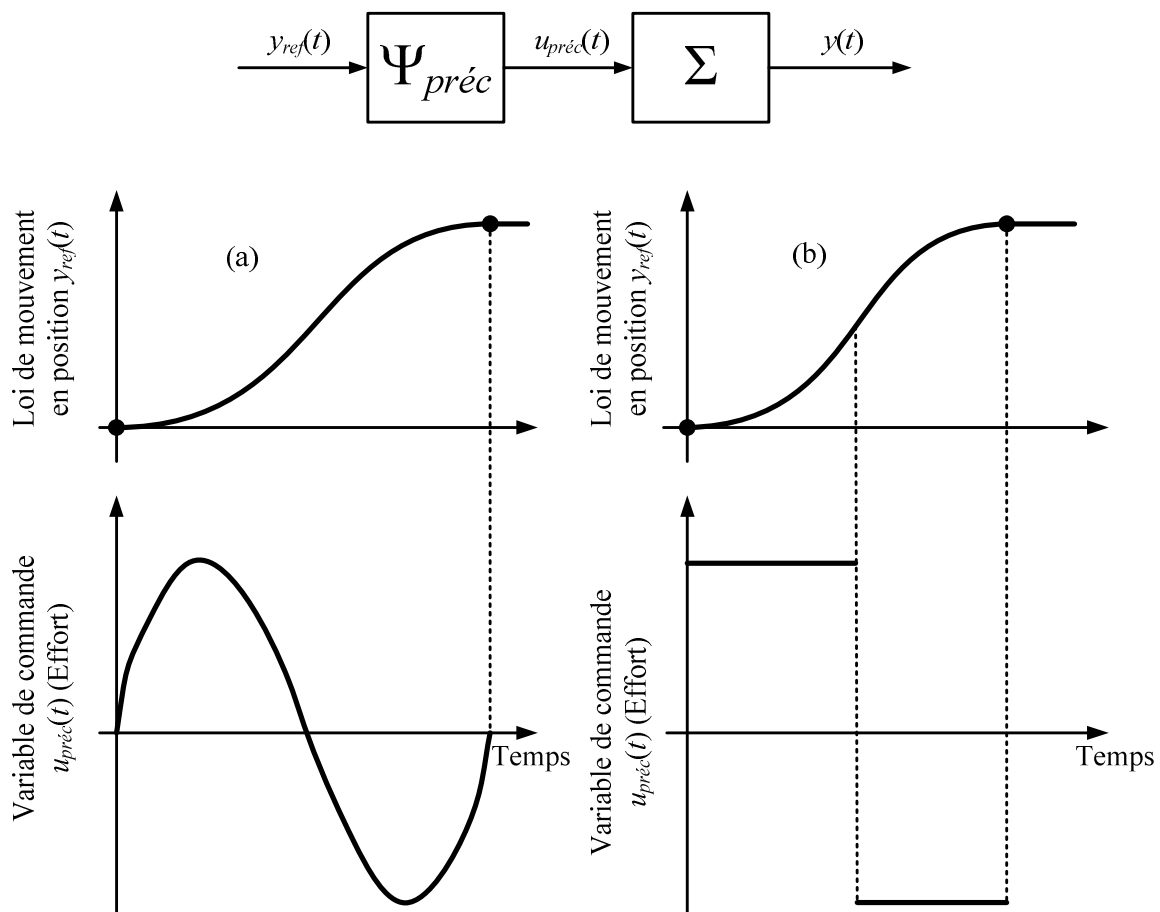


Figure 3.9 – Forme générique d'une loi de mouvement.

(a) loi douce et (b) loi bang-bang.

Les lois douces rassemblent toutes les fonctions continues dont l'expression analytique vérifie les propriétés nécessaires à l'élaboration d'une loi de mouvement. Bien qu'il existe une infinité de fonctions candidates, les principales fonctions concernées sont les fonctions polynomiales et les fonctions harmoniques. Ce type de loi d'une continuité infinie lors du mouvement (en dehors des points extrêmes) aura de façon implicite une plus grande chance de demander un mouvement qui

correspond à une trajectoire physique de la machine. Cet effet est généralement englobé sous le qualificatif d'adoucissement de la trajectoire et résulte en une diminution des vibrations durant le mouvement ainsi qu'en une diminution du temps de relaxation du système.

Les lois bang-bang doivent leur appellation à leur principe d'élaboration qui consiste à saturer la variable de commande du système, ou une de ses dérivées, en commutant un certain nombre de fois du niveau maximal au niveau minimal autorisé. La loi de mouvement résultante en position est donc composée d'une succession de courbes que l'on peut exprimer sous la forme d'une fonction polynomiale par morceaux (spline).

Nous attirons l'attention du lecteur sur la terminologie utilisée pour nommer les dérivées successives du mouvement. En effet, si le terme de *jerk* (dérivée de l'accélération) est désormais courant et accepté par tous, les dérivées d'ordre supérieur ne disposent pas de dénomination normée. Nous utiliserons une terminologie issue de la biotechnologie, seul domaine à utiliser couramment les dérivées de la position pour qualifier les mouvements humains. Ainsi, la dérivée du *jerk* est appelée *snap* et la dérivée troisième de l'accélération est nommée *crackle* [Dingwell, Mah et coll., 2004].

### 3.2.1.2 Lois de mouvement douces

Les lois de mouvement douces rassemblent essentiellement les fonctions polynomiales et les fonctions harmoniques qui, vu leurs propriétés naturelles telles que l'adaptabilité de la forme (polynômes) et leur périodicité (fonctions trigonométriques), sont les plus adaptées pour réaliser un mouvement qui correspond à la trajectoire physique du système.

#### 3.2.1.2.1 Fonctions trigonométriques

Comme nous l'avons déjà précisé, le déplacement d'un axe d'un point à un autre implique, pour une loi de mouvement, l'existence d'une phase d'accélération et d'une phase de décélération. Ce basculement entre des phases où l'accélération sera positive puis négative, laisse tout naturellement penser à la forme périodique des fonctions trigonométriques. A priori, la fonction sinus vérifie les contraintes d'une loi de mouvement. Considérons la loi de mouvement en accélération définie par le paramètre d'accélération maximale  $A_m$  et la durée du mouvement  $T_f$ :

$$0 \leq t \leq T_f \quad \ddot{y}_{ref}(t) = A_m \sin\left(2\pi \frac{t}{T_f}\right) \quad (3.8)$$

Le déplacement  $y_f$  réalisé est donné par :

$$y_f = \frac{A_m T_f^2}{2\pi} \quad (3.9)$$

On peut imaginer de nombreuses lois de mouvement à base de fonctions trigonométriques ; par exemple la loi en sinus carré d'accélération, disponible dans certaines commandes numériques, pour laquelle la pente aux points extrêmes est nulle [Béarée, Barre et coll., 2005]. On notera que l'utilisation de ce type de loi rend implicite la discrétisation du profil; chaque phase du mouvement est définie soit par un sinus carré, soit par une accélération nulle (vitesse constante). Sans considérer la phase de vitesse constante, le profil d'accélération pour la loi en sinus carré s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq \frac{T_f}{2} \quad \ddot{y}_{ref}(t) &= A_m \sin^2\left(2\pi \frac{t}{T_f}\right) \\ \frac{T_f}{2} \leq t \leq T_f \quad \ddot{y}_{ref}(t) &= -A_m \sin^2\left(2\pi \frac{t}{T_f}\right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Le déplacement  $y_{ref}$  réalisé est donné par :

$$y_f = \frac{A_m T_f^2}{8} \quad (3.11)$$

La figure 3.10 illustre la forme des profils d'accélération, de vitesse et de position correspondant aux lois de mouvement en sinus et sinus carré.

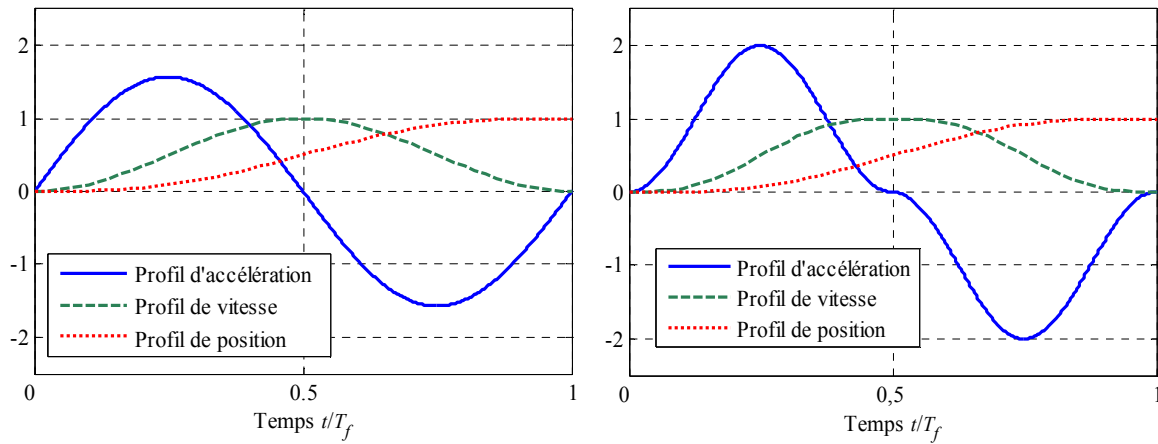


Figure 3.10 – Loi de mouvement en sinus et sinus carré d'accélération.

### 3.2.1.2.2 Fonctions polynomiales

Il existe une infinité de polynômes pouvant décrire un mouvement entre deux points, mais dans notre cas, il serait plus raisonnable de choisir un polynôme qui impose certaines contraintes sur la dynamique notamment la « douceur » du mouvement. Cette « douceur » reste assez subjective, elle est cependant fortement liée aux amplitudes des différentes dérivées de la trajectoire de référence. Un moyen d'améliorer cette notion de « douceur » est alors de minimiser les amplitudes des dérivées de la position tout au long du mouvement.

Le tableau 3.1 donne l'expression des lois douces à accélération, jerk et snap minimum [Brun-Picard, 2005] en fonction du déplacement à effectuer et de sa durée. Les allures de ces lois de mouvement sont représentées Figure 3.11.

| Type de la loi                                     | Expression de la loi                                                                       |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| Loi à accélération minimum $[y_{ref}(t)]_{\min A}$ | $\frac{t^2 y_f}{T_f^3} (-2t + 3T_f)$                                                       |
| Loi à jerk minimum $[y_{ref}(t)]_{\min J}$         | $\frac{30t^3 y_f}{T_f^5} \left( \frac{t^2}{5} - \frac{T_f t}{2} + \frac{T_f^2}{3} \right)$ |
| Loi à snap minimum $[y_{ref}(t)]_{\min S}$         | $\frac{t^4 y_f}{T_f^7} (-20t^3 + 70t^2 T_f - 84t T_f^2 + 35T_f^3)$                         |

Tableau 3.1 – Expressions des lois à accélération, jerk et snap minimum.

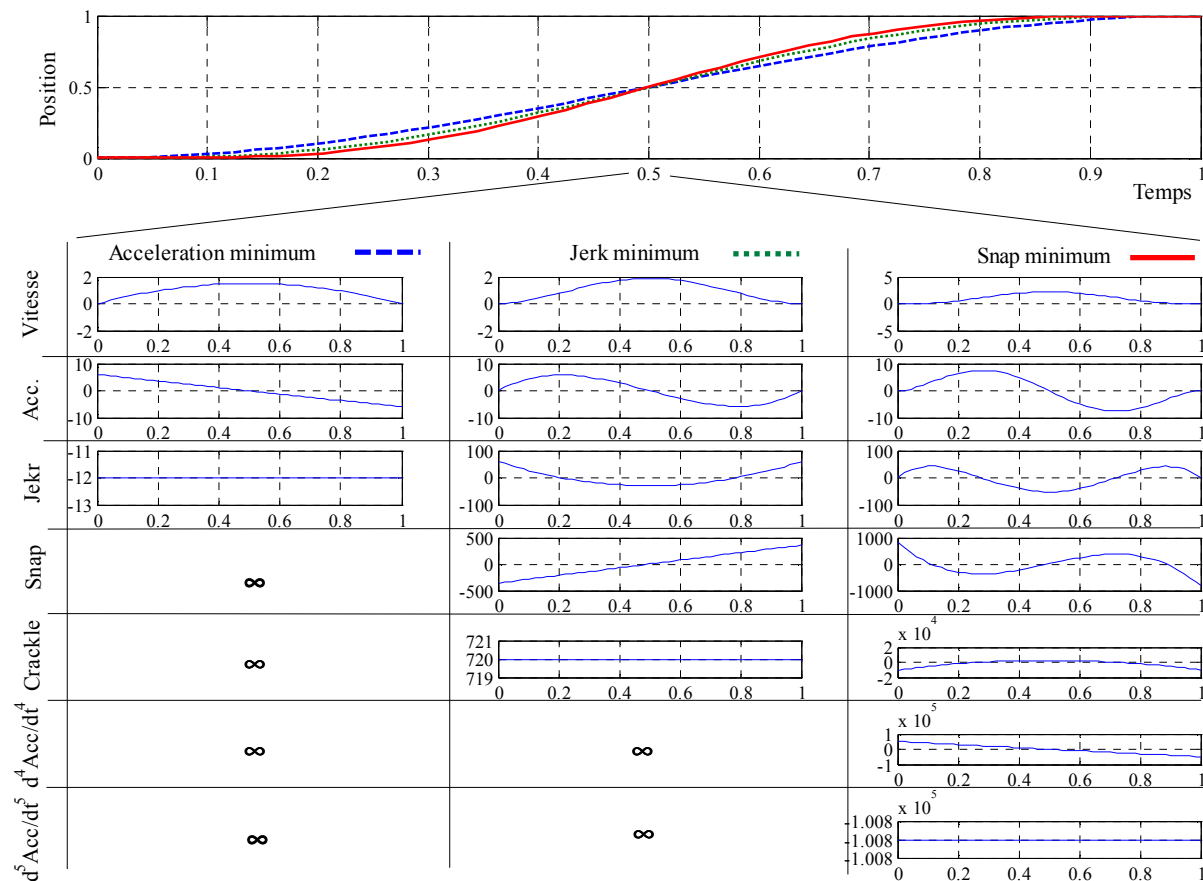


Figure 3.11 – Lois de mouvement à accélération, jerk et snap minimum.

### 3.2.1.3 Lois de mouvement bang-bang

Une loi de mouvement bang-bang consiste à saturer la variable de commande du système (dans notre cas l'accélération), ou une de ses dérivées, en commutant un certain nombre de fois du niveau maximal au niveau minimal. Elle se caractérise par le degré du polynôme utilisé (qui correspond à l'ordre de la dérivée qui commute), par le nombre de ses polynômes (nombre de commutations moins une), ainsi que par les valeurs des instants de commutation entre chacun des polynômes (Figure 3.12).

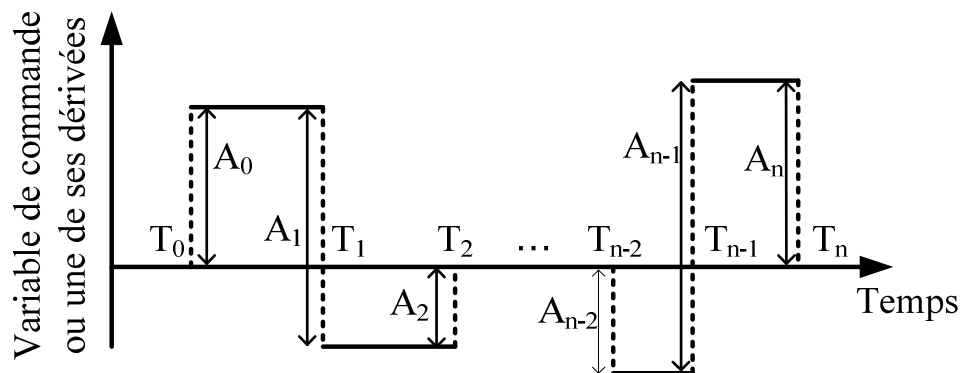


Figure 3.12 – Définition générique d'une loi de mouvement bang-bang.

Une loi bang-bang appliquée à la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de la position peut s'écrire sous la forme suivante :

$$y_{ref}^{(n)}(t) = \left| y_{ref}^{(n)} \right|_{\max} \cdot \left( \sum_{i=1}^n A_i \cdot H(t - T_i) \right), \quad (3.12)$$

où  $\left| y_{ref}^{(n)} \right|_{\max}$  représente la limite fixée pour la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de la position,  $H$  la fonction de *Heavyside*,  $T_i$  les instants de commutation des échelons d'amplitude  $A_i$ . L'instant initial  $T_0$  sera pris égal à zéro et on note également l'instant final  $T_f = T_n$ .

### 3.2.1.3.1 Principe fondamental d'une loi en temps optimal

La commande en temps optimal a pour objectif de déterminer la variable de commande qui pourra réaliser un mouvement du type point à point le plus rapidement possible. Elle repose sur le principe de bang-bang formulé par Hermes [Hermes et Lasalle, 1969] et qui stipule que si l'on désire déplacer un système d'un état à un autre en temps minimum, il est nécessaire d'utiliser à tout instant le maximum de puissance disponible. Lorsque le système est rigide, la loi en temps optimal correspond à une loi à accélération limitée appelée classiquement bang-bang d'accélération.

Ce type de loi est celle que l'on retrouve dans quasiment toutes les commandes industrielles actuelles. Cependant, l'expérience a montré qu'une loi bang-bang d'accélération présente des discontinuités que les systèmes mécaniques flexibles ne peuvent suivre. Une des solutions possibles consiste, par exemple, à limiter la variation de l'accélération dans le temps et donc passer à un ordre supérieur à savoir limiter la dérivée de l'accélération (jerk) ou ses dérivées d'ordre supérieur.

### 3.2.1.3.2 Lois de mouvement à dérivée $n^{\text{ième}}$ limitée

Si l'on souhaite réaliser un mouvement en temps minimum, tout en imposant une limitation sur la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de la position (avec  $n \geq 2$ ), la théorie de la commande optimale nous dit que la trajectoire en temps minimum vérifie [Bonnans, Gilbert et coll., 2003] :

- la commande optimale est toujours de type bang-bang. La dérivée  $n^{\text{ième}}$  de la position prend les valeurs  $+ \left| y_{ref}^{(n)} \right|_{\max}$  ou  $- \left| y_{ref}^{(n)} \right|_{\max}$  ;
- il y a au plus  $n-1$  instants de commutation entre les instants initiaux et finaux ;

Les instants de commutation sont déterminés par les conditions aux limites (sur la position et ses  $n-1$  dérivées). La figure 3.13 représente les trois formes possibles d'une loi de mouvement à jerk limité ( $n = 3$ ) en fonction des contraintes en accélération et vitesse maximales.

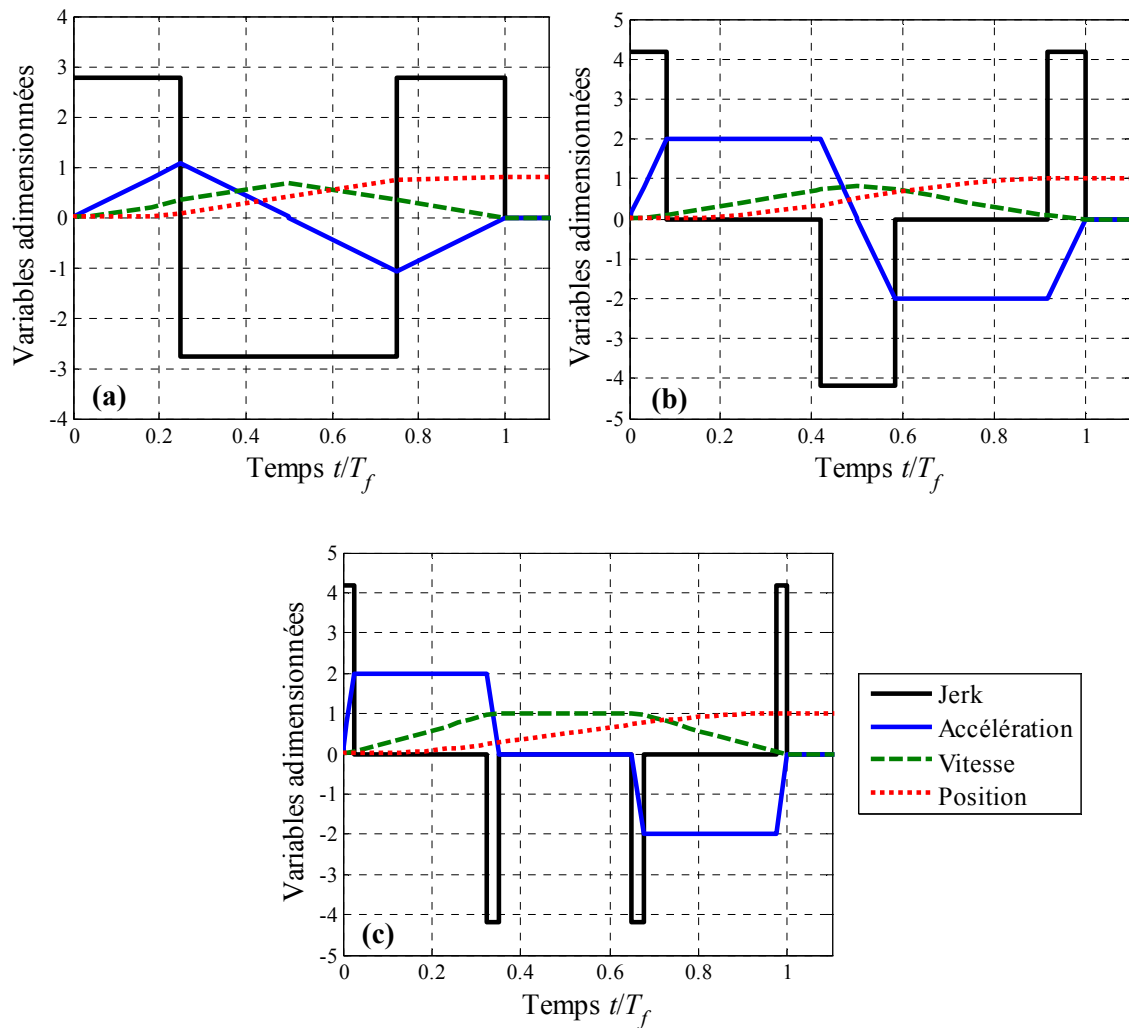


Figure 3.13 – Lois de mouvement en temps minimum à jerk limité.

(a) sans contrainte de vitesse et d'accélération, (b) contrainte d'accélération maximale atteinte, (c) contraintes de vitesse et d'accélération maximales atteintes.

### 3.2.1.3.3 Techniques d'input-shaping

Le principe de la mise en forme de l'entrée (input shaping) a été proposé par Singhose, Singer et Seering [Singhose, Singer et coll., 1997] et consiste à effectuer une convolution de l'entrée ou de la trajectoire de référence par une série d'impulsions (Figure 3.14); les profils en bang-bang peuvent être considérés comme des shapers à impulsions négatives. Les premiers travaux concernant cette technique reposent sur la commande Cast ou Posicast (positive-cast) introduite par Smith dans les années 50 [Tallman et Smith, 1958]. Son travail prend son origine dans l'observation des phénomènes vibratoires s'annulant naturellement lorsqu'ils sont de même amplitude mais opposés en phase.

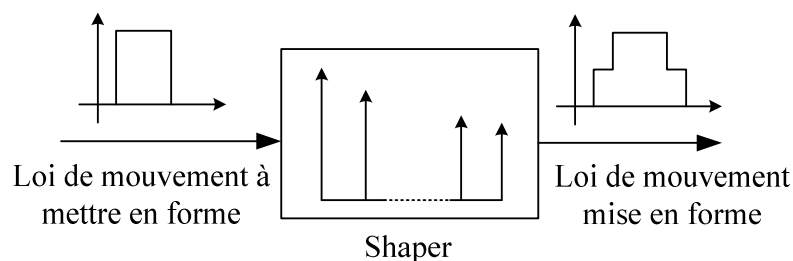
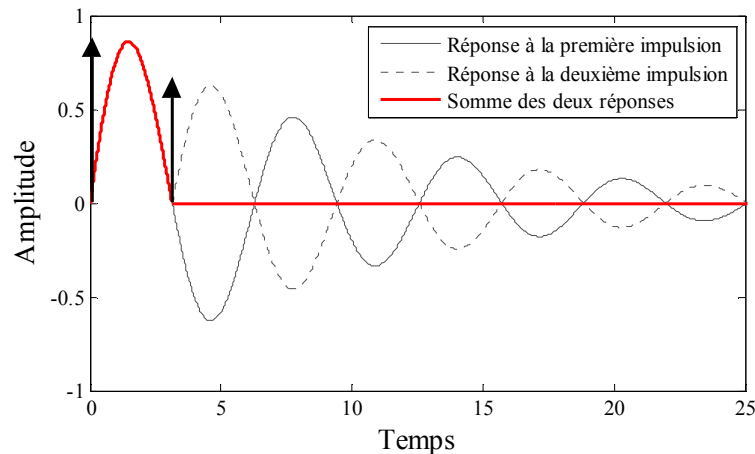


Figure 3.14 – Mise en forme d'une loi de mouvement.

L'idée repose sur le fait que les vibrations induites par la première impulsion vont s'annuler grâce à une deuxième impulsion déphasée dans le temps (Figure 3.15).



**Figure 3.15 – Principe des techniques d'input-shaping.**

Il convient à présent d'attirer l'attention du lecteur sur le fait que les vibrations sont effectivement annulées, mais uniquement en quelques points du mouvement. La compensation, ou l'inversion, est en effet ici liée au temps. Les vibrations résiduelles sont, dans tous les cas, annulées et il peut exister également d'autres instants exempts de vibration (liés à la symétrie des lois de mouvement). Ainsi la compensation exposée précédemment n'est en fait qu'une compensation "ponctuelle dans le temps".

### 3.2.2 Conception de la précommande d'un axe souple

La précommande théoriquement parfaite est celle qui correspond à l'inverse du modèle du processus. Dans le cadre non-linéaire, une solution consiste soit à linéariser le modèle autour d'un point de fonctionnement, soit à exploiter certaines propriétés naturelles de celui-ci [Isidori et Byrnes, 1990]. Une des classes de systèmes pour lesquels la génération de trajectoire est particulièrement aisée est celle des systèmes désignés comme plats [Fliess, Lévine et coll., 1995] puisque, dans ce cas, la précommande est déduite de façon purement algébrique à partir de variables appelées sorties plates. De manière explicite, un système est plat si on peut trouver un ensemble de sorties (égales en nombre au nombre d'entrées) tel que tous les états et toutes les entrées du système puissent être déterminés à partir de cet ensemble de sorties. La loi de mouvement peut être entièrement définie dans les coordonnées des sorties plates, la précommande est alors calculée directement sans aucune intégration. Lorsque le système considéré n'est pas plat, la conception d'une précommande est beaucoup plus difficile [Graichen, Hagenmeyer et coll., 2005] [Pledel, Bestaoui et coll., 1997], notamment si celui-ci est à non-minimum de phase [Chen et Paden, 1996]. Ces cas de figures ne seront pas traités dans cette étude.

Dans le cas des axes souples, nous avons montré, dans le chapitre 2, que la discrétisation du modèle de comportement amenait directement à un système à non-minimum de phase mais que l'influence du zéro instable sur le comportement dynamique était suffisamment négligeable pour ne pas tenir compte de ce phénomène. De plus, les variations de paramètres (masses, raideurs, etc.) sont beaucoup plus lentes par rapport aux différentes constantes de temps du système : lors d'un mouvement par exemple, il n'y a pas de discontinuité dans l'évolution des masses et des raideurs modales, celle-ci reste continue et beaucoup plus lente que d'autres phénomènes (comme le comportement vibratoire) qui agissent sur le système.

Nous supposons donc pour cette partie que :

1. le système est linéaire,
2. les paramètres du système sont lentement variants pendant un mouvement,
3. le système est à minimum de phase.

D'après le chapitre 2, le comportement d'un axe avec prise en compte des frottements visqueux est représenté par les modèles de la figure 3.16 où  $y$  ou  $y_1$  représente la position mesurée au niveau de l'actionneur,  $y_2$  la position de l'extrémité de l'axe (position de la charge),  $f$  l'effort de poussée provenant de l'actionneur et  $q$  la position du système complet (cf. 2.4.2).

Les hypothèses précédentes se traduisent par les relations suivantes :

$$\frac{d^n m_1(q)}{dt^n} \approx 0, \frac{d^n m_2(q)}{dt^n} \approx 0 \text{ et } \frac{d^n k(q)}{dt^n} \approx 0 \quad n > 0. \quad (3.13)$$

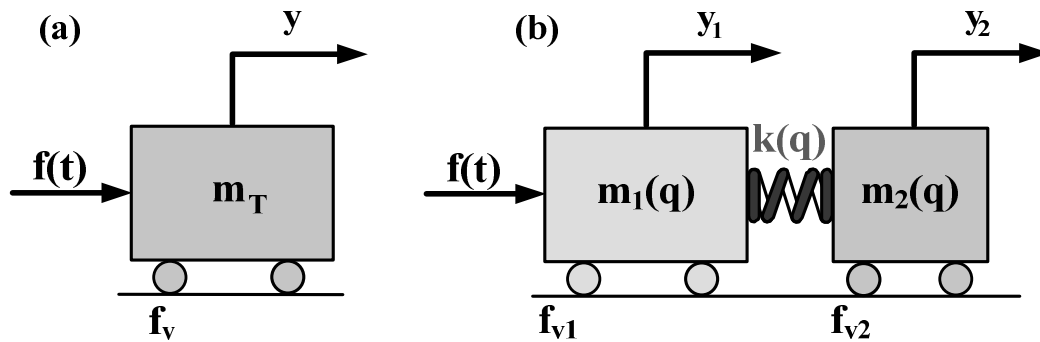


Figure 3.16 – Modèles utilisés pour la conception d'une précommande.

(a) – Modèle rigide (b) – Modèle souple.

### 3.2.2.1 Introduction à la commande plate

Une des classes de systèmes pour lesquels la conception d'une précommande est particulièrement aisée est celle des systèmes désignés comme plats [Fliess, Lévine et coll., 1995].

**Définition 1 (système plat)** Mathématiquement, on dit que le système défini par

$$\dot{x} = f(x, u), x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \quad (3.14)$$

est plat s'il existe une application  $h: \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^{r+1} \mapsto \mathbb{R}^m$ , une application  $\phi: (\mathbb{R}^m)^r \mapsto \mathbb{R}^n$  et une application  $\psi: (\mathbb{R}^m)^{r+1} \mapsto \mathbb{R}^m$  telles que l'on puisse écrire :

$$\begin{cases} y = h(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(r)}), \\ x = \phi(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}), \\ u = \psi(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}, y^{(r)}). \end{cases} \quad (3.15)$$

Les sorties plates sont la prolongation au domaine non linéaire des sorties de Brunovsky [Brunovsky, 1970] et de la mise sous forme canonique commandable d'un système linéaire stationnaire. Les systèmes plats sont très utilisés dans des situations où la génération d'une trajectoire explicite est requise. Dès lors que l'ensemble du système plat est déterminé par ses sorties plates, il est possible de planifier les trajectoires des sorties plates  $y_{ref}(t)$  et d'en déduire directement l'évolution de la précommande  $u_{préc}(t)$  correspondante.

L'un des principaux problèmes est l'existence d'un critère calculable pour décider si le système non linéaire (3.14) est plat. Cela signifie qu'il n'existe pas de méthode systématique pour construire une sortie plate. La situation est en fait un peu analogue à celle des fonctions de Lyapunov. Elles sont très utiles à la fois d'un point de vue théorique bien qu'il n'y ait pas de méthodologie de calcul proprement dite. Cependant, de nombreux systèmes réels sont plats, la notion de platitude a donc un grand intérêt pratique.

### 3.2.2.1.1 Platitude des systèmes linéaires

Les systèmes linéaires peuvent être mis assez facilement sous la forme de systèmes plats sous condition qu'ils soient commandables.

**Définition 2 (commandabilité)** Un système défini par (3.14) est dit commandable en temps  $T > 0$ , si et seulement si, pour  $p, q \in \mathbb{R}^n$ , il existe une loi horaire  $[0, T] \ni t \rightarrow u(t) \in \mathbb{R}^m$ , dite commande en boucle ouverte ou précommande, qui amène le système de l'état  $x(0) = p$  à l'état  $x(T) = q$ , c'est-à-dire, telle que la solution du problème

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u(t)) \text{ pour } t \in [0, T], \\ x(0) &= p,\end{aligned}$$

vérifie  $x(T) = q$ .

Dans le cas d'un système linéaire et stationnaire défini par

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{3.16}$$

où l'état  $x \in \mathbb{R}^n$ , la commande ou l'entrée  $u \in \mathbb{R}^m$  et les matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sont constantes, il existe un critère simple qui permet de déterminer si un système est commandable.

**Théorème 1 (Critère de Kalman)** Le système linéaire (3.16) est commandable si, et seulement si, la matrice de commandabilité  $C_0 = [B, AB, A^2B, \dots, A^{(n-1)}B]$  est de rang  $n$ .

Il est alors très facile de déterminer une sortie plate d'un système linéaire et commandable, puisque dans ce cas cette sortie plate est une sortie plate linéaire.

**Définition 3 (Sortie plate linéaire)** La sortie plate  $y$  est une sortie plate linéaire si les applications  $h, \phi$  et  $\psi$  définies par (3.15) sont linéaires. En utilisant l'opérateur de Laplace, les applications  $\phi$  et  $\psi$  peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$x = P(s)y, u = Q(s)y.$$

$P$  et  $Q$  sont appelées matrices de définition de la sortie plate  $y$ .

**Théorème 2 [Lévine et Nguyen, 2003]** Un système linéaire commandable possède toujours une sortie plate linéaire, les matrices  $P(s)$  et  $Q(s)$  vérifient

$$C^T \cdot A(s) \cdot P(s) = 0, \quad A(s) \cdot P(s) = B \cdot Q(s), \tag{3.17}$$

où  $A(s)$  et  $B$  représentent le système linéaire sous forme matricielle ( $A(s)x = Bu$ )

Un choix possible pour  $Q(s)$  est  $Q(s) = (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot A(s) \cdot P(s)$ .

### 3.2.2.1.2 Platitude des systèmes non-linéaires

Les systèmes non linéaires plats apparaissent comme des analogues non linéaires des systèmes linéaires commandables. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, il n'existe pas de méthode

systématique permettant de déterminer les sorties plates de systèmes non linéaires définis par (3.14). Cependant, pour des systèmes non linéaires de la forme :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \quad (3.18)$$

il est possible de faire appel aux techniques de linéarisation introduites dans [Isidori, 1989] pour déterminer une sortie plate.

**Définition 4 (Degré relatif)** Un système non linéaire mono-entrée, mono-sortie (SISO) défini par

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u, \\ y &= h(x), \end{aligned} \quad (3.19)$$

est de degré relatif  $r$  en  $x_0$  si et seulement si

$$\begin{cases} \forall k : 0 \leq k < n-1, \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^k h(x) = 0 \text{ dans un voisinage de } x_0, \\ \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^r h(x_0) \neq 0, \end{cases} \quad (3.20)$$

où  $\mathcal{L}_f h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i(x)$  est la dérivée de  $h$  le long de  $f$ . Concrètement,  $r$  est le nombre de dérivations à effectuer sur  $y$  avant de retrouver  $u$ .

Si le degré relatif de la sortie est égal à  $n$ , il est alors possible de mettre le système sous la forme canonique suivante appelé forme normale complète :

$$\begin{cases} y = z_1, \\ \dot{z}_1 = z_2, \\ \vdots \\ \dot{z}_n = \mathcal{L}_f^n h(x) + \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} h(x)u, \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\Rightarrow u = \frac{y^{(n)} - \mathcal{L}_f^n h(x)}{\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} h(x)}.$$

Le système est dit linéarisable par bouclage statique puisque le système obtenu défini par (3.21) est linéaire. Il devient alors évident que la forme normale complète d'un tel système n'est autre qu'une représentation particulière d'un système plat [Petit, Milam et coll., 2001].

Cependant, si tout système SISO linéarisable par bouclage statique est plat, la réciproque n'est pas forcément vraie. Tout dépend du choix de la sortie du système. Il faudrait pouvoir connaître quelle sortie du processus conviendrait pour avoir une forme normale complète et ainsi déterminer la sortie plate, les relations entre celle-ci et les états, et l'expression de la commande en fonction de la sortie et de ses dérivées. Une condition nécessaire et suffisante de linéarisation par bouclage statique est donnée par le théorème suivant [Jakubczyk et Respondek, 1980] :

**Théorème 3 (CNS de linéarisation statique)** Le système non linéaire (3.18) est linéarisable par bouclage statique si et seulement si

$$\begin{cases} \text{rang}(g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-2} g, ad_f^{n-1} g)(x_0) = n, \\ (g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-3} g, ad_f^{n-2} g) \text{ est involutive sur un voisinage } x_0. \end{cases} \quad (3.22)$$

L'utilisation du théorème 3 permet de déterminer si un système non linéaire SISO de la forme  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  est linéarisable par bouclage statique. Si cette condition est remplie, les relations

(3.20) permettent alors de déterminer l'expression de l'application  $h(x)$  et de la sortie plate  $y$  en fonction de l'état  $x$ .

### 3.2.2.2 Représentation par graphe de causalité

Les techniques précédentes peuvent être représentées graphiquement à l'aide d'un schéma GIC. Pour un système linéaire stationnaire de la forme (3.16), la représentation graphique de la précommande correspond à la représentation de la matrice de définition  $Q$ . Pour illustrer et pour des raisons de simplicité, on se place dans le cas mono-entrée, mono-sortie (SISO), la matrice  $Q$  a pour expression :

$$u(s) = Q(s)y(s) = \sum_{k=0}^r \tilde{q}_k s^k y(s), \quad (3.23)$$

où les variables  $\tilde{q}_k$  représentent les éléments de la matrice  $Q$ .

En passant dans le domaine temporel, la précommande  $u_{préc}$  s'écrit :

$$u_{préc}(t) = \sum_{k=0}^r \tilde{q}_k \frac{d^k y_{ref}(t)}{dt^k}, \quad (3.24)$$

où  $y_{ref}$  représente la référence de trajectoire de la sortie plate  $y$ .

Le schéma GIC de la précommande correspondante est représenté Figure 3.17. Il met en évidence une exigence : la trajectoire  $y_{ref}$  doit être prédéfinie telle que la dérivée  $r^{ième}$  puisse exister. Comme la sortie plate  $y$  représente la grandeur à maîtriser, il faut disposer à tout instant de toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre  $r$ . **Il est donc nécessaire que le générateur de lois de mouvement fournisse à cette précommande une référence et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $r$ .** L'intérêt de cette démarche est de pouvoir maîtriser tous les états du système et donc de ne réaliser que des trajectoires de  $y$  énergétiquement réalisables.

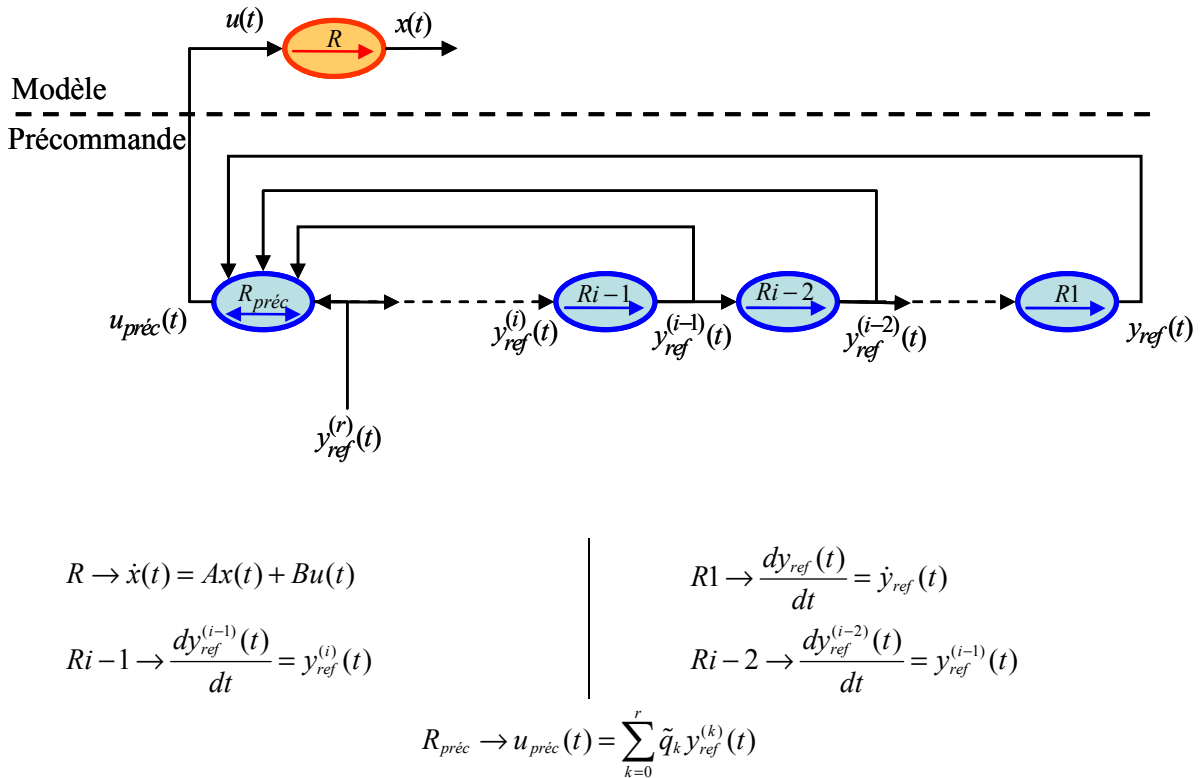


Figure 3.17 – Schéma GIC d'une précommande pour un système linéaire.

Dans le cas où le système est non-linéaire et de la forme (3.18), il est moins évident d'avoir une représentation aussi détaillée que dans le cas précédent, puisqu'en général la précommande est une combinaison non-linéaire de la sortie plate. Si le système est linéarisable par bouclage statique, il est possible de trouver facilement une sortie plate  $y$  et la précommande d'après (3.21) s'écrit :

$$u_{FF}(t) = \alpha(x(t)) + \beta(x(t)) y_{ref}^{(n)}(t), \quad (3.25)$$

où  $\alpha(x) = -\frac{b(y_{ref}, \dots, y_{ref}^{(n-1)})}{a(y_{ref}, \dots, y_{ref}^{(n-1)})} = -\frac{\mathcal{L}_f^n h(x)}{\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} h(x)}$ ,  $\beta(x) = \frac{1}{a(y_{ref}, \dots, y_{ref}^{(n-1)})} = \frac{1}{\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f^{n-1} h(x)}$  et  $y_{ref}$  représente la référence de trajectoire de la sortie plate  $y$ .

Le schéma GIC de la précommande correspondante est représenté Figure 3.18. Comme dans le cas linéaire, la trajectoire  $y_{ref}$  doit être prédéfinie telle que la dérivée  $n^{\text{ième}}$  puisse exister. Il faut aussi disposer de toutes les dérivées de  $y_{ref}$  jusqu'à l'ordre  $n$ .

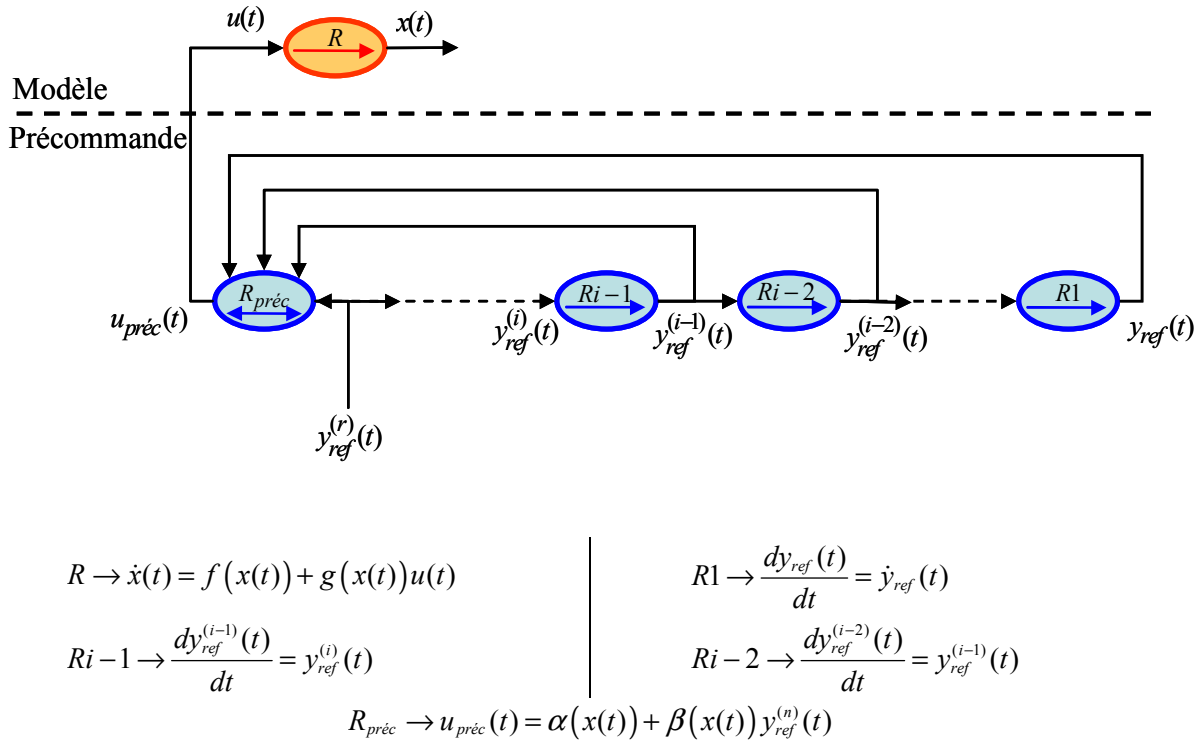


Figure 3.18 – Schéma GIC d'une précommande d'un système non-linéaire.

### 3.2.3 Application à la génération d'une précommande d'un axe souple

#### 3.2.3.1 Précommande rigide

La précommande dite rigide est obtenue en appliquant les méthodes précédentes au modèle rigide présenté Figure 3.16.a. Pour concevoir la précommande rigide, le système est donc modélisé par le système linéaire suivant :

$$\ddot{y}(t) = \frac{f(t)}{m_T} - \frac{f_v}{m_T} \dot{y}(t). \quad (3.26)$$

Il est clair que la sortie plate correspond à la position  $y$  de la masse  $m_T$ . La représentation de cette précommande sous forme de GIC est donnée Figure 3.19.  $y_{ref}$  correspond à la référence de trajectoire de  $y$  et donc à la loi de mouvement de la position de la masse  $m_T$ .

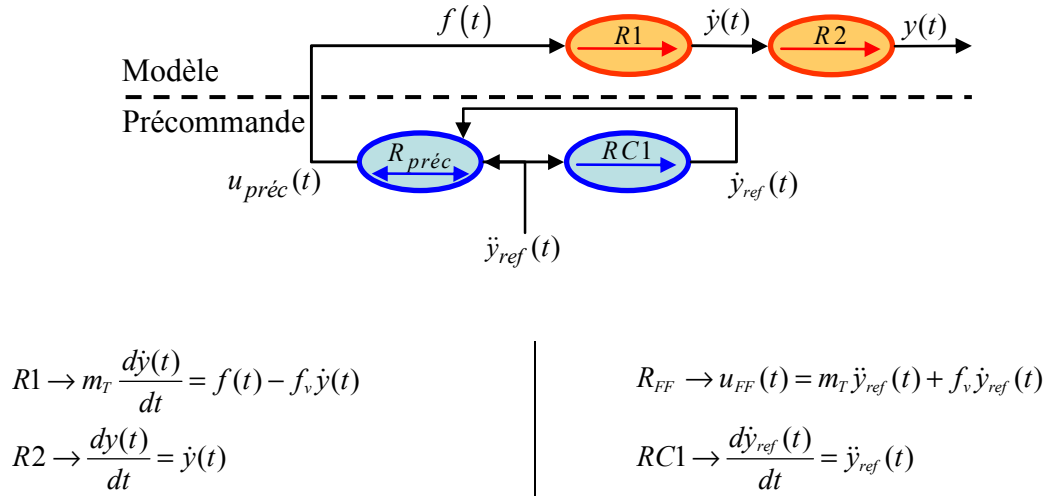


Figure 3.19 – Schéma GIC de la précommande rigide.

L'expression de cette précommande est très simple et nécessite la connaissance de deux paramètres faciles à obtenir : la masse totale en mouvement et le coefficient de frottements visqueux. On la retrouve très fréquemment dans les commandes industrielles actuelles où elle correspond à une anticipation d'accélération et une compensation des frottements. Il est, de plus, très facile de prendre en compte les limites de l'actionneur qui déplace l'axe concerné puisque l'effort maximum appliqué est donné par :

$$u_{FF \max} = m_T \ddot{y}_{ref \max} + f_v \dot{y}_{ref \max}, \quad (3.27)$$

où  $\ddot{y}_{ref \max}$  et  $\dot{y}_{ref \max}$  correspondent respectivement à l'accélération et la vitesse maximales de la référence fournies par le générateur de lois de mouvement.

Cependant, il est important de noter que la dynamique vibratoire de l'axe n'est pas prise en compte par cette précommande puisque, en réalité, elle s'applique sur une structure flexible. Plus précisément, la maîtrise du comportement vibratoire ne peut pas être effectuée par la précommande rigide, **il est donc nécessaire d'adapter la loi de mouvement utilisée par cette précommande pour supprimer toutes vibrations**. Cette étude ne rentre pas dans le cadre de cette thèse, le lecteur désireux d'en savoir plus sur le sujet peut se reporter aux travaux présentés dans [Béarée et Barre, 2006]. Les principales conclusions de cet article sont les suivantes :

- Les lois en bang-bang de jerk ou de snap permettent de réaliser un compromis vis-à-vis de la réduction des oscillations résiduelles et de l'inévitable allongement de la durée de mouvement théorique (par rapport au bang-bang d'accélération classiquement utilisé), ces lois de mouvement sont donc adaptées aux mouvements de type point à point.
- Les lois polynomiales à jerk ou à snap minimum réduisent de façon bien plus significative les vibrations lors du mouvement, mais ceci au détriment du temps de cycle, elles sont donc adaptées aux mouvements du type suivi de trajectoire.

- Quant aux lois harmoniques étudiées, elles n'améliorent pas un critère spécifique et ne permettent pas plus de réaliser un compromis satisfaisant entre les trois critères (réduction des vibrations résiduelles, réduction des vibrations lors du mouvement et temps de cycle).

Un résultat important sur les lois en bang-bang déjà évoqué au 3.2.1.3.3 est mis en évidence : **dans le cas où le système est linéaire, stationnaire (fréquence propre du premier mode fixe) et si l'on impose que la durée entre deux échelons de la dérivée limitée soit égale à la période du mode considéré, les vibrations résiduelles seront annulées.** Les vibrations seront également annulées lors du mouvement en plusieurs points selon le type de loi utilisée. Pour la loi à jerk limité, il existera entre deux et trois instants de vibration nulle, et pour la loi à snap limité, entre cinq et sept, ceci en fonction du nombre de commutations, donc du nombre de limitations atteintes. Ce réglage permet d'imposer la valeur maximale de la dérivée contrôlée. Par exemple, pour la loi à jerk limité, le réglage permettant d'annuler les oscillations résiduelles consiste à choisir la limite de jerk  $J_m$ , fonction de la limite d'accélération  $A_m$  et de la pulsation  $\omega_n$  du mode propre, vérifiant :

$$J_m = A_m \cdot T_j \quad \text{avec} \quad T_j = k \cdot \frac{2\pi}{\omega_n} \quad k=1,2,\dots \quad (3.28)$$

En résumé, le réglage d'une précommande rigide couplé à une loi de mouvement en jerk limité nécessite la connaissance de trois paramètres assez faciles à identifier : la masse totale en mouvement, le coefficient de frottements visqueux et la fréquence du mode propre dominant du système.

Il a été, en plus, montré dans [Dieulot, Thimoumi et coll., 2006] que ce type de loi de mouvement bang-bang était beaucoup plus robuste vis-à-vis de la connaissance de cette pulsation propre que des lois de mouvement basées sur des techniques d'Input Shaping. La figure 3.20 extraite de cette étude compare l'influence de l'estimation de cette pulsation propre sur le comportement vibratoire à la fin du déplacement pour une loi de mouvement en jerk limité et un ZV Shaper. Le ZV Shaper étant un filtre input shaping réglé pour annuler les vibrations au départ et à la fin d'un mouvement [Singhose, Singer et coll., 1997]. On remarque sur cette figure qu'une loi à jerk limité est beaucoup sensible aux variations de fréquences propres qu'un ZV Shaper.

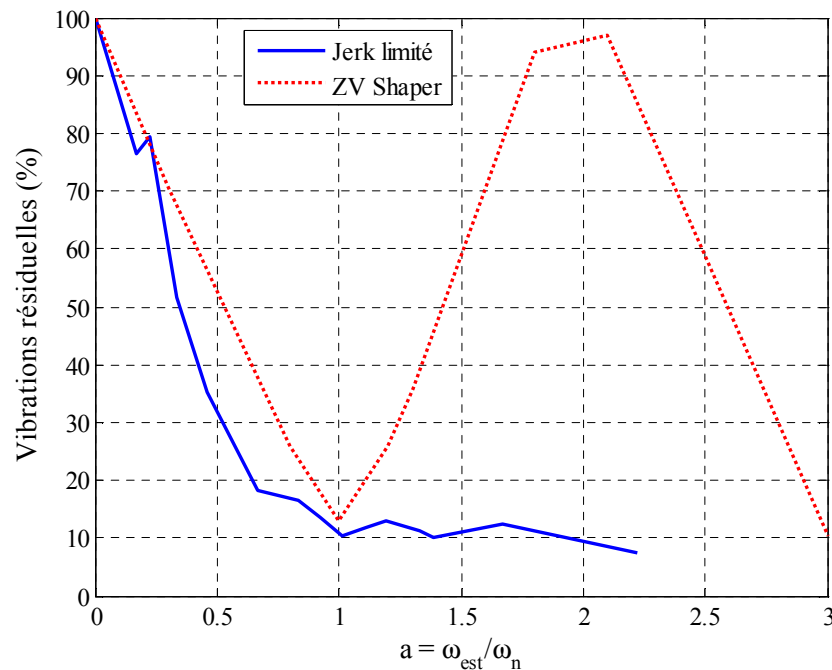


Figure 3.20 – Sensibilité d'une loi de mouvement en jerk limité et d'un ZV shaper en fonction du rapport entre la pulsation estimée et la pulsation réelle du mode propre dominant du système.

### 3.2.3.2 Précommande souple

A l'instar de la précommande rigide, la précommande souple est obtenue à partir du modèle souple présenté Figure 3.16.b. Ce modèle est régi par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} m_1(q)\ddot{y}_1(t) &= k(q)(y_2(t) - y_1(t)) - f_{v1}\dot{y}_1(t) + f(t) \\ m_2(q)\ddot{y}_2(t) &= k(q)(y_1(t) - y_2(t)) - f_{v2}\dot{y}_2(t) \end{aligned} \quad (3.29)$$

En supposant que la position  $q$  ne dépend que de  $y_1$  et  $y_2$ , ce modèle peut être mis sous la forme (3.18)

$$\text{avec } x = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ y_1 \\ \dot{y}_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} -\frac{f_{v1}}{m_1(y_1, y_2)} & -\frac{k(y_1, y_2)}{m_1(y_1, y_2)} & 0 & \frac{k(y_1, y_2)}{m_1(y_1, y_2)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k(y_1, y_2)}{m_2(y_1, y_2)} & -\frac{f_{v2}}{m_2(y_1, y_2)} & \frac{k(y_1, y_2)}{m_2(y_1, y_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \text{ et } g(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ m_1(y_1, y_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il est donc toujours possible de trouver une sortie plate si les conditions (3.22) sont vérifiées. Dans le cas où les hypothèses (3.13) sont valables, la sortie plate  $y$  correspond à  $y_2$  et l'expression de la précommande est très simple :

$$u_{\text{préc}} = \frac{m_1(Y)m_2(Y)}{k(Y)} y_{\text{ref}}^{(4)} + \frac{f_{v1}m_2(Y) + f_{v2}m_1(Y)}{k(Y)} y_{\text{ref}}^{(3)} + \left( m_1(Y) + m_2(Y) + \frac{f_{v1}f_{v2}}{k(Y)} \right) \ddot{y}_{\text{ref}} + (f_{v1} + f_{v2}) \dot{y}_{\text{ref}}, \quad (3.30)$$

où  $Y = (y_{\text{ref}}^{(4)}, \dots, y_{\text{ref}})$  et  $y_{\text{ref}}$  correspond à la référence de trajectoire de  $y$  et donc à la loi de mouvement de la position de la masse  $m_2$ . La représentation de cette précommande sous forme de GIC est donnée Figure 3.21.

L'expression de cette précommande est beaucoup plus complexe que la précédente et nécessite la connaissance de tous les paramètres du modèle souple. Contrairement à une précommande rigide, la précommande souple prend en compte le comportement vibratoire de l'axe. **Il n'est donc pas nécessaire de faire appel à un type de loi de mouvement particulier pour maîtriser les vibrations d'un axe souple.** N'importe quel type de loi de mouvement au moins quatre fois dérivable peut donc être utilisé en lien avec cette précommande puisque la trajectoire réalisée par la sortie plate  $y_2$  correspondra toujours à cette loi de mouvement si la connaissance du modèle est parfaite.

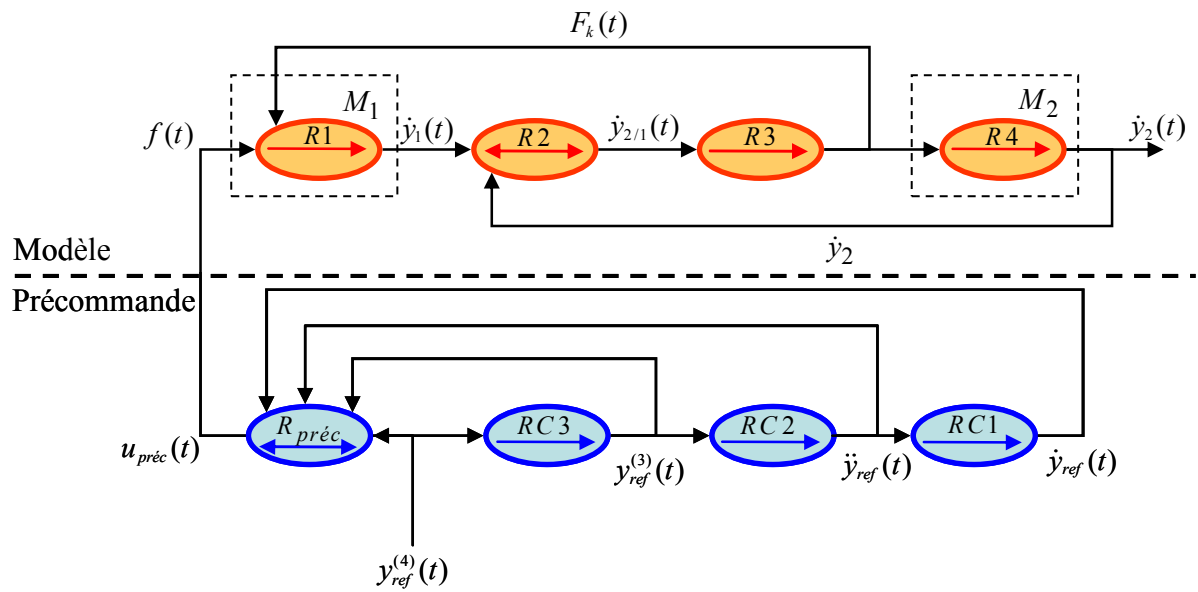
Si l'on souhaite se déplacer le plus rapidement possible, la loi de mouvement optimale en temps adaptée au modèle souple correspond à la saturation de la dérivée quatrième de  $y$  et donc à la loi à snap limité. En théorie les limites en jerk et en snap peuvent a priori être choisies infiniment grandes, plusieurs considérations sont alors à prendre en compte afin de limiter ces grandeurs :

- La première vient tout simplement des limites imposées par l'implantation numérique de la loi de mouvement. Par exemple, si l'on suppose des limites de snap et de jerk très élevées, le respect des limitations physiques sur les autres dérivées imposera une durée des phases à snap non nul très courte. La durée de ces phases ne peut être inférieure à une période d'échantillonnage du système sous peine d'être irréalisable. De la même façon, pour conserver les propriétés de dérivabilité de la loi à snap limité, il faut nécessairement que la durée des phases de snap soit au moins égale à deux périodes d'échantillonnage.
- La seconde source de limitations provient des limites de l'actionneur qui déplace l'axe concerné que la précommande  $u_{\text{préc}}$  ne doit pas dépasser. Il est donc nécessaire de tenir compte

de cette limite pour synthétiser la loi de mouvement à snap limité. Pour cela, des outils d'optimisation sous contraintes de l'entrée et de la sortie peuvent être utilisés [Graichen, Hagenmeyer et coll., 2005] [Piazzi et Visioli, 2001].

- La troisième source de limitations, sans doute la plus significative, provient de l'inévitable imperfection du modèle. Les paramètres du modèle sont connus avec une certaine précision. A l'imprécision sur les paramètres du modèle, vient également s'ajouter la dynamique résiduelle du processus réel, c'est-à-dire la dynamique non prise en compte par le modèle.

En résumé, le réglage d'une précommande souple nécessite la connaissance de plus de paramètres que dans le cas précédent : les masses modales  $m_1(q)$  et  $m_2(q)$ , la raideur modale  $k(q)$  et les coefficients de frottements visqueux  $f_{v1}$  et  $f_{v2}$ . Une étape d'identification préalable est donc obligatoire pour ce réglage.



$$\begin{aligned}
 R1 &\rightarrow m_1(q) \frac{d\dot{y}_1(t)}{dt} = f(t) - F_k(t) \\
 R2 &\rightarrow \dot{y}_{2/1}(t) = \dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t) \\
 RC3 &\rightarrow \frac{dy_{ref}^{(3)}(t)}{dt} = y_{ref}^{(4)}(t) \\
 R3 &\rightarrow \frac{1}{k(q)} \frac{dF_k(t)}{dt} = \dot{y}_{2/1}(t) \\
 R4 &\rightarrow m_2(q) \frac{d\dot{y}_2(t)}{dt} = F_k(t) \\
 RC2 &\rightarrow \frac{d\dot{y}_{ref}(t)}{dt} = y_{ref}^{(3)}(t) \\
 RC1 &\rightarrow \frac{d\dot{y}_{ref}(t)}{dt} = \ddot{y}_{ref}(t) \\
 R_{prec} &\rightarrow u_{prec} = \frac{m_1(Y)m_2(Y)}{k(Y)} y_{ref}^{(4)} + \frac{f_{v1}m_2(Y) + f_{v2}m_1(Y)}{k(Y)} y_{ref}^{(3)} + \left( m_1(Y) + m_2(Y) + \frac{f_{v1}f_{v2}}{k(Y)} \right) \ddot{y}_{ref} + (f_{v1} + f_{v2}) \dot{y}_{ref}
 \end{aligned}$$

Figure 3.21 – Schéma GIC de la précommande souple.

### 3.2.3.3 Simulation comparative entre les deux types de précommande

Les simulations réalisées dans cette partie ont pour objectif de comparer l'influence des deux types de précommande sur le comportement vibratoire d'un axe souple. Pour cela, le modèle du système utilisé correspond au modèle masse-ressort de la figure 3.16.b avec les paramètres variant suivants :

$$\begin{aligned} m_1(q) &= 100 + 10y_1 \text{ (kg)}, m_2(q) = 30 - 10y_1 \text{ (kg)}, k(q) = 50000 + 1000y_1 \text{ (N/m)} \\ f_{v1} &= f_{v2} = 0 \text{ (pas de frottements)} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ces paramètres choisis de façon arbitraire respectent les ordres de grandeurs que l'on peut retrouver sur de vrais systèmes. La trajectoire de référence correspond à un déplacement de  $1m$  avec une accélération maximale de  $4m/s^2$ . L'évolution pendant ce déplacement de la fréquence du mode propre correspondant à ce modèle est représentée Figure 3.22.

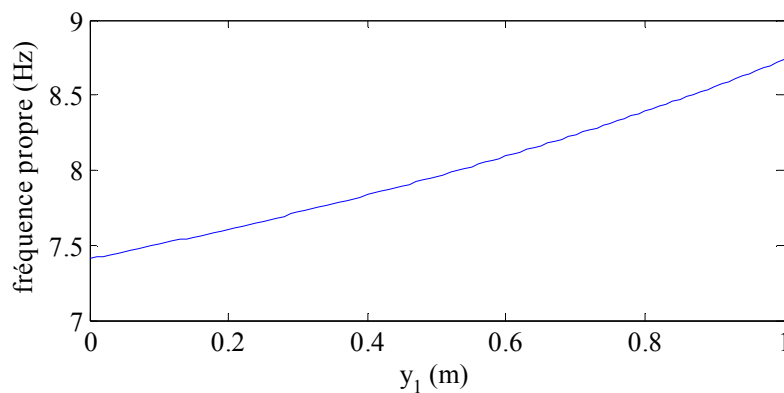


Figure 3.22 – Evolution de la fréquence propre en fonction de la position  $y_1$ .

Trois types de lois de commande en boucle ouverte (loi de mouvement + précommande) ont été testés :

1. loi de mouvement à accélération limitée + précommande rigide,
2. loi de mouvement à jerk limité + précommande rigide,
3. loi de mouvement à snap limité + précommande souple.

Dans les deux derniers cas, la valeur limite du jerk de référence a été fixée pour que la durée des phases en jerk limité soit égale à la plus faible période du mode propre dominant. La limite en snap a été fixée arbitrairement à  $10000 \text{ m/s}^4$  dans le dernier cas. Les lois de mouvement retenues sont toutes des lois de mouvement bang-bang afin de **privilégier la durée du mouvement**.

L'erreur en accélération entre la masse  $m_2$  et la référence est la grandeur retenue pour représenter l'influence de chacun des couples retenus sur le comportement vibratoire. Les résultats obtenus en simulation sont représentés Figure 3.23 et les performances de chacune des précommandes retenues sont résumées dans le tableau 3.2. On constate tout de suite que le cas le plus défavorable correspond à une précommande rigide avec une loi de mouvement en accélération limitée. Cette constatation est tout à fait naturelle puisque dans ce cas précis la dynamique vibratoire n'est pas prise en compte, ce type de loi de commande excite énormément le mode vibratoire du système. Cependant, le mouvement effectué est le plus rapide, cette rapidité est quand même à nuancer avec le temps d'attente nécessaire à l'obtention d'un système au repos : bien que le déplacement ait été rapide, il sera nécessaire

d'attendre que le système s'arrête de vibrer pour considérer le mouvement comme totalement réalisé. Ce temps d'attente sera d'autant plus important que le système sera excité.

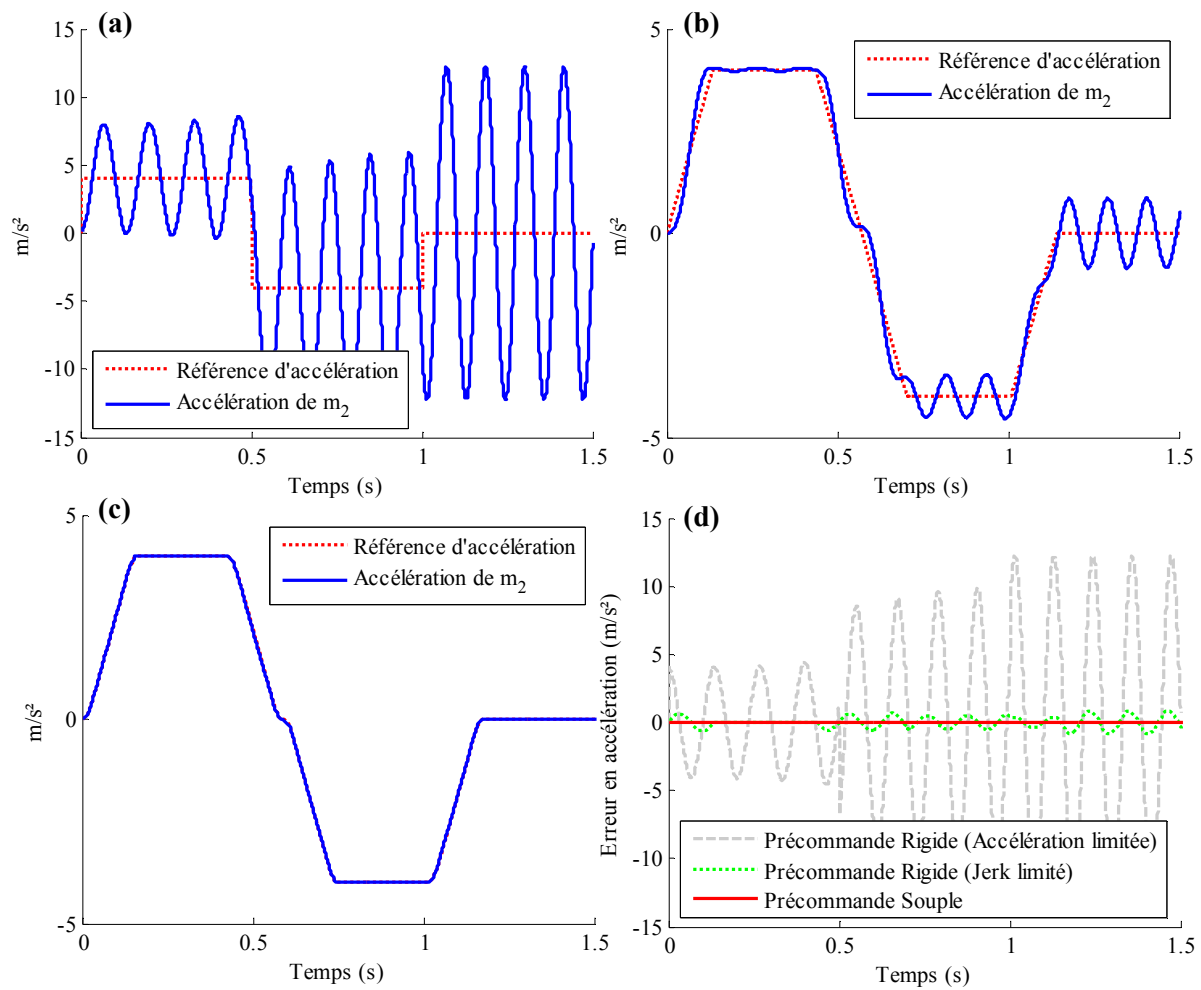


Figure 3.23 – Simulation comparative pour différentes lois de commande.

(a) Loi de mouvement en accélération limitée + précommande rigide (b) Loi de mouvement en jerk limité + précommande rigide (c) Loi de mouvement en snap limité + précommande souple (d) Erreur en accélération pour les trois cas précédents.

|                                           | Durée du mouvement  | Erreur maximale en accélération             |
|-------------------------------------------|---------------------|---------------------------------------------|
| Accélération limitée + précommande rigide | <b>1 s</b>          | <b>12,2 m/s<sup>2</sup></b>                 |
| Jerk limité + Précommande rigide          | 1,144 s<br>(+14,4%) | 1 m/s <sup>2</sup><br>(-92%)                |
| Snap limité + Précommande souple          | 1,148 s<br>(+14,8%) | <b>0,2 m/s<sup>2</sup></b><br><b>(-98%)</b> |

Tableau 3.2 – Performances théoriques des précommandes retenues.

L'utilisation d'une précommande souple couplée à une loi en snap limité permet comme on s'y attendait un suivi de trajectoire quasiment parfait lors du déplacement. Les erreurs résiduelles proviennent essentiellement de l'hypothèse (3.13) utilisée. L'erreur maximale en accélération est

diminuée de 98% par rapport au cas précédent au détriment bien évidemment de la durée du mouvement qui augmente de 14,8%.

La précommande rigide en lien avec une loi à jerk limité permet également de diminuer les vibrations lors d'un déplacement mais pas aussi efficacement qu'une précommande souple. Le mouvement est un peu plus rapide qu'auparavant (+14,4% au lieu de 14,8%). Ce type de loi de commande permet de réaliser un compromis entre complexité de réglage et diminution des vibrations. En effet, ce point a déjà été évoqué antérieurement, le réglage de cette loi de commande est beaucoup plus simple qu'une loi de commande basée sur une précommande souple. Les paramètres nécessaires à son réglage sont très faciles à identifier et sont généralement soit déjà connus soit faciles à identifier.

### 3.2.3.4 Sensibilité des précommandes rigide et souple face aux variations paramétriques

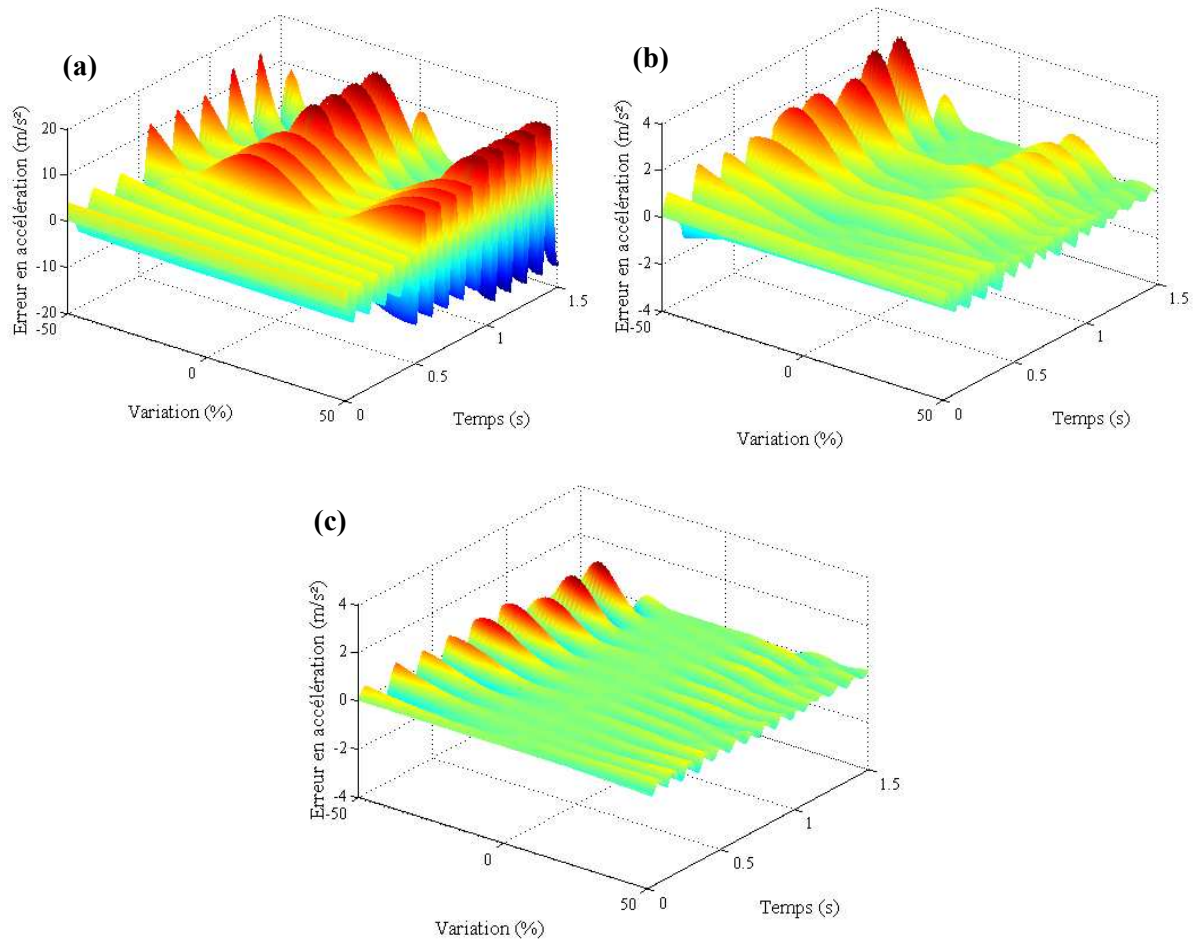
Les précommandes présentées auparavant sont toutes deux basées sur l'inversion d'un modèle (modèle souple pour la précommande souple et modèle rigide pour la précommande rigide), il est donc légitime de se demander si la connaissance de ce modèle influence leurs performances. Cette partie a pour but de mettre en évidence la sensibilité de ces lois de commande face aux variations paramétriques. Pour cela, nous nous plaçons dans le cas linéaire, stationnaire c'est-à-dire que les paramètres modaux sont fixes. Le jeu de paramètres utilisé est le suivant :

$$\begin{aligned} m_1(q) &= 100\text{kg}, m_2(q) = 30\text{kg}, k(q) = 50000\text{N/m} \\ f_{v1} &= f_{v2} = 0 \text{ (pas de frottements)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

La figure 3.24 représente les résultats simulés concernant l'évolution de l'erreur en accélération d'un axe souple auquel on impose les trois lois de commande retenues précédemment. Différentes variations paramétriques peuvent être considérées. Cependant, puisque l'on se trouve en boucle ouverte, toute erreur sur le mode rigide du système (erreur d'estimation des masses modales) conduit à un mouvement qui n'atteint pas la consigne (une erreur statique demeure). Ce type d'erreur ne sera pas étudié dans cette partie puisqu'elle serait naturellement compensée si l'on ajoutait à ces lois de commande une structure d'asservissement. Les erreurs qui nous intéressent plus particulièrement ici sont celles associées à l'estimation de la raideur modale du mode de déformation.

On constate tout de suite que, dans les trois cas, une erreur sur la raideur modale conduit à l'augmentation de l'erreur en accélération. En toute logique, les trois lois de commande présentées précédemment souffrent, comme toute approche du type boucle ouverte, d'un manque de robustesse paramétrique. Par contre, selon la forme de la loi de mouvement et la précommande utilisée, la sensibilité de cette approche peut varier. Il est important de noter que :

1. La précommande rigide associée à une loi de mouvement en accélération limitée n'est pas capable de maîtriser le comportement vibratoire d'un axe souple.
2. En présence d'une raideur mal identifiée, la précommande souple avec une loi de mouvement en Snap limité est la moins sensible. En cas de variations importantes de la raideur modale pendant le mouvement, ce type de précommande sera donc le moins sensible.
3. En pratique, pour les deux dernières lois de commande, il est préférable de sous-estimer la valeur de la raideur modale.



**Figure 3.24 – Evolution de l'erreur en accélération pour une variation de la raideur modale  $k$  de  $\pm 50\%$ .**

**(a) Loi de mouvement en accélération limitée + précommande rigide (b) Loi de mouvement en jerk limité + précommande rigide (c) Loi de mouvement en snap limité + précommande souple.**

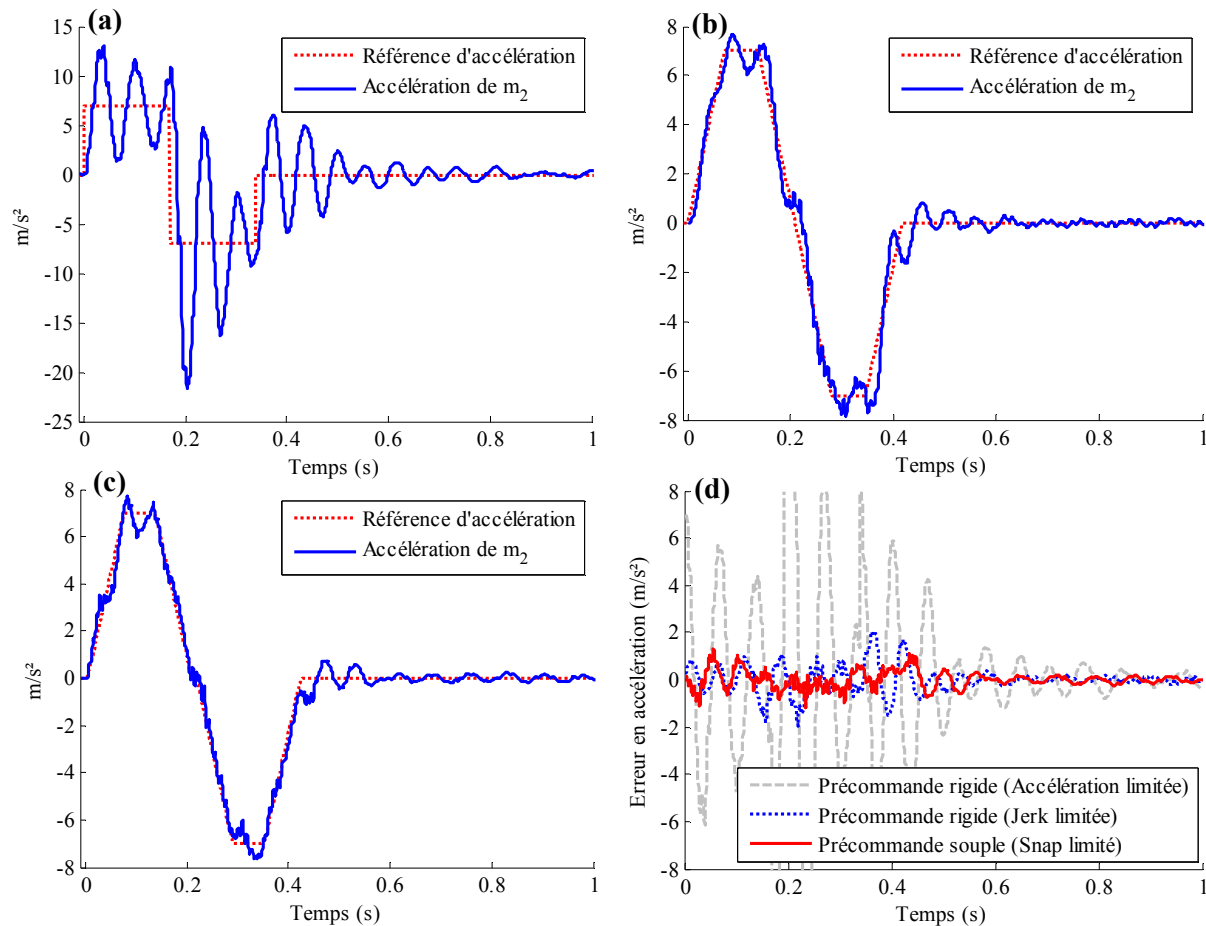
### 3.2.3.5 Validations expérimentales

Les trois lois de commande en boucle ouverte précédentes ont été testées sur l'axe Y du banc d'essais n°1 présenté en Annexe D c'est-à-dire sur celui qui a été modélisé dans le chapitre 2. Le mouvement réalisé correspond à un déplacement de  $0,2 \text{ m}$  avec une accélération maximale de  $7 \text{ m/s}^2$ . Les paramètres utilisés par les trois lois de commande sont ceux identifiés sur le banc d'essai :

$$\begin{aligned} m_1(q) &= 70 \text{ kg}, m_2(q) = 8 \text{ kg}, k(q) = 55000 \text{ N/m}, \\ m_T &= 78 \text{ kg}, f_{v1} = 45 \text{ N/(m/s)}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

La fréquence propre est alors de  $14 \text{ Hz}$ . Dans les cas où le jerk est défini, sa valeur a été fixée pour que les phases à jerk limité durent  $1/14 \text{ Hz} = 0.0714 \text{ s}$ . Pour la loi de mouvement à snap limité, la valeur limite en Snap a été fixée à  $10000 \text{ m/s}^4$ . Pour ces expérimentations, un accéléromètre a été placé sur l'extrémité du bras Z mobile selon la direction Y afin de pouvoir mesurer l'accélération de la masse  $m_2$  et les trois lois de commande ont été testées en totale boucle ouverte c'est-à-dire sans être associées à une structure d'asservissement.

Les résultats expérimentaux sont représentés Figure 3.25, les performances des trois lois de commande en boucle ouverte sont résumées dans le tableau 3.3.



**Figure 3.25 – Résultats expérimentaux pour différentes lois de commande appliquées sur l'axe Y du banc d'essais n°1.**

**(a) Loi de mouvement en accélération limitée + précommande rigide (b) Loi de mouvement en jerk limité + précommande rigide (c) Loi de mouvement en snap limité + précommande souple (d) Erreur en accélération pour les trois cas précédents.**

La précommande souple associée à une loi de mouvement en snap limité permet de réduire de 93% l'erreur maximale en accélération par rapport à la précommande rigide associée à une loi de mouvement en accélération limitée. Cette amélioration se fait bien évidemment au détriment de la durée du mouvement qui augmente de 26,9%.

Si l'on souhaite diminuer la durée du mouvement tout en maîtrisant le comportement vibratoire du système, la précommande rigide associée à une loi de mouvement en jerk limité réalise un bon compromis entre les deux types de lois de commande précédentes.

|                                           | Durée du mouvement  | Erreur maximale en accélération              |
|-------------------------------------------|---------------------|----------------------------------------------|
| Accélération limitée + Précommande rigide | <b>0,338 s</b>      | <b>17,8 m/s<sup>2</sup></b>                  |
| Jerk limité + Précommande rigide          | 0,417 s<br>(+23%)   | 2,05 m/s <sup>2</sup><br>(-88%)              |
| Snap limité + Précommande souple          | 0,429 s<br>(+26,9%) | <b>1,29 m/s<sup>2</sup></b><br><b>(-93%)</b> |

**Tableau 3.3 – Performances obtenues expérimentalement des lois de commande retenues.**

### 3.2.4 Bilan et choix d'un type de loi de mouvement et d'une précommande d'un axe souple

De cette analyse générale, peut découler le choix d'un certain type de loi de mouvement et de précommande en fonction du contexte d'utilisation d'un axe souple et de la connaissance de celui-ci.

La connaissance des paramètres d'un axe souple (masses modales, raideur modale et par conséquent fréquence propre du mode dominant) conditionne le choix d'un type de précommande (Figure 3.26). En effet, dans le cas où les paramètres sont bien identifiés, il paraît plus judicieux d'utiliser une précommande souple qui permet un suivi de trajectoire quasiment parfait au niveau de l'extrémité du bras (représenté par la masse  $m_2$  dans notre modèle souple). Cependant, l'identification de ces paramètres est un processus long, il est donc nécessaire d'utiliser des procédures d'identification ou des algorithmes d'auto-apprentissage (chapitre 5). Dans le cas où cette identification n'est pas envisageable, un compromis entre complexité de réglage et performance globale de la précommande est à réaliser. Il est alors possible de faire appel à une précommande rigide qui nécessite seulement la connaissance de deux paramètres très simples à identifier : la masse totale en mouvement  $m_T$  et le coefficient de frottements visqueux  $f_v$ . L'association de cette précommande rigide à une loi de mouvement en jerk limité, quelque soit la connaissance de la pulsation propre dominante du système à contrôler, est susceptible de diminuer très fortement les vibrations au prix de la perte d'un peu de temps de cycle. Nous possédons, dans ce cas, un moyen systématique et simple à régler pour agir sur le comportement vibratoire d'un axe souple.

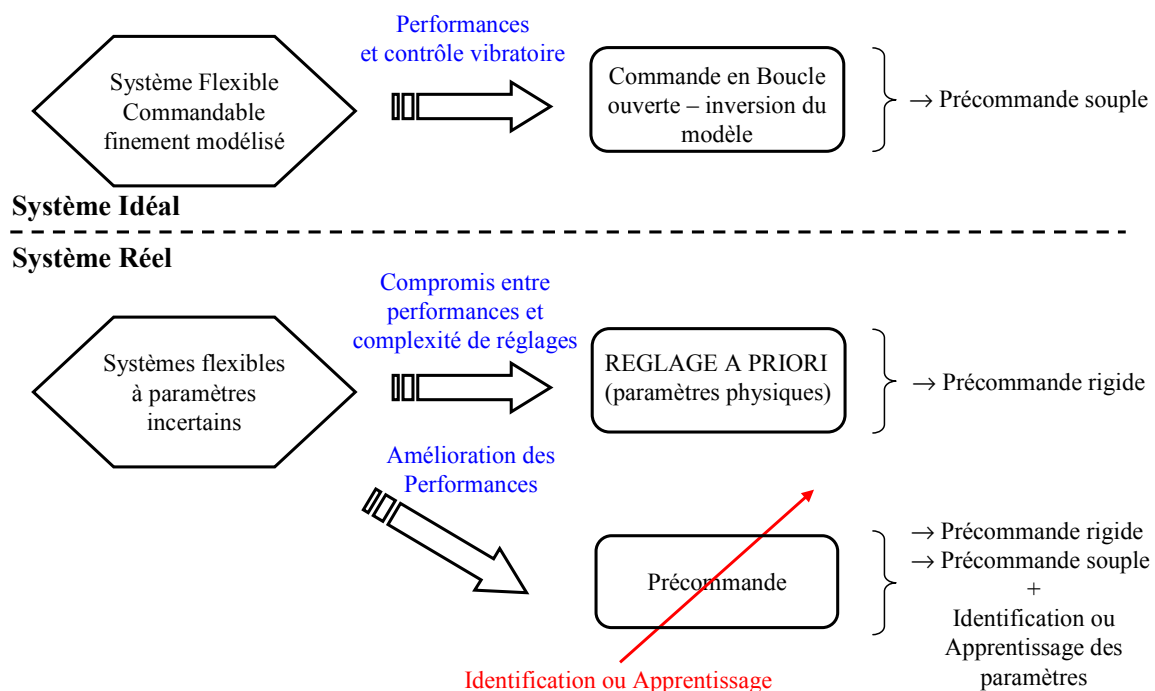


Figure 3.26 – Choix d'un type de précommande.

En ce qui concerne le générateur de lois de mouvement, le choix d'un type de précommande conditionne le degré de continuité minimal que doit satisfaire la loi de mouvement. Pour les systèmes soumis à l'influence de modes vibratoires, tels que les robots cartésiens, la forme de la loi de mouvement détermine de façon significative la durée effective du mouvement ainsi que le niveau de vibrations atteint. Pour les machines réalisant des opérations du type pick-and-place (mouvement point-à-point), la famille des lois de mouvement bang-bang offre la meilleure solution. Pour des

opérations où seule la précision du suivi de trajectoire est privilégiée, il est préférable d'utiliser la douceur qu'apporte une loi de mouvement polynomiale.

Ce travail portant sur les aspects précommande et génération de lois de mouvement d'un axe souple a fait l'objet de nombreux travaux. La loi à jerk limité est utilisée dans la dernière génération des robots SEPRO-Robotique afin d'en améliorer le comportement vibratoire. Cette étude a fait l'objet de publications en congrès [Colas, Dieulot et coll., 2006] et en revue internationale [Dieulot, Thimoumi et coll., 2006].

### 3.3 Synthèse de l'asservissement du moteur (inversion indirecte)

Une précommande seule ne semble pas envisageable pour commander un système industriel puisqu'elle ne permet pas de compenser l'effet d'une perturbation extérieure qui n'est pas connue par avance ou les erreurs liées aux approximations de la modélisation. Il est donc impératif d'ajouter un asservissement qui permet principalement de stabiliser le système autour de la référence de trajectoire utilisée. Ce chapitre est axé sur l'étude de la partie asservissement  $\Psi_{ass}$  (Figure 3.27). Une question importante qui se présente au concepteur est en effet celle du choix de cette structure d'asservissement, de sa méthode de synthèse et de son articulation avec l'architecture générale de commande, sachant qu'un vaste catalogue lui est proposé. Dans la majorité des applications industrielles, des techniques d'asservissement basées sur une régulation du type PID sont largement employées. Cependant, des techniques dites « avancées » sont aussi utilisables (Commande  $H_\infty$ , commande  $H_2$ , commande prédictive, commande adaptative, etc.).

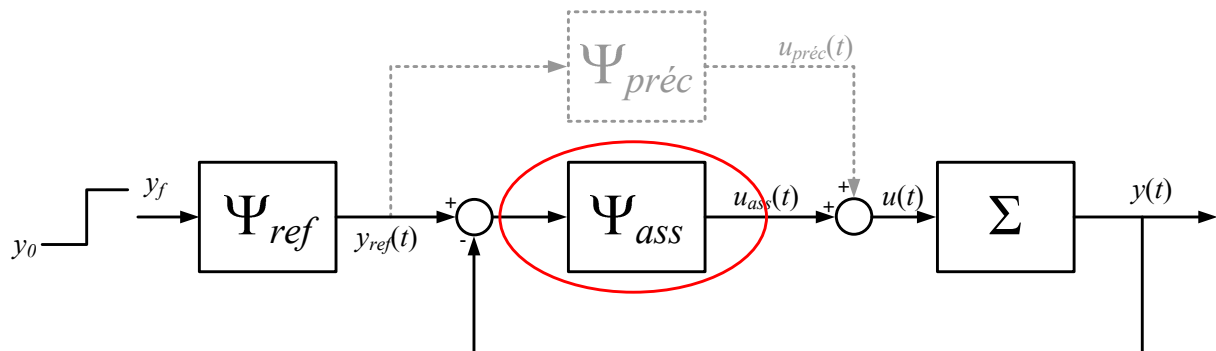


Figure 3.27 – Architecture de commande générique d'un axe.  
(étude de la partie asservissement  $\Psi_{ass}$ )

Cette partie a pour objectif de montrer, dans un premier temps, que certaines techniques d'asservissement sont plus ou moins adaptées à la commande des axes souples dans un contexte d'application industrielle. Ensuite, les structures détaillées de la commande industrielle ainsi que des deux commandes les plus pertinentes (la synthèse de correcteur par approche paramétrique et la commande par retour accélérométrique) seront déduites en appliquant des principes d'inversion et étudiées en détail dans la suite de ce chapitre.

#### 3.3.1 Classification de Techniques d'asservissement adaptées aux axes souples

Une grande partie des différentes classes d'asservissements existantes a pu être testée sur les bancs d'essais présentés en Annexe D. Dans notre démarche déterministe, la synthèse d'un asservissement

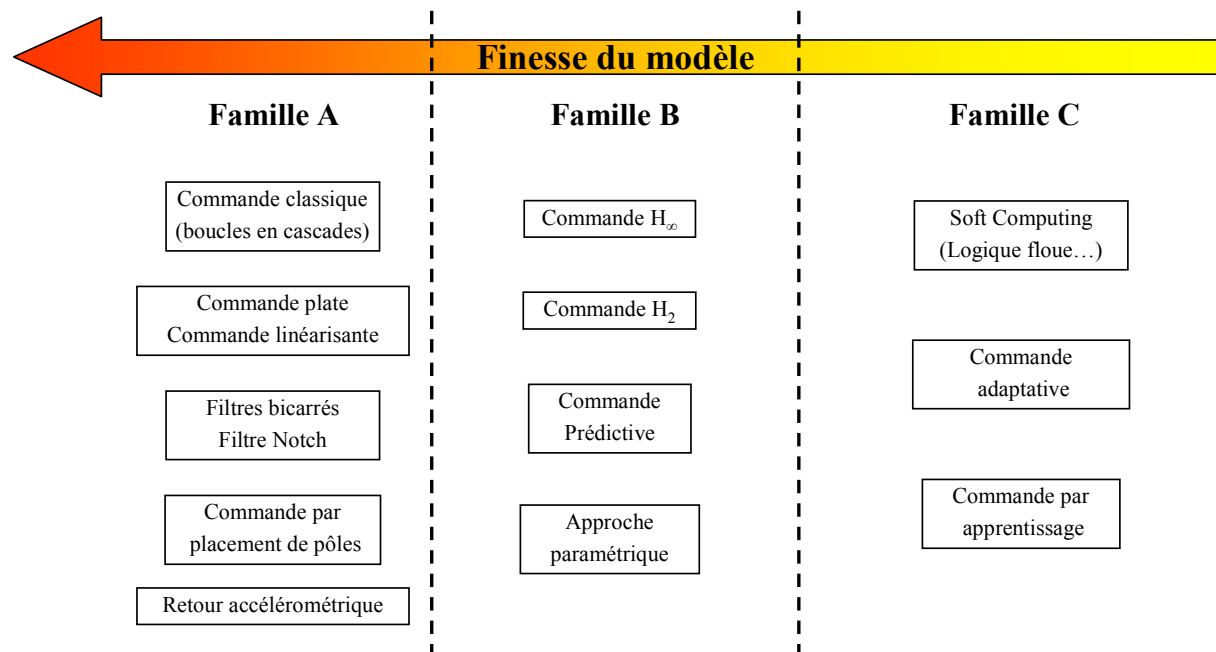
passer nécessairement par l'utilisation de modèles, en vue de proposer une aide au choix d'un asservissement, nous proposons un classement de ces différents types d'asservissement en trois familles (A, B et C) dépendantes de la précision ou de la finesse du modèle de commande. On retrouve :

- A. les asservissements nécessitant un modèle linéaire ou non mais précis,
- B. les asservissements pouvant être conçus à partir d'un modèle comportant des incertitudes structurées,
- C. les asservissements dédiés aux modèles très imprécis ou complètement incertains.

Les architectures de commandes retenues dans cette classification proviennent soit de structures existantes ou ayant été testées antérieurement à nos travaux, soit d'algorithmes développés dans la littérature pour contrôler des systèmes mécaniques rigides ou souples :

- la commande par boucles en cascade qui correspond à l'architecture de commande que l'on retrouve généralement dans les applications industrielles [Ellis et Lorenz, 1999],
- la commande par placement de pôles qui utilise un retour d'état [Borne, Dauphin-Tanguy et coll., 1993],
- la commande par boucles en cascades associée à un filtre coupe-bande (filtre Notch, filtre bicarré) qui permet d'éviter l'excitation des modes vibratoires du système [Dumetz, Barre et coll., 2002],
- les commandes non-linéaires du type commande plate et commande linéarisante qui utilisent certaines propriétés du modèle pour synthétiser le correcteur [Fliess, Lévine et coll., 1995],
- la commande par retour accélérométrique qui utilise une mesure d'accélération pour compenser l'effet d'un mode vibratoire sur le moteur [Dumetz, Dieulot et coll., 2006],
- les commandes prédictives qui se basent sur l'utilisation d'un modèle pour anticiper son comportement et ajuster le correcteur [Richalet, Rault et coll., 1978],
- la commande  $H_\infty$  qui permet de réaliser un compromis entre performances et robustesses vis-à-vis des perturbations extérieures [Doyle, Glover et coll., 1989],
- la commande  $H_2$  (LQ/LQG par exemple) qui permet d'obtenir une commande par retour d'état minimisant un critère quadratique [Borne, Dauphin-Tanguy et coll., 1993],
- les commandes à structure fixe conçues par une approche paramétrique qui permettent d'obtenir un correcteur robuste vis-à-vis des variations paramétriques [Henrion, Arzelier et coll., 2003],
- les commandes adaptatives qui réalisent une identification en temps réel pour actualiser le modèle et la commande du système [Sun et Mills, 1999],
- les commandes par apprentissage adaptées aux systèmes réalisant des tâches répétitives qui utilisent les mesures des tâches précédentes pour actualiser le modèle et la commande du système [Moore, 1998],
- les commandes non-linéaires que nous regroupons sous le terme de « soft computing », du type logique floue [Zadeh, 1965] ou réseaux de neurones [Lippman, 1987].

La répartition de chacune de ces stratégies de commandes dans les trois familles décrites précédemment est illustrée Figure 3.28. Cette répartition par famille dépend essentiellement de la connaissance du système à commander, la synthèse d'une commande linéarisante aura besoin d'un « meilleur » modèle qu'une commande prédictive.



**Figure 3.28 – Répartition des techniques d'asservissement retenues en fonction de la finesse de modélisation.**

Pour déterminer quel type d'asservissement est adapté à la commande d'un axe souple (c'est-à-dire un système dont la fonction de transfert est composée aussi bien au numérateur et au dénominateur d'un second ordre très oscillant), différents critères de sélection et de performance ont été ajoutés à cette répartition par famille :

1. les performances en suivi de trajectoire qui évaluent la capacité d'un asservissement à piloter la position mesurée au niveau du moteur vers sa trajectoire de référence,
2. la robustesse paramétrique qui juge la capacité d'un asservissement à garder des performances acceptables en présence de variations paramétriques (variations de masse totale en mouvement, de fréquence propre, etc.),
3. la robustesse vis-à-vis des perturbations extérieures qui peuvent correspondre à un choc sur l'extrémité de l'axe ou à des bruits de mesure par exemple,
4. l'amortissement des oscillations de la charge qui note l'aptitude d'un asservissement à améliorer le comportement vibratoire au niveau de la charge (extrémité de l'axe souple),
5. la simplicité de réglage correspondant à un critère pragmatique qui permet d'évaluer la facilité de réglage de l'algorithme de commande,
6. la simplicité algorithmique correspondant aussi à un critère pragmatique qui permet d'apprécier la puissance de calcul nécessaire à la mise en place d'un asservissement.

Un graphique du type « radar » est utilisé pour résumer les performances de chacun des asservissements retenus, il se présente sous la forme de la figure 3.29 :

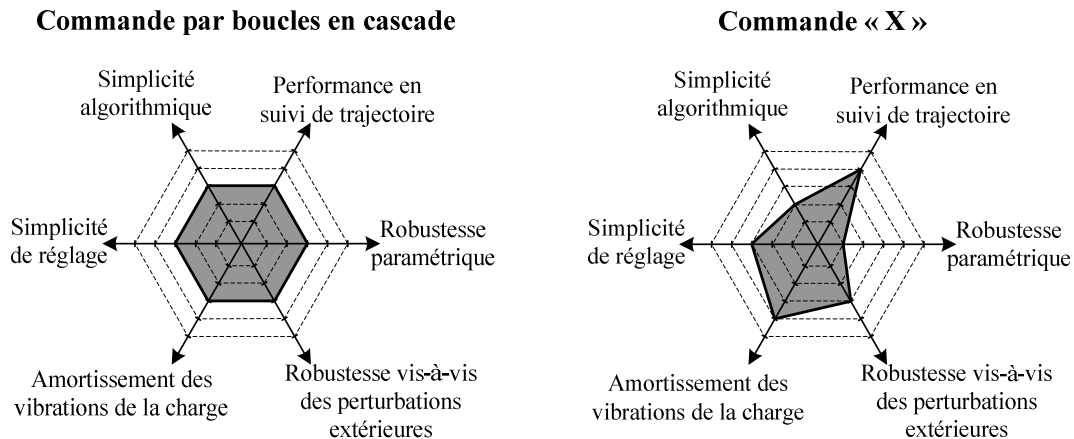


Figure 3.29 – Graphiques utilisés pour évaluer un asservissement.

Les six critères précédents ont tous été représentés sur une échelle allant de -2 à +2 (la note +2 étant la meilleure note), la référence correspondant à la commande par boucles en cascade pour laquelle les critères sont tous notés à 0. Ce type de représentation est un outil de comparaison : la commande « X » représentée Figure 3.29 est, par exemple, beaucoup moins robuste vis-à-vis des variations de paramètres que la commande industrielle mais permet de mieux amortir les vibrations au niveau de la charge et possède de meilleures performances en suivi de trajectoire. Pour simplifier, plus la surface grisée sera étendue, plus l'asservissement sera adapté à la commande d'un axe souple. Bien entendu, ces représentations graphiques restent toujours subjectives mais elles ont vocation à présenter des tendances qui permettent une aide au choix pour le concepteur.

Dans la suite de cette partie, ces types de graphique sont regroupés par famille (A, B et C).

### 3.3.1.1 Famille A – Asservissements basés sur un modèle précis

Parmi les asservissements retenus dans ce comparatif, cinq font partie de la famille A :

- la commande par boucles en cascade,
- la commande par placement de pôles,
- la commande par boucles en cascades associée à un filtre coupe-bande,
- les commandes non-linéaires du type commande plate et commande linéarisante,
- la commande par retour accélérométrique.

La commande classique, présente dans la majorité des variateurs industriels, est celle dite par boucles en cascade. Elle a le désavantage principal d'être lente et peu performante en termes vibratoires, mais elle reste simple à implanter et à régler.

Du fait des incertitudes sur la fonction de transfert, une commande par platitude, ou l'utilisation de filtres coupe-bande n'est pas recommandée [Dumetz, Barre et coll., 2002], le moindre écart sur l'estimation des paramètres du modèle (principalement sur la fréquence du mode dominant) dégrade énormément les performances de ces commandes. Les techniques non-linéaires sont peu intéressantes dans le cas où l'on n'effectue pas de suivi de trajectoire puisque le modèle, lors des phases critiques (départ et arrêt), est localement linéaire.

Une commande par placement de pôle a été testée, sur le modèle rigide, et a donné de « bons » résultats, [Colas, Dieulot et coll., 2006] alors que la conception d'une telle commande à partir d'un modèle souple se heurte à la variation et aux incertitudes sur la fréquence propre. En effet, cette dernière nécessite la conception d'un observateur de la position de la charge à partir de la seule mesure de la position du moteur, ce qui reste délicat en raison du caractère très oscillant du modèle et du niveau d'incertitudes sur les paramètres du modèle souple.

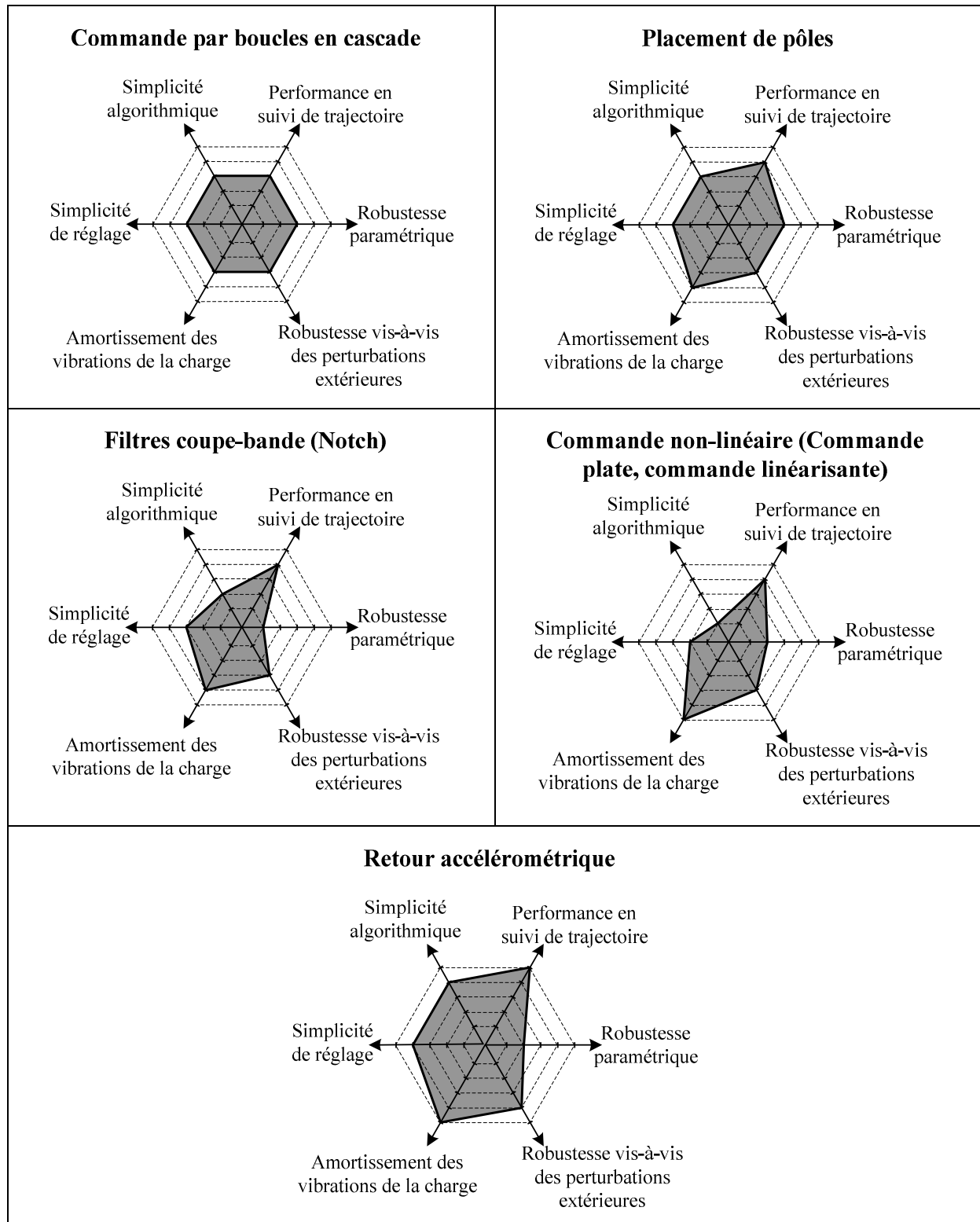


Figure 3.30 – Performances des asservissements de la famille A.

La commande par retour accélérométrique permet d'utiliser une information supplémentaire à moindre coût (mesure d'accélération de la charge) pour maîtriser le comportement vibratoire du système souple. Une étude plus détaillée est présentée par la suite (Chapitre 3.3.4).

Les performances de ces techniques d'asservissement sont résumées Figure 3.30.

### 3.3.1.2 Famille B – Asservissements basés sur un modèle à paramètres incertains

Les asservissements appartenant à la famille B font partie des commandes dites « robustes », quatre techniques d'asservissements retenues appartiennent à cette famille :

- les commandes prédictives,
- la commande  $H_\infty$ ,
- la commande  $H_2$ ,
- les commandes conçues par une approche paramétrique.

Il existe de nombreux types de commandes prédictives : PFC [Richalet, Rault et coll., 1978] [Vivas et Poignet, 2005], DMC [Cutler et Ramaker, 1980], GPC [Clarke, Mohtadi et coll., 1987], etc. Cependant, elles reposent toutes sur le même principe, correspondant à la résolution répétée à chaque pas de temps d'un problème de commande optimale, "comment aller de l'état actuel à un objectif de manière optimale en satisfaisant des contraintes". Pour cela il faut connaître l'état du système à chaque itération et utiliser un outil de résolution numérique [Boucher et Dumur, 1996]. Une commande prédictive a été implantée sur le robot SEPRO (par l'ADERSA), mais son utilisation n'a pas été probante du fait de la complexité du réglage. En effet, comme dans le cas d'une commande par placement de pôles (3.3.1.1), il ne paraît pas judicieux de concevoir une commande prédictive à partir d'un modèle souple. Ce résultat n'a été validé qu'expérimentalement sur les robots cartésiens SEPRO pour lesquels la commande prédictive implantée n'obtient pas de bonnes performances sur les axes « trop souples ».

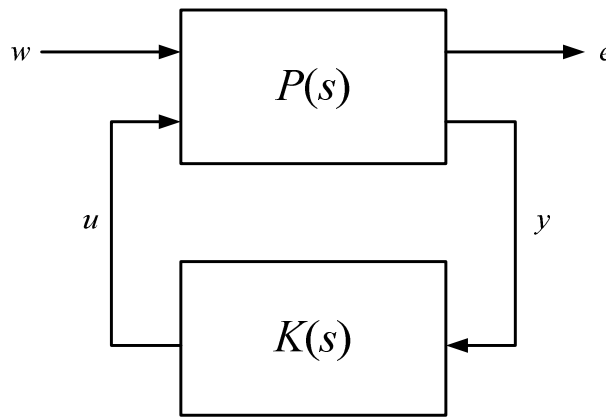
La synthèse  $H_\infty$  utilise la notion de problème standard représenté Figure 3.31 où  $y$  représente l'entrée du correcteur et correspond aux mesures disponibles pour élaborer la commande,  $u$  la commande,  $w$  les signaux extérieurs comme la référence, des bruits de mesures,  $e$  les signaux qui caractérisent la commande et que l'on cherche à optimiser afin de satisfaire au cahier des charges et  $P(s)$  la matrice du système augmenté qui décrit le transfert entre  $w$ ,  $u$  et les sorties  $e$ ,  $y$  :

$$\begin{pmatrix} e \\ y \end{pmatrix} = P(s) \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

On a alors :

$$E(s) = F_l(P(s), K(s))W(s) = (P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s))W(s), \quad (3.35)$$

où  $F_l(P(s), K(s))$  représente la transformation fractionnaire linéaire inférieure,  $E(s)$  et  $W(s)$  respectivement les transformées de Laplace des signaux  $e$  et  $w$ .



**Figure 3.31 – Problème  $H_\infty$  standard.**

Le principe d'une commande  $H_\infty$  est de déterminer tous les correcteurs  $K(s)$  qui stabilisent le système bouclé et qui assurent  $\|F_t(P(s), K(s))\|_\infty < \gamma$ ,  $P(s)$  et  $\gamma > 0$  étant donnés. Les correcteurs  $H_\infty$  qui minimisent la valeur de  $\gamma$  sont dits optimaux. La méthode la plus courante utilisée pour résoudre ce type de problème utilise l'algorithme de Glover-Doyle qui consiste à s'approcher de la valeur optimale de  $\gamma$  par dichotomie [Balas, Doyle et coll., 2001].

Cette méthode a comme principal avantage d'automatiser la synthèse d'un correcteur néanmoins, elle s'applique sur les systèmes linéaires et les correcteurs obtenus sont généralement d'ordre élevé, ce qui a une incidence sur la puissance du calculateur nécessaire à l'implantation de ce correcteur. Elle permet aussi de trouver un correcteur qui permet de rejeter les perturbations extérieures (en minimisant le transfert entre cette perturbation et la sortie du système). Les incertitudes paramétriques sont cependant très difficiles à prendre en compte. Dans ce cas, les incertitudes sont structurées et il est nécessaire de faire appel à la valeur singulière structurée  $\mu$  et à la D-K itération [Packard et Doyle, 1993], algorithme dont la convergence n'a pas été montrée et qui reste lourd à mettre en œuvre.

La synthèse  $H_2$  permet quant à elle, à l'instar d'une synthèse  $H_\infty$ , de minimiser la norme  $H_2$  du transfert entre  $e$  et  $w$ . Ce type de synthèse s'avère très robuste lorsque l'état complet du système est mesuré, ce qui n'est généralement pas le cas d'un axe souple où aucun capteur de position ou de vitesse n'est placé sur l'extrémité du bras. Dans le cas où l'état complet n'est pas mesuré, il est nécessaire de mettre en place un observateur, les propriétés de robustesse de la commande  $H_2$  ne sont alors plus valables et les marges de stabilité peuvent devenir arbitrairement petites [Doyle, 1978] spécifiquement lors de la commande d'un système très oscillant.

Une commande par synthèse paramétrique a pu être mise en place en utilisant des outils de type LMI (Inégalité Matricielle Linéaire cf. Glossaire) et sera détaillée ultérieurement. Elle permet de respecter au maximum le cahier des charges en considérant les incertitudes paramétriques sur le mode souple, pour un correcteur à structure imposée (un correcteur du type PID dans notre cas), dont les paramètres sont initialisés par le modèle rigide.

Les performances de ces commandes sont résumées dans la Figure 3.32.

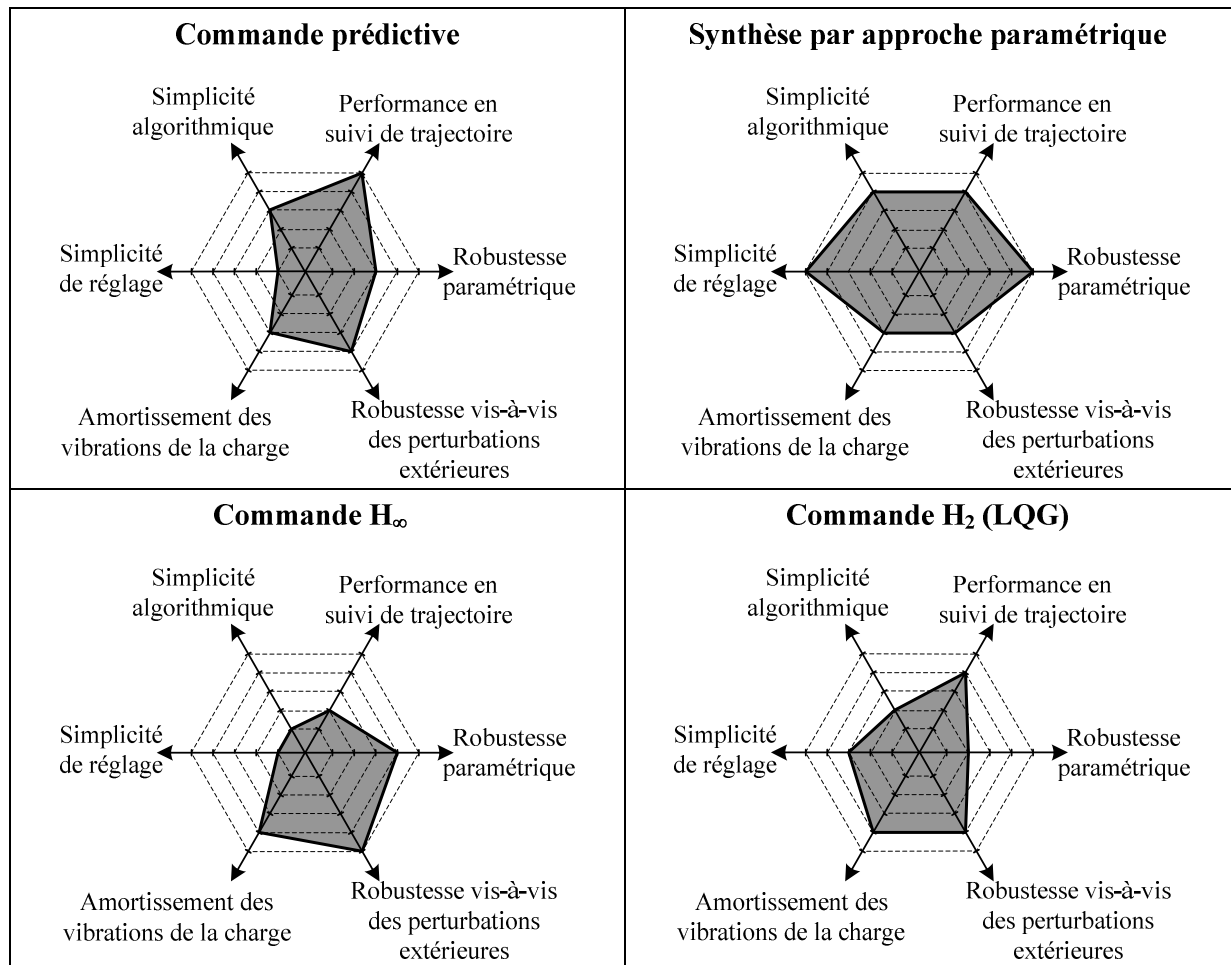


Figure 3.32 – Performances des asservissements de la famille B.

### 3.3.1.3 Famille C – Asservissements basés sur un modèle très incertain

Les asservissements appartenant à la famille B font parties des commandes capables de s'adapter au système à commander, trois techniques d'asservissements retenues appartiennent à cette famille :

- les commandes par apprentissage,
- les commandes adaptatives,
- la commande du type « soft computing ».

La commande adaptative pourrait permettre de compenser en temps réel les variations des paramètres ; en pratique, cette technique nécessite l'existence d'une excitation persistante [Astrom et Wittenmark, 1994], ce qui n'est pas le cas puisque, entre deux points d'arrivée, les modes souples n'entrent pas en résonance et les oscillations se produisent après arrêt de la machine.

Par contre, on pourra bénéficier d'une surcouche d'apprentissage qui est justifiée par la répétitivité des tâches. Cette surcouche d'apprentissage complétée par un algorithme de commande peut être utilisée, par exemple, comme un outil d'identification de paramètres. L'amélioration de la connaissance des paramètres permettra d'améliorer en parallèle les performances de la commande utilisée, nous renvoyons le lecteur au Chapitre 5 qui présente ce principe d'apprentissage.

Les techniques de Soft Computing ne sont pas adaptées à notre problème de commande (structure de modèle assez bien connue) et sont encore trop complexes à implanter et à régler pour des systèmes industriels tels que des robots cartésiens. Parmi ces commandes, on peut citer la commande par logique floue [Zadeh, 1965], la commande par réseaux de neurones [Lippman, 1987] ou les systèmes experts [Ignizio, 1991]. Toutes ces techniques peuvent être apparentées à de l'intelligence artificielle.

Les performances de ces commandes sont résumées dans la Figure 3.33.

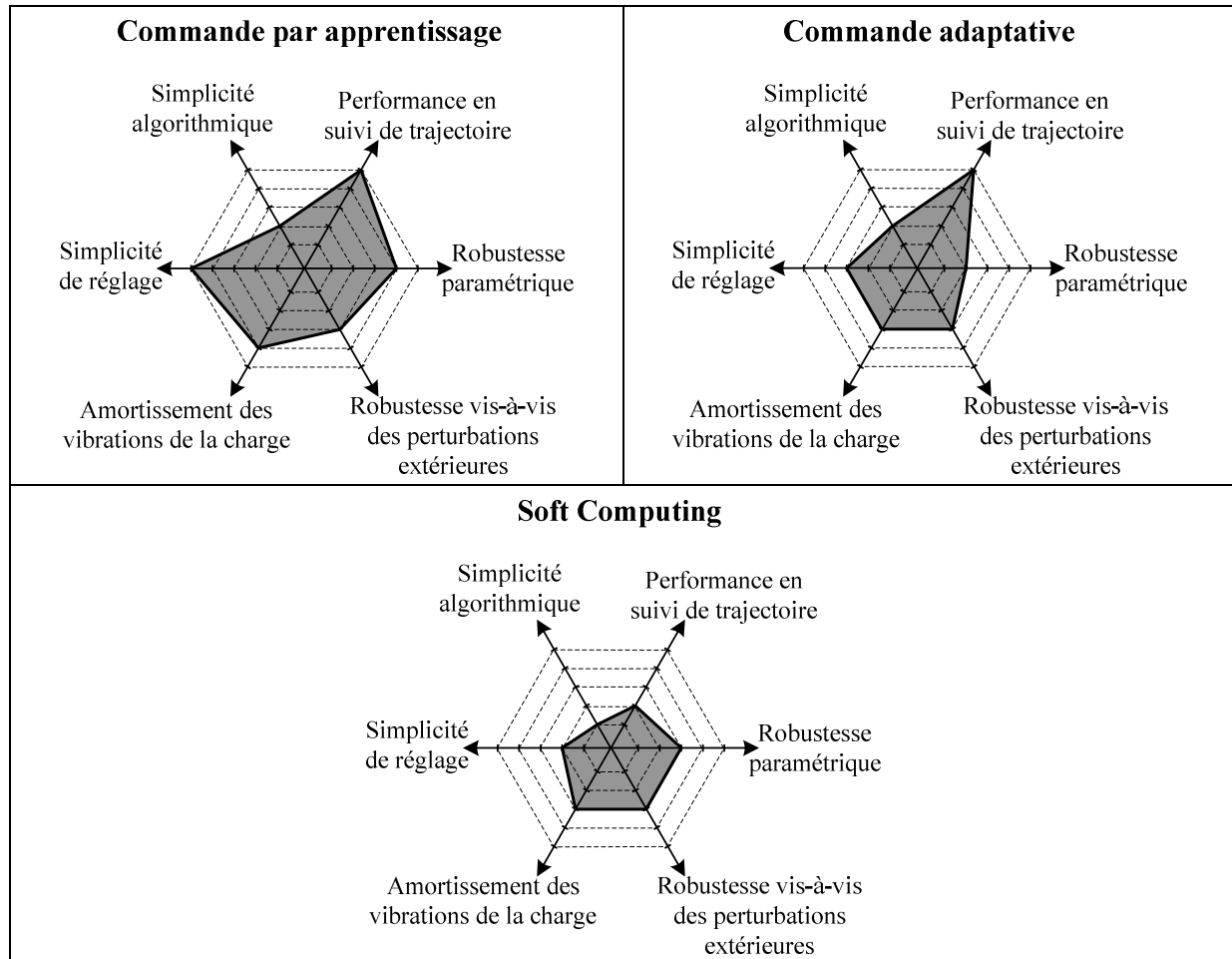
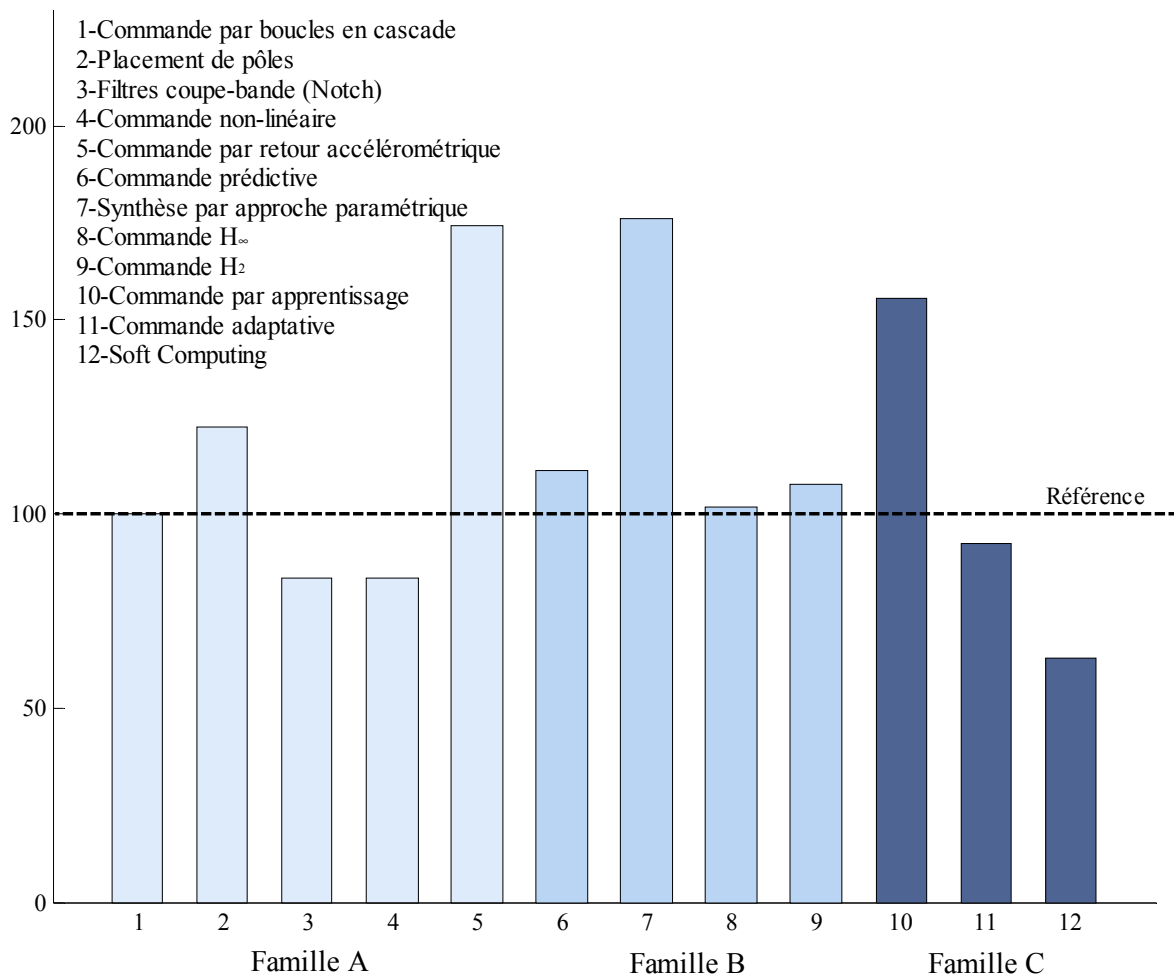


Figure 3.33 – Performances des asservissements de la famille C.

### 3.3.1.4 Bilan sur les techniques d'asservissement adaptées à la commande des axes souples

De manière générale, on peut constater que le choix de l'algorithme de commande dépend autant de la qualité du modèle que des critères généraux émis pour les objectifs du cahier des charges et en particulier, des objectifs tels que le suivi de trajectoires ou le ralliement d'un point terminal. Parmi toutes les commandes retenues, la commande par retour accélérométrique et la synthèse de correcteurs par approche paramétrique semblent être les mieux adaptées à la commande d'un axe souple ; les surfaces grisées sont les plus étendues pour ces deux asservissements, la Figure 3.34 présente, en effet, la valeur de ces surfaces avec une base 100 pour la commande par boucles en cascade qui nous sert de référence.



**Figure 3.34 – Aire des surfaces grisées pour chacun des asservissements retenus.  
(base 100 pour la commande par boucles en cascades)**

La commande la plus intéressante est la commande par retour accélérométrique, pour laquelle l'adjonction d'un capteur d'accélération sur la charge permet d'obtenir une commande quasiment parfaite lorsque le modèle est « bien » connu. Les performances obtenues dépendent donc de la précision du modèle, des techniques d'apprentissage présentées au Chapitre 5 peuvent l'améliorer. Cette commande est aisément réglable, son seul inconvénient est le coût supplémentaire dû au capteur.

Lorsque l'ajout d'un tel capteur n'est pas envisageable, une synthèse de correcteur utilisant des approches paramétriques permet de maîtriser, contrairement aux méthodes  $H_\infty$ , la forme du correcteur et de prendre en compte, dès la conception, les incertitudes sur les paramètres du modèle, qui prévalent sur d'autres types d'incertitudes (perturbations extérieures, erreurs de structure sur le modèle, etc.).

Dans la suite de ce chapitre, trois types d'asservissement seront donc étudiés de manière approfondie, la commande industrielle qui nous a servi de référence dans le comparatif précédent, la synthèse de correcteur par approche paramétrique et la commande par retour accélérométrique.

### 3.3.2 Commande industrielle – Commande par boucles en cascade

Cette partie a pour but d'étudier la structure de commande par boucles en cascade utilisée généralement en industrie dans la commande des axes linéaires afin de comprendre quelles sont les

principales limitations de cette technique d'asservissement sur les performances des axes souples. Comme pour le comparatif précédent, cette commande sert de base de comparaison pour les autres commandes étudiées ensuite.

### 3.3.2.1 Structure générale d'une commande par boucles en cascade

Lorsqu'il est possible de mesurer des variables intermédiaires caractéristiques de l'évolution du processus, on peut envisager la réalisation de régulations en cascades, du type boucles imbriquées. La figure 3.35 représente ce principe de régulation. Le système à contrôler est représenté par l'association des processus  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ . En supposant que l'on puisse mesurer chacune des sorties de ces processus, il est possible, en associant en cascades les régulateurs  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ , de contrôler la sortie  $y$ . La synthèse de ces régulateurs peut alors se faire de façon indépendante si la dynamique des boucles internes ne perturbe pas le comportement des boucles externes. Cela implique une dynamique plus élevée pour les boucles internes.

Cette méthode de régulation permet de transformer une synthèse de commande mono-entrée/multi-sorties en une synthèse mono-entrée/mono-sortie sur chaque boucle.

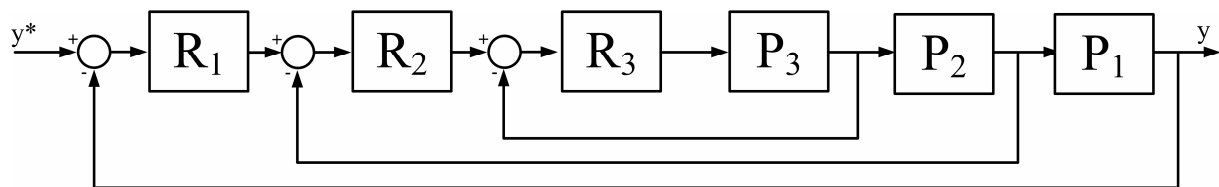


Figure 3.35 – Structure générale d'une régulation en cascade.

Ce principe de régulation peut se déduire directement en appliquant les principes d'inversion au système représenté par les processus  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  (Figure 3.36).

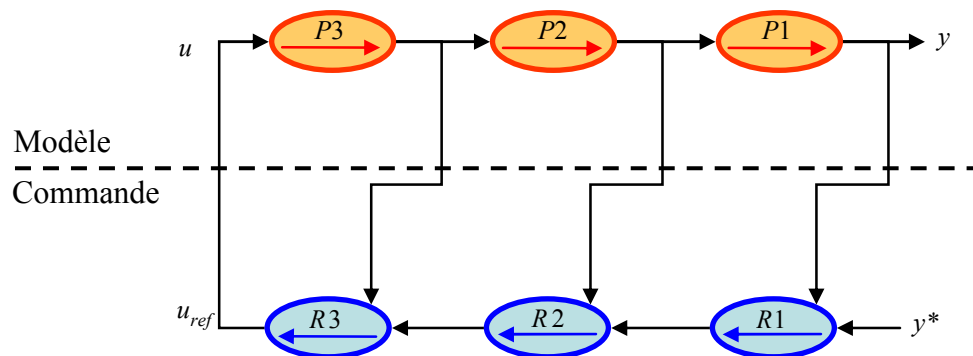
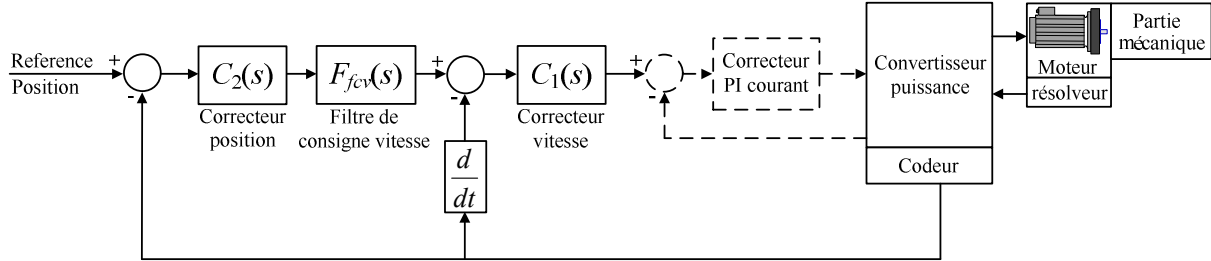


Figure 3.36 – Illustration du principe d'une régulation en cascade en appliquant les principes d'inversion propres au GIC.

### 3.3.2.2 Application à un axe souple

La figure 3.37 présente la structure de commande utilisée généralement pour la commande des axes souples. Elle est notamment utilisée dans la commande des axes des robots cartésiens SEPRO Robotique. L'application des principes d'inversion sur un modèle rigide permet de retrouver naturellement cette structure d'asservissement. Comme nous le verrons par la suite, ce type d'asservissement ne prend donc pas en compte les souplesses du système et ne permet donc pas de maîtriser le comportement vibratoire d'un système souple.

On retrouve la structure de régulation en cascades c'est-à-dire trois boucles fermées de dynamique croissante. La boucle de courant (la plus rapide) est insérée dans la boucle de vitesse, elle même intégrée dans la boucle de position (la plus lente). La consigne de la boucle de courant correspond à la sortie de la boucle de vitesse, la consigne de la boucle de vitesse correspond à la sortie de la boucle de position.



**Figure 3.37 – Structure de la commande par boucles en cascades.**

La dynamique de la boucle de courant étant très élevée par rapport aux autres phénomènes physiques intervenant dans le système, elle sera négligée et on considèrera dans la suite de cette étude que le courant moteur est équivalent à sa consigne (l'actionneur est alors considéré comme un actionneur d'effort).

La boucle de vitesse est constituée d'un correcteur Proportionnel-Intégral (correcteur PI), la mesure vitesse moteur étant déduite par dérivation numérique de la mesure position moteur. La boucle de position est constituée d'un correcteur Proportionnel (P) suivi d'un filtre passe-bas appelé filtre de consigne vitesse. L'expression dans le domaine de Laplace de chacun de ses éléments est donné par :

$$C_1(s) = k_v \left( \frac{1 + \tau_i s}{\tau_i s} \right), C_2(s) = k_p \text{ et } F_{fcv}(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{2\pi f_{fcv}}}, \quad (3.36)$$

où  $k_v$  est appelé gain proportionnel de vitesse,  $\tau_i$  constante de temps intégrale,  $k_p$  gain proportionnel de position et  $f_{fcv}$  fréquence de coupure du filtre de consigne vitesse.

Industriellement sur les robots SEPRO Robotique, cette structure d'asservissement est totalement intégrée dans un variateur. Seule la référence de position est gérée indépendamment du variateur, cette référence de position qui lui est envoyée lors d'un ordre de déplacement étant un « bang-bang » d'accélération (Voir Chapitre 3.2.1.3). Elle correspond à un déplacement en temps optimal pour une masse en mouvement avec des limites en accélération et en vitesse.

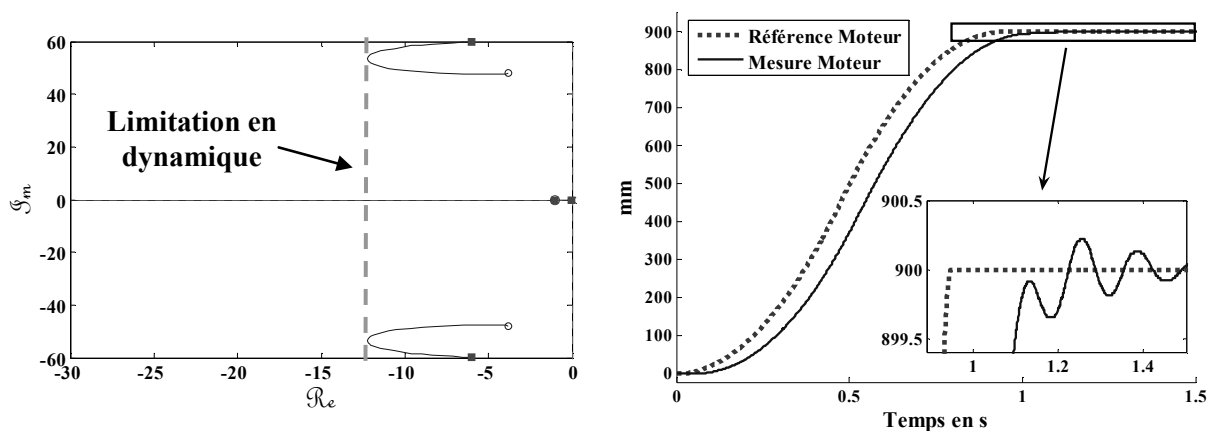
Nous ne détaillerons pas les travaux liés à cette commande, déjà longuement évoqués dans [Barre, Béarée et coll., 2005], [Béarée, Barre et coll., 2004] et [Erkorkmaz, Yeung et coll., 2006]. Notons simplement les principaux résultats illustrés par quelques exemples :

- pour un système possédant un numérateur et un dénominateur oscillants (fonction de transfert entre la position de la masse  $m_1$  par rapport à la commande  $u$  dans le cas d'un modèle souple), le lieu d'Evans de la boucle de vitesse montre qu'il n'est pas possible de dépasser la fréquence propre en boucle ouverte, et simplement de limiter l'amortissement ; on peut bien entendu utiliser des filtres coupe-bande – notch – mais il est bien connu que ces techniques ne sont pas robustes vis-à-vis des incertitudes en fréquence [Dumetz, Barre et coll., 2002],
- on remarque enfin le retard relativement important en termes de positionnement (à titre d'exemple, 15 % de retard par rapport à la consigne sur un déplacement en X de 1 m pour le

banc d'essais n°1 présenté en Annexe D), qui ne peut être diminué qu'en augmentant les gains, et par conséquent les vibrations.

Du point de vue industriel, les avantages de la structure en cascade considérée sont :

- + une **mise en route** et un **réglage simples**, étape par étape, en partant de la boucle la plus interne vers les boucles externes,
- + une gestion facilitée des **saturation**s et des **surveillances**,
- + les **dynamiques rapides** sont compensées par les boucles les plus internes,
- + une **bonne régulation** : les perturbations sont rejetées au niveau le plus efficace,
- la cascade impose une dynamique d'ensemble **moins rapide** qu'un correcteur centralisé, puisque les erreurs dynamiques se multiplient.



**Figure 3.38 – Lieu d'Evans de la boucle de vitesse constituée d'un processus souple et résultats obtenus expérimentalement pour un déplacement de 0,9 m de l'axe X du banc d'essais n°1.**

En conclusion, la commande par boucle en cascade, si elle bénéficie d'une solide « expérience » de réglage, est inférieure, en termes de performances (amortissement et rapidité) à la commande PID [Ellis et Lorenz, 1999] – en réalité elle est équivalente à une commande PID avec des coefficients interdépendants – ce que nous avons pu confirmer expérimentalement. Seule l'utilisation d'anticipations judicieusement choisies permet d'obtenir des performances conséquentes, mais, comme toute précommande en boucle ouverte, leur réglage peut s'avérer sensible aux variations paramétriques (Voir Chapitre 3.2.3.4).

### 3.3.3 Synthèse de correcteur par approche paramétrique

Contrairement à l'approche par boucles en cascades, pour laquelle les variables physiques (courant, vitesse et position) sont gérées consécutivement, une commande par placement de pôles n'asservira que la position (seul signal disponible sur le système). Le correcteur utilisé sera par conséquent plus complexe que les simples correcteurs P ou PI utilisés par une commande par boucles en cascade. La mise au point d'une telle commande doit tenir compte des attendus du cahier des charges et des contraintes en termes d'incertitudes sur les paramètres du modèle, une méthode de réglage est donc à déterminer.

Les travaux qui vont suivre s'inspirent directement des méthodes polynomiales développées en particulier par [Henrion, Arzelier et coll., 2003]. L'idée est issue de travaux résumés dans l'ouvrage de

Bhattacharyya et coll. [Bhattacharyya, Chapellat et coll., 2002], inspirés par les travaux de Kharitonov sur les systèmes linéaires incertains. Le principe de cette méthode de réglage consiste à utiliser des techniques d'optimisation basée sur des résolutions d'inégalités matricielles linéaires (LMI) pour synthétiser un correcteur à structure fixe. Cette conception doit aboutir à un correcteur ayant des performances robustes vis-à-vis des incertitudes paramétriques. Dans le cas de la commande des axes souples, le correcteur obtenu doit garantir un niveau de performances quelque soit la position du robot.

### 3.3.3.1 Principe de l'approche paramétrique

On rappelle que l'on définit comme une LMI une relation du type :

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_n F_n \succ 0 \quad (3.37)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur réel,  $F_0 \dots F_n$  sont des matrices symétriques réelles, l'inégalité  $\succ$  signifie définie positive. De nombreux solveurs permettent de résoudre un ensemble d'inégalités matricielles qui est un problème convexe [Boyd, Ghaoui et coll., 1994], dans cette étude nous avons utilisé le logiciel YALMIP [Lofberg, 2004] qui sert de préprocesseur pour le logiciel de résolution dsdp [Benson et Ye, 2005].

**Définition 5 (Domaine de stabilité)** *Un domaine de stabilité est une région du plan complexe qui satisfait la LMI suivante :*

$$\mathcal{D} = \left\{ s \in \mathbb{C}, \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}^* \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ b^* & c \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} < 0 \right\}. \quad (3.38)$$

Un domaine de stabilité permet de représenter des parties du plan complexe correspondant à des critères standards (stabilité exponentielle, facteur d'amortissement minimal...) par exemple un cercle, un demi-plan borné ou un secteur angulaire, suivant les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$  (Figure 3.39).

**Définition 6 ( $\mathcal{D}$ -stabilité)** *Soit  $\mathcal{D}$  un domaine de stabilité, un polynôme  $P(s)$  est  $\mathcal{D}$ -stable si toutes ses racines appartiennent à  $\mathcal{D}$ .*

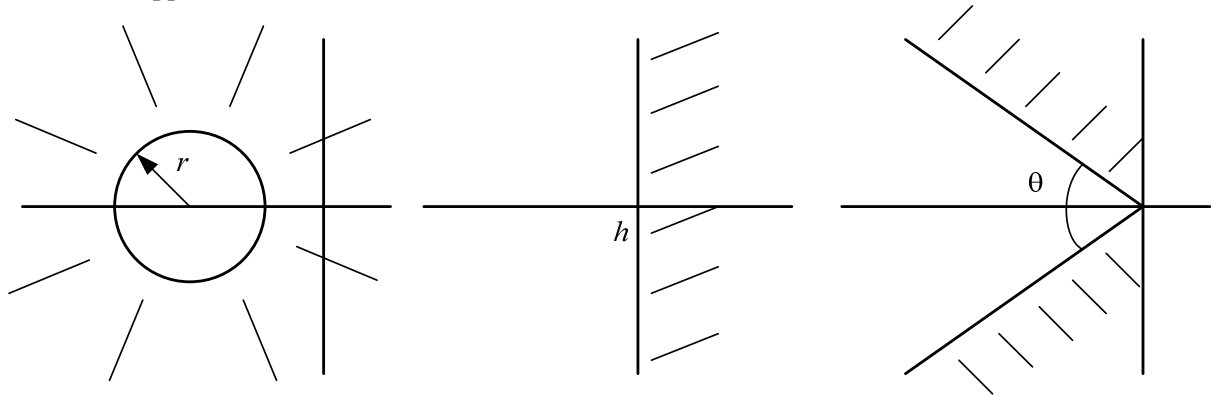


Figure 3.39 – Domaines de stabilité usuels.

**Théorème 4 [Henrion, Arzelier et coll., 2003]** Soit  $\mathcal{D}$  un domaine de stabilité défini par (3.38), un polynôme  $N$  de degré  $n$  ( $N(s) = \sum_{i=0}^n N_i s^i$ ) est  $\mathcal{D}$ -stable si et seulement si il existe un polynôme  $D$  de degré  $n$  ( $D(s) = \sum_{i=0}^n D_i s^i$ )  $\mathcal{D}$ -stable et une matrice  $P$  de taille  $n$  qui vérifie la relation suivante :

$$D^T N + N^T D - H(P) \succ 0, P = P^T \quad (3.39)$$

où  $D = (D_0 \dots D_n)$  représente les coefficients de  $D(s)$ ,  $N = (N_0 \dots N_n)$  les coefficients de  $N(s)$  et

$$H(P) = \Pi^* (H \otimes P) \Pi = \Pi^* \begin{pmatrix} aP & bP \\ b^*P & cP \end{pmatrix} \Pi \text{ avec } \Pi = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \\ 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

Lorsque le polynôme  $N$  est soumis à des incertitudes polytopiques, c'est-à-dire  $N$  appartient à un hypercube possédant  $K$  arrêtes  $N_i$  :

$$N(s) = N(s, \lambda) = \sum_{i=1}^K \lambda_i N_i(s) \text{ avec } \sum_{i=1}^K \lambda_i = 1, \quad (3.40)$$

on peut utiliser le résultat suivant :

**Théorème 5 [Henrion, Arzelier et coll., 2003]** Soit  $\mathcal{D}$  un domaine de stabilité défini par (3.38), un polynôme  $N$  soumis à des incertitudes polytopiques (3.40) est  $\mathcal{D}$ -stable si et seulement si il existe un polynôme  $D$   $\mathcal{D}$ -stable et des matrices  $P_i$  qui vérifient les relations suivantes :

$$D^T N_i + N_i^T D - H(P_i) \succ 0, P_i = P_i^T \quad (3.41)$$

où  $D = (D_0 \dots D_n)$  représente les coefficients de  $D(s)$ ,  $N_i = (N_{i0} \dots N_{in})$  les coefficients de  $N_i(s)$  et

$$H(P_i) = \Pi^* (H \otimes P_i) \Pi = \Pi^* \begin{pmatrix} aP_i & bP_i \\ b^*P_i & cP_i \end{pmatrix} \Pi \text{ avec } \Pi = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \\ 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

Il est important de noter que lorsque le polynôme  $D$  est fixé, les relations (3.39) et (3.41) représentent des LMI puisqu'elles deviennent affines en  $N$  et  $P$ .

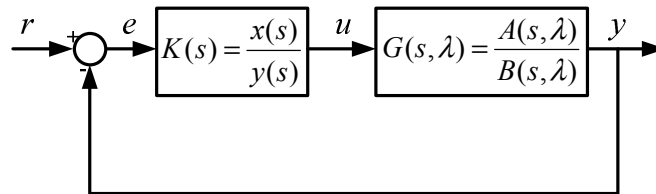


Figure 3.40 – Système incertain à asservir.

Il est alors très facile d'utiliser les deux théorèmes précédents pour un système asservi (Figure 3.40) ayant des incertitudes paramétriques polytopiques où  $G(s, \lambda)$  correspond au système à asservir (les incertitudes paramétriques sont représentées par  $\lambda$ ) et  $K(s)$  au correcteur à concevoir. Le polynôme caractéristique du système bouclé a pour expression :

$$N(s, \lambda) = A(s, \lambda)x(s) + B(s, \lambda)y(s). \quad (3.42)$$

Les incertitudes  $\lambda$  étant des incertitudes polytopiques, on a :

$$N(s, \lambda) = \sum_i A_i(s, \lambda)x(s) + B_i(s, \lambda)y(s) = \sum_i N_i(s, \lambda) \quad (3.43)$$

D'après le Théorème 5, pour un domaine de stabilité  $\mathcal{D}$  choisi et un polynôme  $D(s)$   $\mathcal{D}$ -stable fixé, la résolution des inégalités matricielles (LMI) suivantes :

$$\forall i \quad D^T N_i(x, y) + N_i^T(x, y)D - H(P_i) \succ 0, P_i = P_i^T \quad (3.44)$$

où  $N_i(x, y)$  est le vecteur représentant les coefficients de  $N_i(s, \lambda)$ , **permet d'obtenir un correcteur d'ordre fixé** par l'ordre du polynôme  $D(s)$ .

Notons que ce type de résultat est une extension, moins conservatrice, de théorèmes de type Kharitonov ou Edge (de manière simple, un polynôme dont les coefficients appartiennent à un hypercube est stable si les polynômes situés aux arêtes de l'hypercube sont stables). Autrement dit, les conditions du Théorème 5 étant suffisantes lorsque le polynôme  $D(s)$  est fixé, il n'y a aucune garantie pour que le correcteur obtenu ne soit pas « surdimensionné » en termes de robustesse (et donc moins rapide) ; par contre cette technique permet d'obtenir des performances bien meilleures que celles résultant d'approches paramétriques plus grossières.

Notons aussi l'importance que joue le polynôme  $D(s)$  appelé polynôme central, la possibilité de résoudre les LMI (3.44) dépend essentiellement du choix de celui-ci. Il est conseillé de choisir ce polynôme comme celui issu de la conception d'un correcteur à partir d'un modèle nominal  $G(s, \lambda_0)$ .

L'intérêt de ce type d'approche de synthèse réside principalement dans sa rapidité d'exécution, les solveurs dédiés étant très puissants et très rapides. Il est, de plus, très facile de maîtriser l'ordre du correcteur obtenu, en fixant l'ordre du polynôme central.

### 3.3.3.2 Application à la synthèse d'un asservissement d'un axe souple

On considère, dans cette partie, l'asservissement d'un axe souple modélisé par le système masse-ressort présenté Figure 3.41 déjà illustré dans le Chapitre 2, les frottements sont négligés pour des raisons de simplicité. Avant d'appliquer les résultats précédents à la conception d'un asservissement, il est tout d'abord nécessaire de fixer la structure générale de régulation adaptée à ce modèle.

Dans le cadre de notre démarche déterministe, cette structure générale est déduite à partir des principes d'inversion appliqués au GIC de ce système masse-ressort (Figure 3.42). Cette inversion permet de déduire la façon d'utiliser les informations disponibles sur le système. Les deux leviers déjà présentés en début de Chapitre (asservissement + précommande) apparaissent alors clairement. La partie précommande ne sera pas détaillée ici, nous renvoyons le lecteur au Chapitre 3 pour sa conception. Cependant, il est important de noter que le modèle servant de base à la conception de la partie précommande ne correspond pas nécessairement au modèle servant de base à la conception de la partie asservissement. Dans notre cas, la précommande utilisée peut être une précommande souple ou rigide (cf. Chapitre 3).

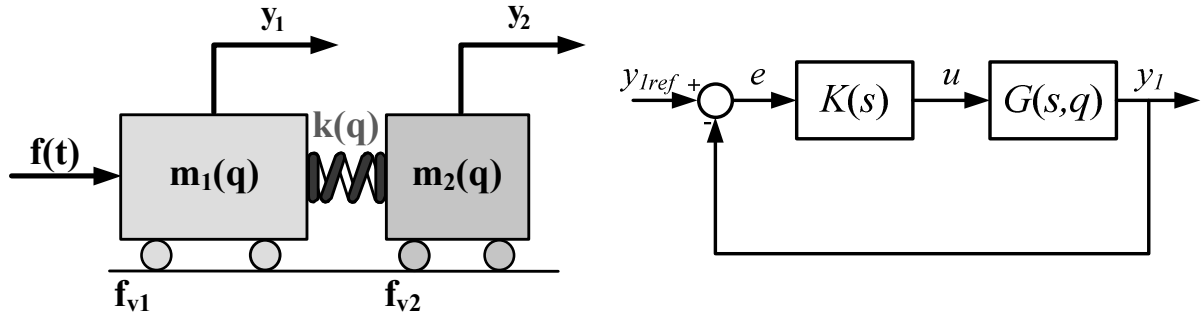


Figure 3.41 – Modèle et Asservissement d'un axe souple à partir du capteur de position de  $m_1$ .

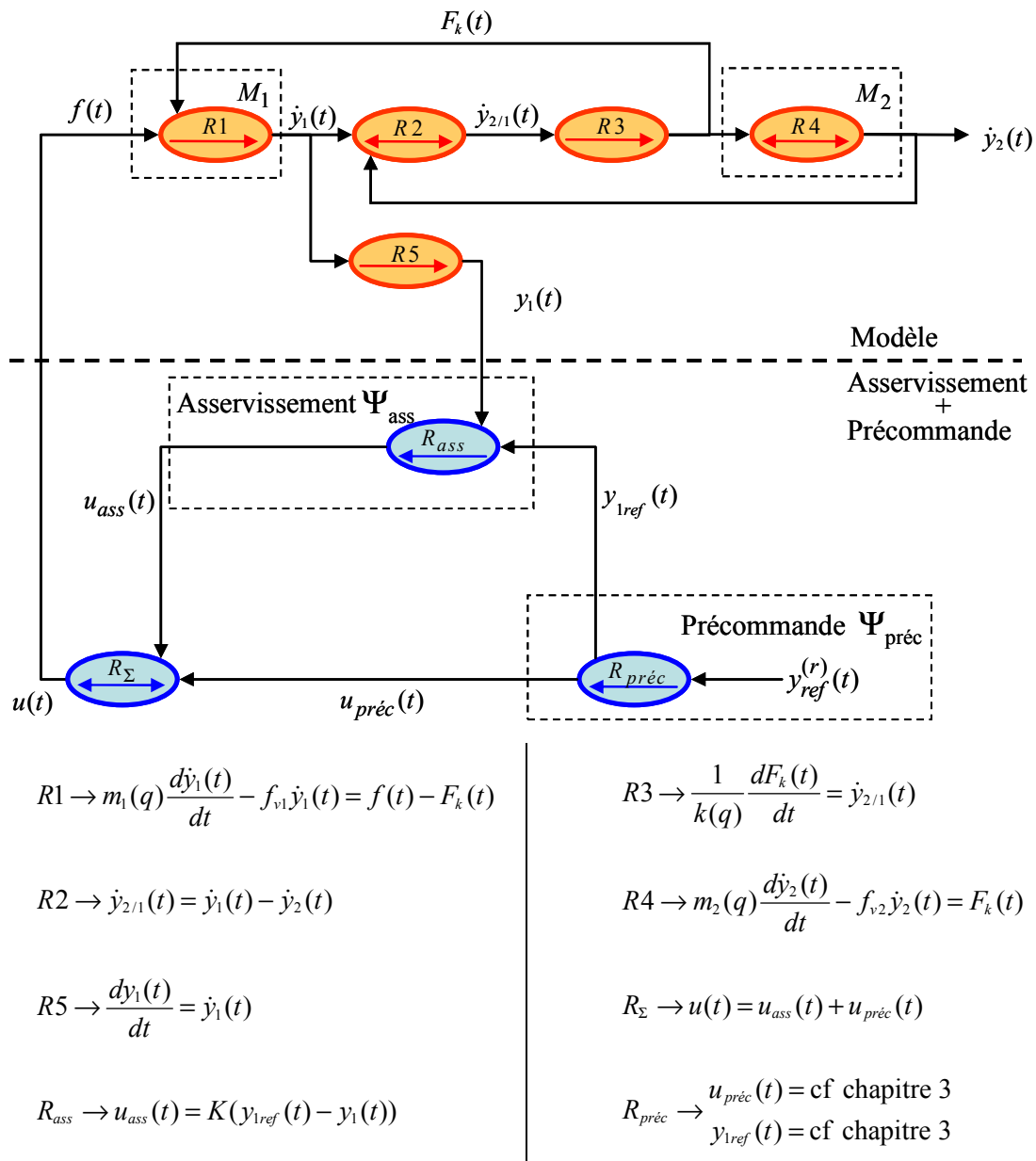


Figure 3.42 – Principe d'inversion appliqué à un système masse-ressort.

Le seul capteur disponible étant un capteur de position de la masse  $m_1$ , la partie asservissement ( $R_{ass}$ ) se limite à un correcteur fonction de l'erreur entre la position de référence et la position mesurée de

cette masse et correspond donc au schéma illustré Figure 3.41 où  $K(s)$  représente le correcteur à synthétiser et  $G(s,q)$  le système qui peut être mis sous la forme :

$$G(s,q) = \frac{Y_1(s,q)}{U(s,q)} = \frac{1 + \frac{2\zeta_a(q)}{\omega_a(q)}s + \frac{s^2}{\omega_a^2(q)}}{s(M_T s + f) \left( 1 + \frac{2\zeta_n(q)}{\omega_n(q)}s + \frac{s^2}{\omega_n^2(q)} \right)}. \quad (3.45)$$

Il est très difficile de connaître finement les valeurs des paramètres  $M_T, f, \zeta_a, \omega_a, \zeta_n, \omega_n$  cependant il est possible d'identifier ou d'estimer leurs limites de variations. Afin de prendre en compte ces incertitudes paramétriques, on considère donc que :

$$\begin{aligned} M_T &\in [M_T^-, M_T^+], f \in [f^-, f^+], \omega_n(q) \in [\omega_n^-, \omega_n^+], \zeta_n \in [\zeta_n^-, \zeta_n^+] \\ r(q) &= \frac{\omega_a(q)}{\omega_n(q)} \in [r^-, r^+], \zeta_a \in [\zeta_a^-, \zeta_a^+] \end{aligned} \quad (3.46)$$

On a alors :

$$G(s,q) = G(s,\lambda) = \frac{A(s,\lambda)}{B(s,\lambda)} = \frac{1 + a_1(q)s + a_2(q)s^2}{s(b_0(q) + b_1(q)s + b_2(q)s^2 + b_3(q)s^3)} \quad (3.47)$$

où  $\lambda = (a_1(q), a_2(q), b_0(q), b_1(q), b_2(q), b_3(q))$ ,

$$a_1(q) = \frac{2\zeta_a}{\omega_a(q)}, a_2(q) = \frac{1}{\omega_a^2(q)}, b_0(q) = f, b_1(q) = M_T + \frac{2\zeta_n}{\omega_n(q)}f, b_2(q) = M_T \frac{2\zeta_n}{\omega_n(q)} + \frac{f}{\omega_n^2(q)}$$

$$\text{et } b_3(q) = \frac{M_T}{\omega_n^2(q)}.$$

$\lambda$  appartient à un polytope qui correspond à un hypercube de dimension 6 et qui peut s'écrire

$$[a_1^-, a_1^+] \times [a_2^-, a_2^+] \times [b_0^-, b_0^+] \times [b_1^-, b_1^+] \times [b_2^-, b_2^+] \times [b_3^-, b_3^+] \quad (3.48)$$

Lorsque  $\lambda$  décrit les arêtes de cet hypercube, on note  $A_i(s)$  et  $B_i(s)$ , les  $2^6$  arêtes des polynômes  $A(s,\lambda)$  et  $B(s,\lambda)$ . Pour des raisons de simplicité d'implantation sur le système, la structure du correcteur  $K(s)$  est choisie comme étant un PID filtré (Figure 3.43), la constante de temps  $T$  étant fixée suffisamment basse pour filtrer les bruits numériques provenant de la dérivation du signal de position :

$$K(s) = \frac{x(s)}{y(s)} = \frac{k_i + k_p s + k_v s^2}{s(1 + Ts)} \quad (3.49)$$

Théoriquement, un correcteur Proportionnel-Dérivée (PD) suffit à asservir notre système, cependant, il est nécessaire d'ajouter une action intégrale afin d'éliminer toute erreur statique pouvant provenir de perturbations extérieures, un frottement sec par exemple.

Soit  $\mathcal{D}$  un domaine de stabilité, d'après le Théorème 5, trouver un correcteur  $K(s)$  tel que le polynôme caractéristique du système en boucle fermé soit  $\mathcal{D}$ -stable revient à résoudre les  $2^6$  LMI (3.44), le polynôme central utilisé étant obtenu à partir d'un placement de pôles sur le système considéré comme complètement rigide ( $G(s) = 1/M_T s^2$ ). L'algorithme de résolution a été écrit sous forme de fonction Matlab.

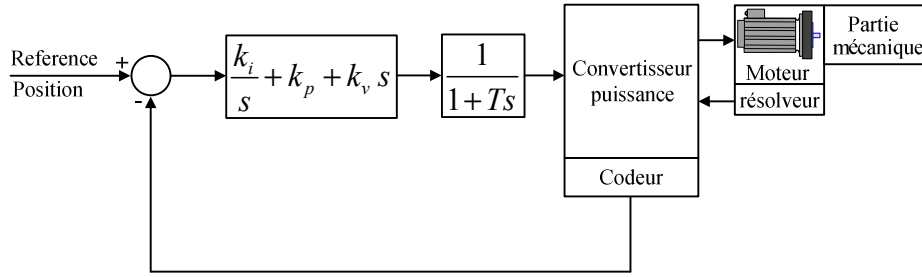


Figure 3.43 – Structure de correcteur utilisé pour la synthèse par approche paramétrique.

Dans le cas de l'axe Y du banc d'essais n°1 présenté en Annexe D , nous avons :

$$\begin{aligned} M_T \in [78;100](\text{en } kg), f \in [0;120](\text{en } N/m/s), \omega_n(q) \in [2\pi.10;2\pi.15](\text{en } rad/s), \\ \zeta_a(q) \in [0,02;0,1], \zeta_n(q) \in [0,02;0,1] \text{ et } r(q) \in [0,5;0,9], \end{aligned} \quad (3.50)$$

La constante de temps  $T$  est fixée pour avoir une fréquence de coupure à 10 Hz. Le polynôme central  $D(s)$  est choisi tel que le système considéré rigide possède le polynôme caractéristique suivant :

$$c_{ref}(s) = (\omega_1^2 s^2 + 2\zeta_1 \omega_1 s + 1)(\omega_2^2 s^2 + 2\zeta_2 \omega_2 s + 1), \quad (3.51)$$

avec  $\zeta_1 = 0,707$ ,  $\zeta_2 = 0,25$ ,  $\omega_1 = 0,5 \omega_n$  et  $\omega_2 = \frac{\omega_1 \zeta_1}{\zeta_2}$ . Ce réglage permet d'obtenir des pôles pour le

système considéré rigide possédant les mêmes parties réelles. Le domaine de stabilité choisi correspond au demi-plan stable du plan complexe ( $a = 0, b = 1, c = 0$ ).

La résolution des 2<sup>6</sup> LMI (3.44) donne comme solution :

$$k_i = 1,791.10^7 N/(m.s), k_p = 884160 N/m \text{ et } k_v = 26083 N.s/m \quad (3.52)$$

Le placement de pôle robuste obtenu est représenté Figure 3.44, les racines du polynôme central sont représentées en vert, les racines du polynôme caractéristique pour chaque arête d'incertitudes sont représentées par des croix. Les points bleus correspondent aux racines du polynôme caractéristique pour mille jeux de paramètres pris au hasard.

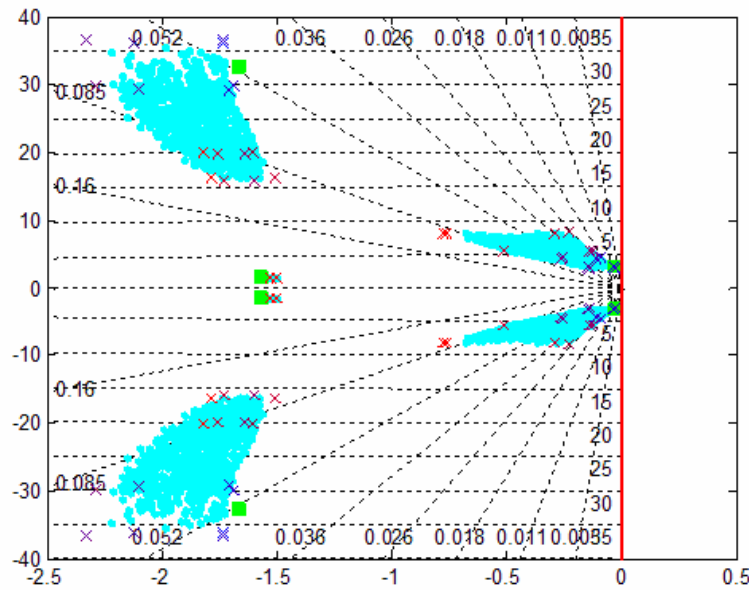
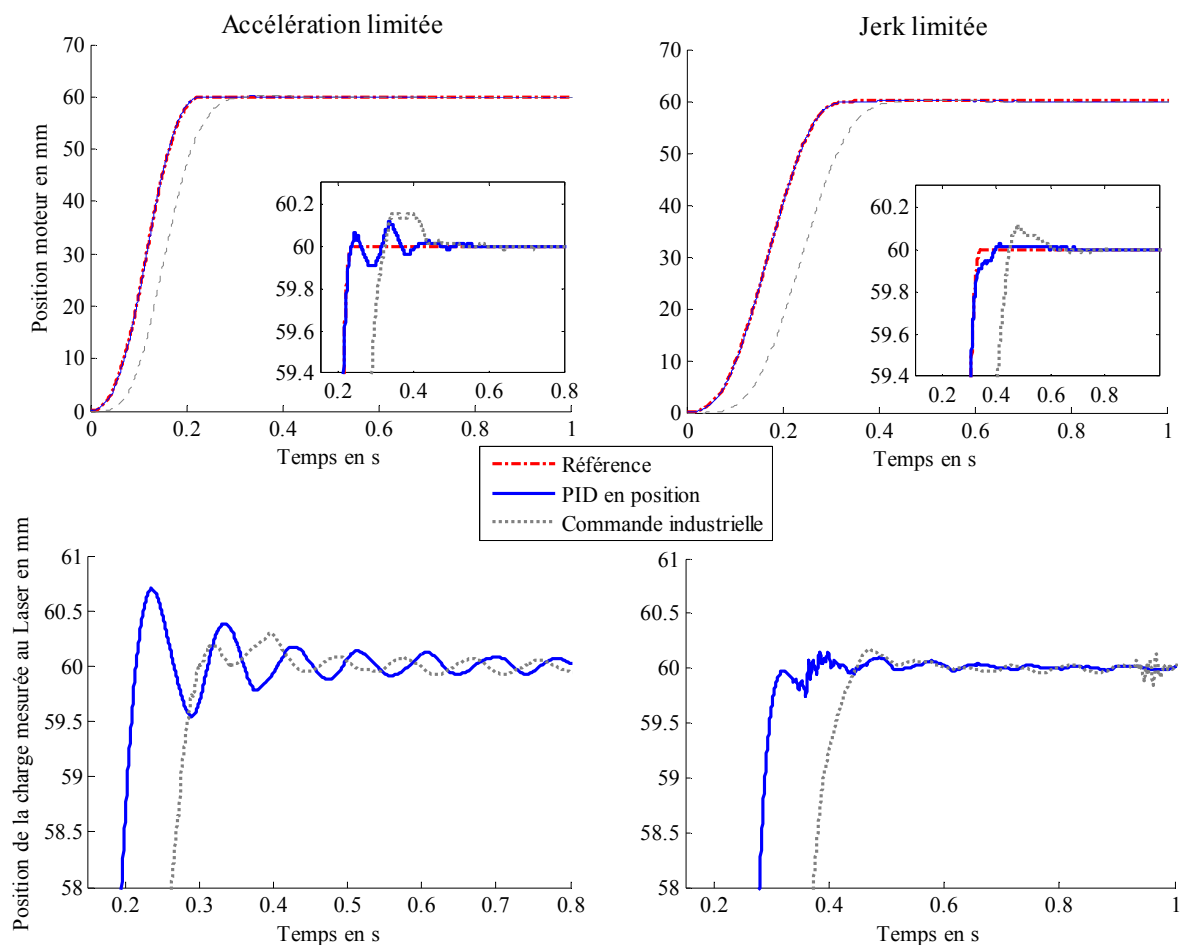


Figure 3.44 – Placement de pôles obtenu dans le cas de l'axe Y du banc d'essais n°1 avec le domaine de stabilité correspondant au demi-plan complexe stable.

### 3.3.3.3 Validations expérimentales

La méthodologie de réglage présentée précédemment a été testée sur les deux bancs d'essais présentés en Annexe D pour commander l'axe Y du banc d'essais n°1 et l'axe X du banc d'essais n°2. Dans les deux cas, le correcteur PID obtenu a été couplé à une précommande rigide (3.2.3.1) avec une référence en accélération limitée ou en jerk limité, la valeur du jerk ayant été réglé pour annuler le comportement vibratoire à la fin du mouvement. Les résultats expérimentaux sont présentés dans les figures 3.45 et 3.46. Les essais ont été effectués pour un déplacement en Y de 60 mm à accélération maximale pour le banc d'essais n°1 et de 900 mm à accélération maximale en X pour le banc d'essais n°2. Dans tous les cas, les performances soit en temps de cycle soit en comportement vibratoire sont meilleures avec un correcteur PID en position qu'avec la commande industrielle. Le compromis temps de cycle/comportement vibratoire est facilement géré par le choix référence en accélération limitée ou en jerk limité.

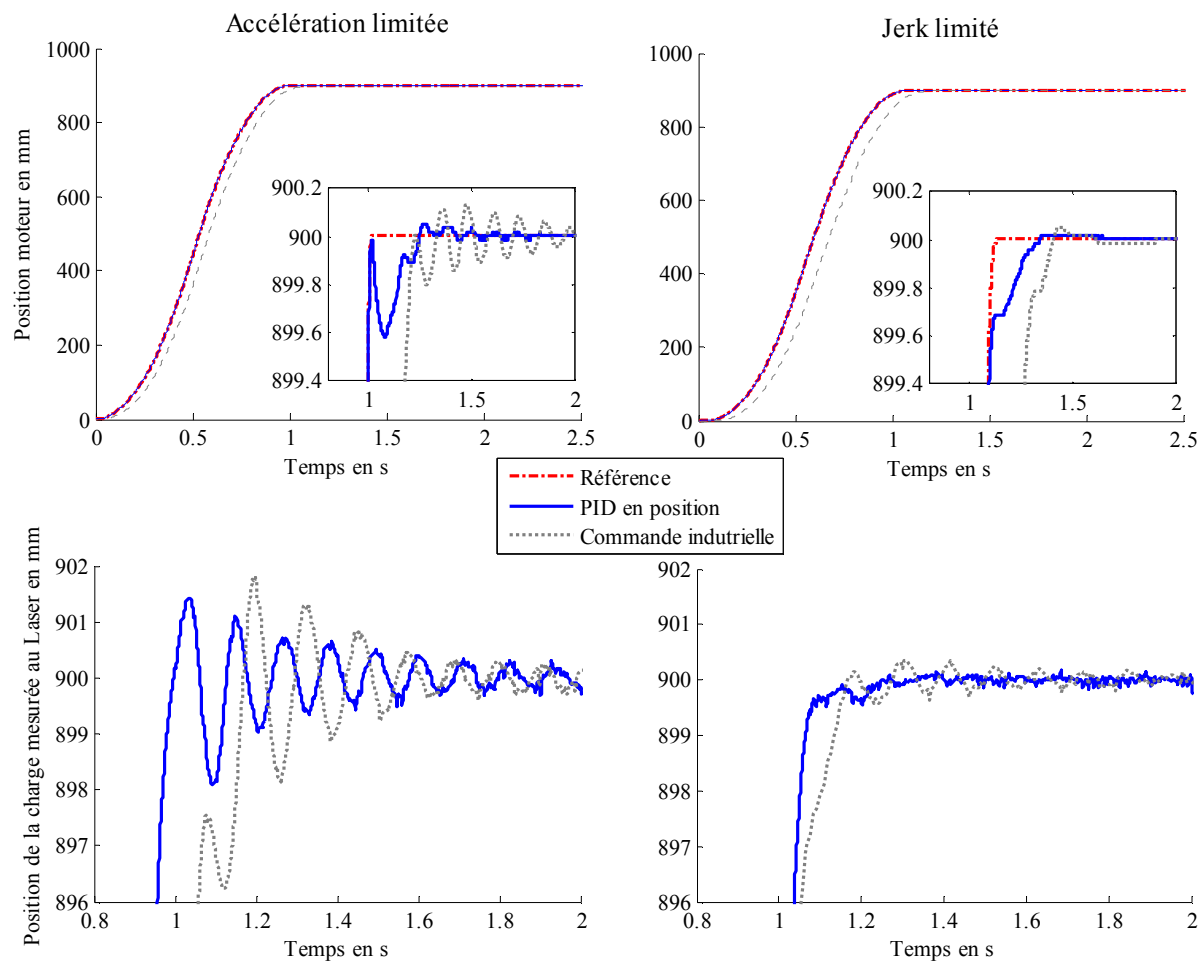
Les tableaux 3.4 et 3.5 résument les performances obtenues sur les deux bancs d'essais. Pour les deux expérimentations précédentes, la synthèse d'un correcteur PID par approche paramétrique permet d'atteindre de meilleures performances que la commande utilisée industriellement. Le couplage avec une précommande rigide utilisant une référence en jerk limité permet, en plus, de maîtriser très facilement le comportement vibratoire de l'axe mis en mouvement.



**Figure 3.45 – Réponses obtenues expérimentalement sur le banc d'essais n°1 avec un correcteur PID réglé à l'aide d'une approche paramétrique pour un déplacement de l'axe Y de 60 mm et comparaison avec la commande industrielle.**

| Banc d'essais n°1                                            | Temps de cycle                    | Amplitude max. des vibrations au niveau de la charge |
|--------------------------------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------------------------|
| Commande Industrielle avec référence en accélération limitée | 0,29 s                            | 0,3 mm                                               |
| PID en position avec référence en accélération limitée       | <b>0,215 s</b><br><b>(-25,9%)</b> | 0,7 mm<br><b>(+133,3%)</b>                           |
| Commande Industrielle avec référence en jerk limité          | 0,41 s<br><b>(+41,4%)</b>         | 0,2 mm<br><b>(-33,3%)</b>                            |
| PID en position avec référence en jerk limité                | 0,31 s<br><b>(+6,9%)</b>          | <b>0,1 mm</b><br><b>(-66,7%)</b>                     |

**Tableau 3.4 – Performances obtenues expérimentalement sur le banc d'essais n°1 avec un correcteur PID réglé en utilisant une approche paramétrique.**



**Figure 3.46 – Réponses obtenues expérimentalement sur le banc d'essais n°2 avec un correcteur PID réglé à l'aide d'une approche paramétrique pour un déplacement de l'axe X de 900 mm et comparaison avec la commande industrielle.**

| Banc d'essais n°2                                            | Temps de cycle                    | Amplitude max. des vibrations au niveau de la charge                  |
|--------------------------------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| Commande Industrielle avec référence en accélération limitée | <i>1,182 s</i>                    | <i>1,8 mm</i>                                                         |
| PID en position avec référence en accélération limitée       | <b>0,997 s</b><br><b>(-15,6%)</b> | <i>1,4 mm</i><br><b>(-22,2%)</b>                                      |
| Commande Industrielle avec référence en jerk limité          | <i>1,274 s</i><br><b>(+7,8%)</b>  | <i>0,35 mm</i><br><b>(-80,6%)</b>                                     |
| PID en position avec référence en jerk limité                | <i>1,098 s</i><br><b>(-7,1%)</b>  | <b><math>\approx 0</math></b><br><b>(<math>\approx -100\%</math>)</b> |

**Tableau 3.5 – Performances obtenues expérimentalement sur le banc d'essais n°2 avec un correcteur PID réglé en utilisant une approche paramétrique.**

### 3.3.4 Compensation directe d'un mode souple par retour accélérométrique

Un des principaux inconvénients dans le contrôle de la plupart des axes souples industriels est le manque de retour d'information sur la partie à contrôler. Dans la majorité des applications industrielles, seule la partie moteur est commandée en boucle fermée tandis que la charge est commandée en boucle ouverte. Il a été montré dans [Béarée, Barre et coll., 2004] que l'impossibilité de mesurer le comportement de la charge combinée avec le faible amortissement de la structure mécanique réduit énormément les performances de la commande. Comme il est excessif voire impossible pour l'industriel d'investir dans un appareil de mesure de position de la charge (comme un laser, une caméra ou tout type de capteur de position sans contact), fixer un accéléromètre sur celle-ci permet d'obtenir une information supplémentaire pour un coût réduit. Cependant, déduire une information de vitesse ou de position à partir d'une mesure d'accélération, en l'intégrant une ou deux fois par exemple, étant très difficile à cause des bruits (offset de mesure, résolution du capteur, etc.), il est donc nécessaire de connaître la façon d'utiliser cette nouvelle information dans notre structure de commande.

Cette partie aborde les points suivants : dans un premier temps, l'algorithme de commande par retour accélérométrique est déduit en appliquant des principes d'inversion sur le GIC du modèle souple avant de présenter les résultats expérimentaux obtenus sur les deux bancs d'essais.

#### 3.3.4.1 Inversion d'un modèle souple et structure de la commande par retour accélérométrique

Comme précédemment, la structure de la commande par retour accélérométrique est déduite de l'inversion du modèle souple déjà présenté Figure 3.41. En supposant que les frottements  $f_{v2}$  sont suffisamment faibles pour les considérer comme nuls, cette inversion est présentée Figure 3.47. Elle fait apparaître dans la partie commande trois sous-ensembles, un asservissement, une précommande et une compensation de l'effort  $F_k$  qui peut être réalisée à partir de la mesure de l'accélération de la masse  $m_2$ . La compensation réalisée permet théoriquement de découpler totalement la masse  $m_1$  de la masse  $m_2$ . On se retrouve donc, après compensation, avec un système rigide constitué uniquement de la masse  $m_1$  à contrôler. La précommande utilisée est donc une précommande du type rigide vis-à-vis de la masse  $m_1$  :

$$u_{préc}(t) = m_1(q)\ddot{y}_{1ref}(t) + f_{v1}\dot{y}_{1ref}(t). \quad (3.53)$$

La partie asservissement est choisie comme étant un correcteur Proportionnel-Dérivée, le contrôle commande se résume donc à la relation suivante :

$$u = m_2(q)\ddot{y}_2 + k_1(\dot{y}_{1ref} - \dot{y}_1) + k_2(y_{1ref} - y_1) + m_1(q)\ddot{y}_{1ref} + f_{v1}\dot{y}_{1ref}. \quad (3.54)$$

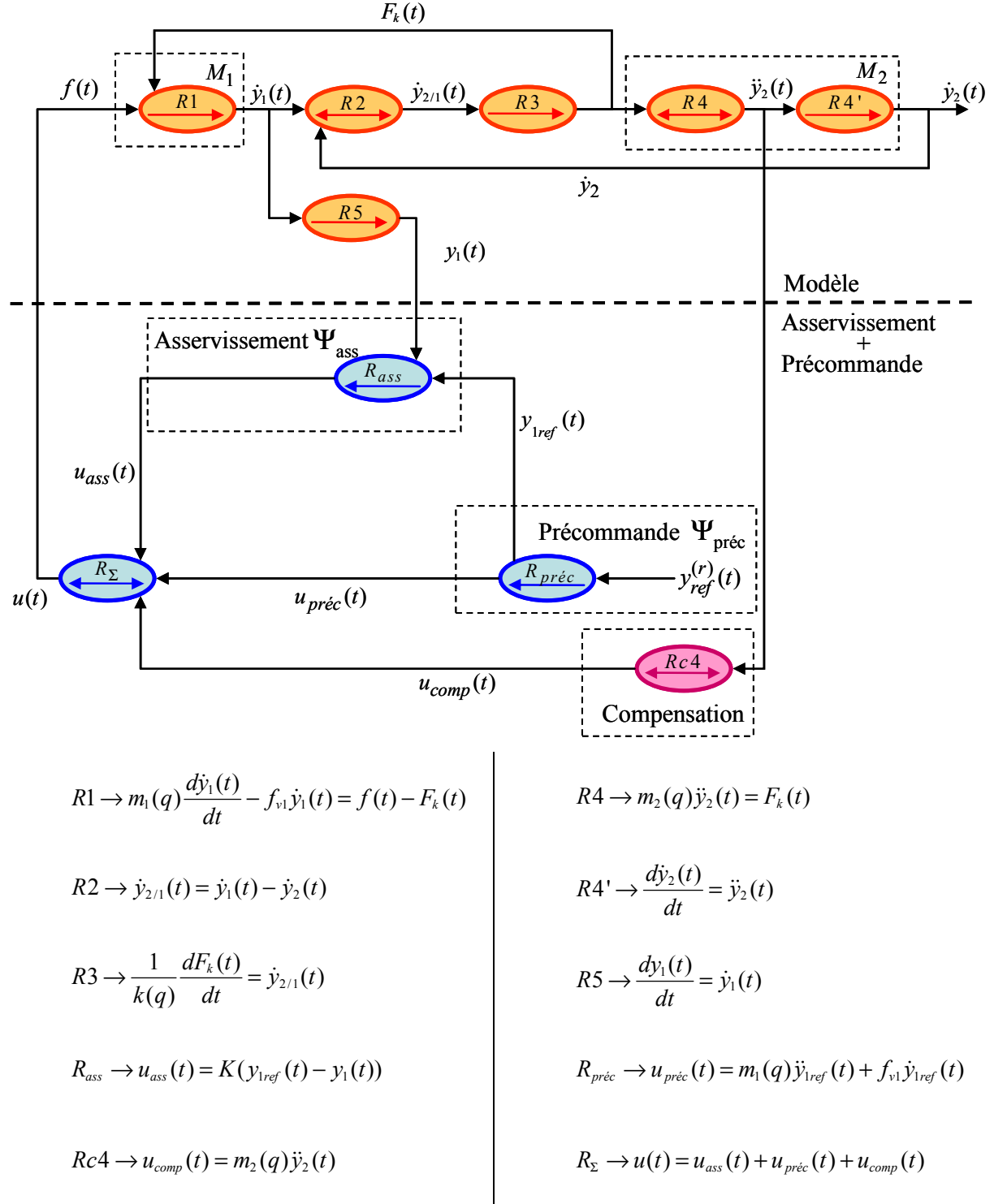


Figure 3.47 – Inversion du GIC du modèle souple.

Si l'on considère qu'un accéléromètre placé sur  $m_2$  nous permet de mesurer parfaitement  $\ddot{y}_2$ , cette loi de commande permet un suivi de trajectoire parfait au niveau de  $m_1$  indépendamment des variations de

la raideur  $k(q)$ . On retrouve l'algorithme que Luo et Saridis avaient proposé [Luo et Saridis, 1985]. Cette fois-ci, plutôt que d'utiliser la théorie de la commande optimale, une méthode entièrement graphique a été utilisée. Dans le cas général, cet algorithme requiert une estimation de couple et des accélérations au niveau des articulations du robot, qui rendent, en pratique, une telle méthode difficile à appliquer. Dans le cas de la commande par retour accélérométrique appliqué à un système cartésien du type masses-ressorts, l'expression de cette commande est très simple et ne dépend que des masses modales [Dumetz, Dieulot et coll., 2006].

Deux types de stratégie de commande sont alors envisageables :

1. A l'instar d'une précommande rigide, la référence de trajectoire utilisée correspond à une référence de trajectoire pour  $m_1$  et la maîtrise du comportement vibratoire de la structure est donc liée au type de loi de mouvement adopté.
2. A l'instar d'une précommande souple, la référence de trajectoire correspond à une référence de trajectoire pour  $m_2$ , l'obtention de la référence correspondante nécessaire à la partie précommande est obtenue par inversion des relations  $R2$  à  $R4'$ . L'utilisation des méthodes présentées au chapitre 3 permet d'aboutir à la relation :

$$\ddot{y}_{1ref} = \frac{m_2(q)}{k(q)} y_{2ref}^{(4)} + \ddot{y}_{2ref}. \quad (3.55)$$

Il est important de noter que la première stratégie est plutôt adaptée à des mouvements du type point à point alors que la deuxième est plutôt adaptée à des mouvements du type suivi de trajectoire. Cette architecture de commande permet facilement de s'adapter à ces deux types de mouvement.

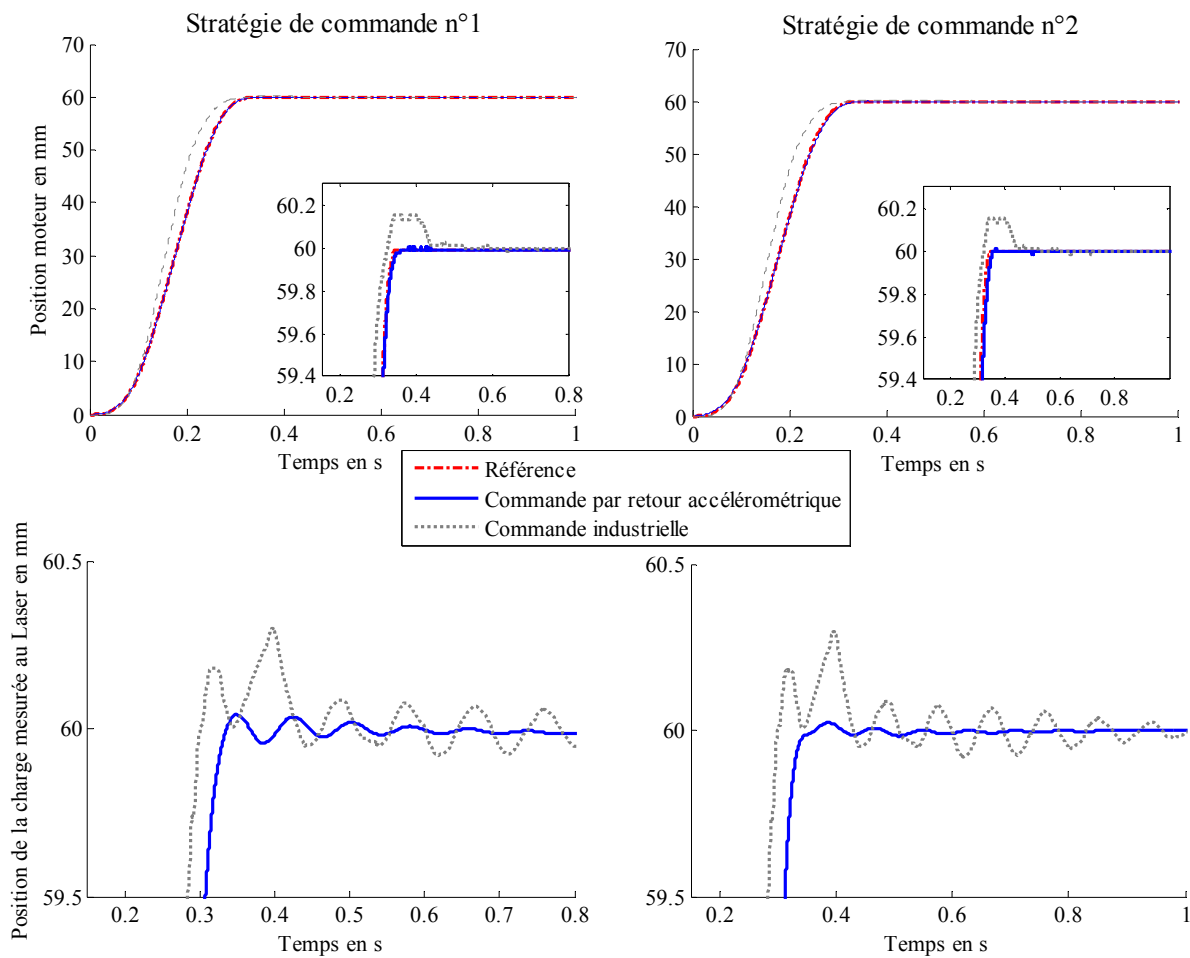
### 3.3.4.2 Validations expérimentales

Les résultats expérimentaux obtenus sur les deux bancs d'essais avec les deux stratégies de commande précédentes sont présentés Figure 3.48 et Figure 3.49. Trois essais ont été réalisés sur les deux bancs d'essais. Ils correspondent à différents types de commande :

- commande par boucles en cascades avec référence en bang-bang d'accélération (Commande industrielle),
- commande par retour accélérométrique utilisant la stratégie n°1 avec une référence en jerk limité,
- commande par retour accélérométrique utilisant la stratégie n°2.

| Banc d'essais n°1                                            | Temps de cycle     | Amplitude max. des vibrations au niveau de la charge |
|--------------------------------------------------------------|--------------------|------------------------------------------------------|
| Commande Industrielle avec référence en accélération limitée | <b>0,29 s</b>      | <b>0,3 mm</b>                                        |
| Commande par retour accélérométrique (stratégie n°1)         | 0,315 s<br>(+8,6%) | 0,04 mm<br>(-86,7%)                                  |
| Commande par retour accélérométrique (stratégie n°2)         | 0,32 s<br>(+10,3%) | <b>0,02 mm</b><br><b>(-93,3%)</b>                    |

**Tableau 3.6 – Performances obtenues expérimentalement sur le banc d'essais n°1 avec une commande par retour accélérométrique.**

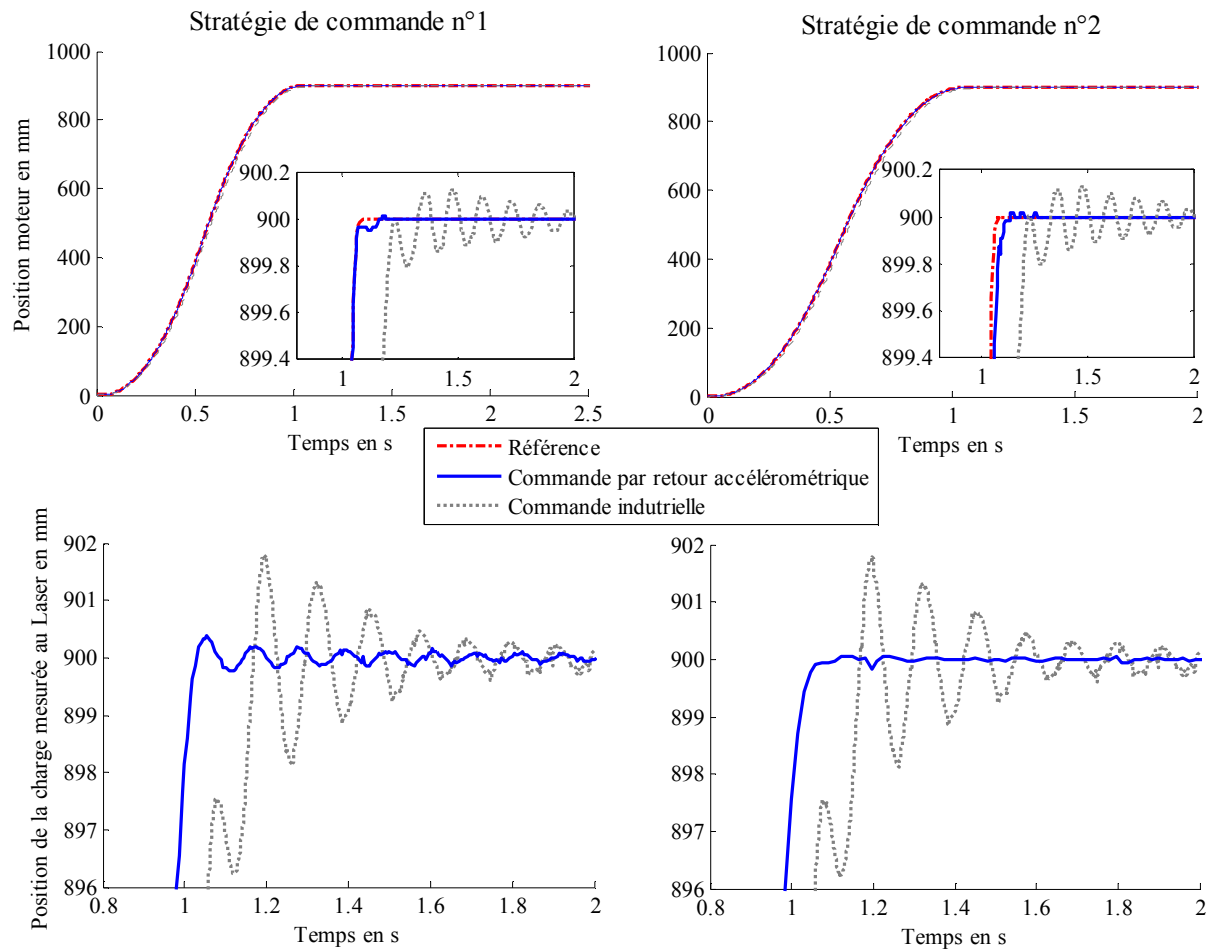


**Figure 3.48 – Réponses obtenues expérimentalement sur le banc d’essais n°1 avec une commande par retour accélérométrique pour un déplacement de l’axe Y de 60 mm et comparaison avec la commande industrielle.**

Dans tous les cas, la commande par retour accélérométrique surclasse la commande industrielle. Le gain en temps de cycle est de l’ordre de 10% sur la commande utilisée industriellement (cf. Tableaux 3.6 et 3.7). Les résultats montrent que la commande par retour accélérométrique permet d’annuler quasiment les vibrations au niveau de la charge. Expérimentalement, elles ne sont ni visibles par l’opérateur et ni par la mesure effectuée au laser.

| Banc d’essais n°2                                            | Temps de cycle                    | Amplitude max. des vibrations au niveau de la charge |
|--------------------------------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------------------------|
| Commande Industrielle avec référence en accélération limitée | 1,182 s                           | 1,8 mm                                               |
| Commande par retour accélérométrique (stratégie n°1)         | <b>1,046 s</b><br><b>(-11,5%)</b> | <b>0,4 mm</b><br><b>(-77,8%)</b>                     |
| Commande par retour accélérométrique (stratégie n°2)         | 1,067 s<br><b>(-9,7%)</b>         | <b>≈ 0</b><br><b>(≈ -100%)</b>                       |

**Tableau 3.7 – Performances obtenues expérimentalement sur le banc d’essais n°2 une commande par retour accélérométrique.**



**Figure 3.49 – Réponses obtenues expérimentalement sur le banc d'essais n°2 avec une commande par retour accélérométrique pour un déplacement de l'axe X de 900 mm et comparaison avec la commande industrielle.**

### 3.3.5 Bilan sur la synthèse d'un asservissement du moteur

Cette partie a proposé une analyse comparative des performances de différentes structures de commande. Les résultats présentés sont spécifiques à une application particulière, celle de la commande d'un axe souple avec une application à la commande des robots cartésiens. Différents critères de comparaison ont été mis en place, le comparatif réalisé en début de chapitre a permis de mettre en valeur deux types de commande, la synthèse de correcteur par approche paramétrique et la commande par retour accélérométrique. Les limitations de la commande industrielle ont été tout d'abord présentées avant d'étudier en détail ces deux asservissements.

La synthèse de correcteur par approche paramétrique permet d'obtenir à partir d'une résolution de LMI, un correcteur à structure fixe respectant un niveau de performances pour un système possédant des incertitudes paramétriques. L'application à la commande d'un axe souple a permis d'obtenir un correcteur PID satisfaisant au cahier des charges initial et plus performante que la commande industrielle, le réglage de ce correcteur étant réalisé de façon quasi-automatique.

L'utilisation d'un accéléromètre placé en bout de bras permet d'obtenir une information supplémentaire pour un faible coût. L'application des principes d'inversion basés sur le formalisme

GIC permet de déduire de quelle manière utiliser cette information. La structure de commande obtenue correspond à une commande par retour accélérométrique qui compense directement l'effet d'un mode souple. Lorsque les paramètres du modèle sont bien connus, cette commande assure théoriquement un suivi de trajectoire parfait au niveau du moteur. Deux stratégies ont été développées, elles permettent de réaliser soit un mouvement du type point à point soit du type suivi de trajectoire.

On notera que ces deux structures de commande ne nécessitent pas une algorithmique importante, donc sont toutes les deux potentiellement implantables dans les systèmes de commande modernes.

Cette étude portant sur la partie asservissement a pu être valorisée industriellement, la société SEPRO-Robotique envisage d'intégrer la commande par approche paramétrique (PID en position) dans sa prochaine génération de robots. Elle a aussi été valorisée sous forme de publications en revue internationale [Dumetz, Dieulot et coll., 2006], en congrès international [Colas, Dumetz et coll., 2005] et en congrès national [Colas, Dieulot et coll., 2006].

### 3.4 Bilan sur la commande d'un axe souple

Pour la commande d'un axe souple, plusieurs possibilités s'offrent aux concepteurs, il est, en effet possible :

- D'utiliser un asservissement (inversion indirecte) seul. Le suivi de trajectoire ainsi que le rejet de perturbation sont alors quasi-parfaits grâce à l'utilisation de gains de boucle importants pour les régulateurs classiquement utilisés dans l'industrie (du type PID en général). En pratique, ce réglage est limité pour plusieurs raisons, des gains trop élevés déstabilisent rapidement le système, les saturations naturelles des systèmes physiques limitent le niveau des commandes mises en œuvre et l'accroissement de la dynamique est souvent limité par la technologie des capteurs utilisés (limitation provenant des bruits de mesure),
- D'utiliser une précommande (inversion directe) seule. Si les paramètres du modèle de commande sont connus exactement, la commande envoyée respecte la dynamique du système c'est-à-dire que le système sera capable de réaliser les trajectoires demandée et le suivi de trajectoire est parfait. Cependant, toute perturbation non connue à l'avance ne sera pas compensée, ce type de commande ne permet pas un bon rejet de perturbation.
- D'utiliser les deux aspects conjointement (couplage inversion directe et indirecte). Ce type de commande permet de découpler les aspects suivi de trajectoire et rejet de perturbation. Le suivi de trajectoire est laissé à la charge de la précommande et le rejet de perturbation à l'asservissement. Ce type de commande permet, tout en respectant la dynamique du système commandé, d'assurer un bon rejet de perturbation.

Dans le cas où il est possible de créer un modèle de commande d'un système, il est donc très intéressant, d'un point de vue industriel, de ne pas utiliser un simple asservissement mais un couplage précommande et asservissement. L'ajout d'une telle précommande permet d'améliorer de façon conséquente les performances en suivi de trajectoire et d'envoyer au système des références qui sont physiquement réalisables. Cet ajout peut d'ailleurs être effectué sur un asservissement déjà existant sans déstabiliser le système.

Nous attirons l'attention du lecteur sur la dualité des parties précommande et génération de lois de mouvement. En effet, lorsque la précommande ne contient pas assez d'informations sur le système, il est nécessaire de « reporter » ce manque d'informations sur dans la génération de lois de mouvement. Une précommande rigide ne permet pas de maîtriser le comportement vibratoire d'une structure souple par exemple. Il a été nécessaire d'adapter la loi de mouvement pour tenir compte de cette souplesse.

---

# Chapitre 4

## Autoréglage par apprentissage indirect itératif

**L**es techniques de précommande ou d'asservissement présentées dans les chapitres précédents sont toutes basées sur une modélisation d'un axe souple. Avec les commandes étudiées précédemment, il est généralement nécessaire de connaître certains paramètres assez finement pour atteindre des performances optimales. Nous verrons dans ce chapitre que des techniques d'apprentissage peuvent être utilisées pour améliorer la connaissance de ces paramètres et donc améliorer en parallèle les performances de la commande.

Après une introduction sur les différentes techniques d'apprentissage, nous présenterons deux techniques d'apprentissage adaptées au réglage de la commande par retour accélérométrique et de la référence en jerk limité utilisée par une précommande rigide pour maîtriser le comportement vibratoire d'un système souple.

### 4.1 Techniques d'apprentissage

Une conséquence particulière des résultats des précommandes et des asservissements que nous venons d'évoquer, appliquées à un axe cartésien, réside dans leur sensibilité vis-à-vis des paramètres, et notamment des paramètres modaux. Cette sensibilité est encore plus marquée si l'on considère des structures plus complexes (assemblages complexes, structures poly-articulées). Le souci d'assurer la stabilité – ou le comportement vibratoire – entraîne forcément un certain conservatisme, principalement dû aux incertitudes de modélisation, mais également aux bruits de mesure, qui sont préjudiciables à la rapidité du système et donc aux performances en temps de cycle.

Plusieurs techniques permettent de pallier ce problème :

- une identification soignée préalable du système [Ljung, 1999] ; cette technique est difficilement applicable en pratique, du fait de la non-stationnarité des modes. Elle pourrait toutefois, si les parcours sont bien connus, être pratiquée, mais elle demande une bonne expertise pour pouvoir valider correctement un modèle. On pourrait toutefois imaginer une identification en boucle fermée, avec une commande que l'on recalerait après coup, ce qui s'apparente dans ce cas à une technique d'apprentissage [Gautier et Poignet, 2002],
- une modification de la commande en ligne, par des techniques de type commande adaptative [Sun et Mills, 1999] ; ces techniques sont connues pour être efficaces, notamment

sur des structures très souples. Par contre, leurs performances sont diminuées en présence de bruits de mesure importants. D'autre part, une identification nécessite une excitation persistante, ce qui n'est pas le cas si une partie du trajet se déroule en régime permanent. Les oscillations apparaissent en général à l'arrêt de la machine, sans que l'on ne puisse plus les contrebalancer efficacement. Il est possible, pour des précommandes de type input shaping, du fait de la génération d'échelons successifs, de modifier la forme du shaper à mi-course quand l'algorithme est mal réglé – erreurs sur la fréquence – mais, en pratique, l'emploi de tels algorithmes est délicat et pas toujours probant [Culforth et Pao, 2004],

- une commande par apprentissage qui tient compte des essais passés et qui peut ainsi permettre de modifier la commande en tenant compte des erreurs lors des essais précédents, mais dont l'inconvénient est de requérir l'hypothèse de la répétitivité des trajectoires,
- un apprentissage par réseaux de neurones qui présente l'inconvénient de nécessiter de nombreux essais.

Les robots cartésiens qui font l'objet du travail rapporté dans le cadre du présent mémoire utilisent, en pratique, des trajectoires à caractère répétitif. Comme nous le verrons ultérieurement, il est possible de concevoir également un protocole de calibration du manipulateur, consistant en une série de campagnes d'identification en boucle fermée avec interpolation dans l'espace de travail. De ce fait, l'usage de techniques d'apprentissage se justifie pleinement.

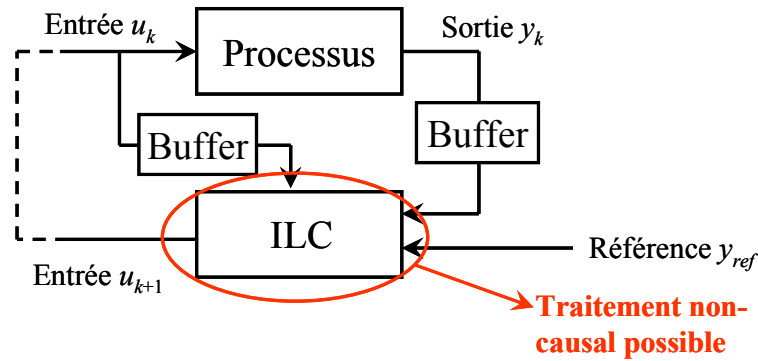


Figure 4.1 – Structure d'une commande par apprentissage.

Les techniques classiques d'apprentissage, que nous appellerons apprentissage direct, bénéficient d'une littérature d'autant plus abondante qu'elles se déclinent de la même manière que les commandes adaptatives directes. Si l'on se donne au départ un système dynamique de sortie  $y$  avec une consigne  $y_{ref}$ , et que l'on répète la trajectoire correspondant à cette consigne plusieurs fois, en définissant l'erreur  $e = y_{ref} - y$ , et la commande  $u$ , on peut modifier cette commande de manière à tenir compte des erreurs précédentes :

$$u_k = f(u_i, e_i), i < k, \quad (4.1)$$

où l'indice  $k$  désigne la grandeur lors du  $k^{ième}$  essai.

Une technique d'apprentissage simple est par exemple :

$$u_k = u_{k-1} + Ge_{k-1}, \quad (4.2)$$

$G$  étant un coefficient constant bien choisi.

Le choix du filtre  $f$  peut être dicté par des considérations fréquentielles ou de placement de pôles, reliées à la commande optimale ou robuste (minimisation d'un critère). Par exemple, il est montré très

classiquement que, pour un système linéaire  $(A, B, C)$  défini sur un intervalle de temps fini, l'erreur converge vers zéro, si certaines contraintes sur les conditions initiales sont vérifiées et si

$$\|I - CBG\| < 1, \quad (4.3)$$

où  $\|\cdot\|$  est une norme. Une revue de ces techniques peut être trouvée dans [Moore, 1998], [Bristow, Tharayil et coll., 2006].

Nous noterons que les commandes par apprentissage de type direct ne modifient pas la dynamique (donc les pôles) mais que leur structure est de type filtre anticipatif, qui vient compenser de manière plus ou moins aveugle les erreurs de modélisation. Par rapport à un système souple, le filtre doit donc être réglé correctement, en particulier en coupe-bande de manière à ne pas exciter les vibrations ; il rencontre donc les mêmes problèmes que les asservissements du même type, autrement dit un manque de robustesse par rapport aux variations de la fréquence dominante, ce qui explique par exemple les difficultés à obtenir de bons résultats avec notre robot. Par contre, lorsque le système est rigide, la convergence peut être extrêmement rapide (quelques itérations). L'algorithme est sensible à la répétabilité de la trajectoire (en particulier le recalage à une position initiale) et, ainsi, lors d'une variation des paramètres du système, d'une forte perturbation (par exemple lorsque le manipulateur vient saisir une charge, lors d'un choc), ou d'un changement de trajectoire, le système peut être très perturbé, ce qui entraîne une répercussion de l'excitation sur les essais suivants, et le travail d'apprentissage doit être recommencé.

## 4.2 Apprentissage indirect et commande en boucle fermée

Nous avons expliqué les avantages et défauts de la commande par apprentissage direct. Une alternative intéressante consiste à apprendre, comme le ferait une commande adaptative indirecte, les paramètres du modèle, et ensuite à corriger la commande. Dans la littérature, très peu d'algorithmes existent qui, en général, utilisent une identification par moindres carrés pour recalculer l'ensemble des paramètres d'un modèle et modifier de manière conséquente la commande [Bukkems, Kostic et coll., 2005], [Gautier et Poignet, 2002], [Jiang, Unbehauen et coll., 2001], [Zain, Tokhi et coll., 2006]. Nous allons illustrer notre approche, qui consiste simplement à n'estimer que les paramètres du modèle employé dans la commande, par l'exemple de la commande par retour accélérométrique appliqué au système souple (Figure 3.41), d'équations :

$$\begin{aligned} m_1(q)\ddot{y}_1 &= k(q)(y_2 - y_1) - f_{v1}\dot{y}_1 + u \\ m_2(q)\ddot{y}_2 &= k(q)(y_1 - y_2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Nous avons vu que la commande (3.54) permet une poursuite quasi-parfaite de la référence de trajectoire. Cette commande n'a besoin que des paramètres  $m_1$  et  $m_2$ . L'algorithme suivant permet d'identifier ces deux paramètres.

**Théorème 6** [Dieulot, Colas et coll., 2007] Prenons un système masse ressort avec un bruit blanc de sortie  $\eta$  de covariance  $H(t)$ , commandé par retour accélérométrique. On suppose que lors de la commande itérative de la masse  $m_1$ , autour de  $y_{1ref}(t)$ , la variation des masses modales  $m_i(t)$  est Gaussienne de moyenne nulle et de covariance  $R(t)$ . Alors, pour chaque temps  $t$ , l'estimation  $\tilde{M}^k(t) = (\tilde{m}_1^k(t), \tilde{m}_2^k(t))^T$  des masses modales, donné par le filtre de Kalman suivant :

$$\begin{aligned}\tilde{M}^{k+1}(t) &= \tilde{M}^k(t) + \frac{P^k(t) \ddot{Y}^k(t)}{R(t) + \dot{Y}^k(t)^T P^k(t) \ddot{Y}^k(t)} \left( H^k(t) - \ddot{Y}(t)^T \tilde{M}^k(t) \right) \\ P^{k+1}(t) &= P^k(t) - \frac{P^k(t) \ddot{Y}^k(t) \dot{Y}^k(t)^T P^k(t)}{R(t) + \dot{Y}^k(t)^T P^k(t) \ddot{Y}^k(t)} + H(t)\end{aligned}\quad (4.5)$$

avec  $\ddot{Y}^k(t) = (\ddot{y}_1^k(t), \ddot{y}_2^k(t))^T$ , l'exposant  $k$  indiquant la  $k^{ième}$  itération et

$$H^k(t) = \tilde{m}_2(t) \ddot{y}_2^k(t) + k_1 (\dot{y}_{1ref}(t) - \dot{y}_1^k(t)) + k_2 (y_{1ref}(t) - y_1^k(t)) + \tilde{m}_1(t) \ddot{y}_{1ref}(t) + f_{v1} \dot{y}_{1ref}(t),$$

converge uniformément vers la valeur moyenne des masses modales  $m_i(t)$ , et, de plus, l'erreur de poursuite  $e_1^k = y_{1ref} - y_1^k$  de la position de la masse  $m_1$  tend vers zéro quand  $k \rightarrow \infty$ .

**Preuve** On obtient en combinant les différentes équations

$\sum_{i=1}^2 m_i^k \ddot{y}_i^k = \tilde{m}_2(t) \ddot{y}_2^k(t) + k_1 (\dot{y}_{1ref}(t) - \dot{y}_1^k(t)) + k_2 (y_{1ref}(t) - y_1^k(t)) + \tilde{m}_1(t) \ddot{y}_{1ref}(t) + f_{v1} \dot{y}_{1ref}(t) + \eta$  et donc pour chaque temps  $t$ ,

$$\sum_{i=1}^2 (\tilde{m}_i^k(t) - m_i^k(t)) \ddot{y}_i^k + \tilde{m}_1^k(t) (\dot{y}_{1ref}(t) - \dot{y}_1^k(t)) + k_1 (\dot{y}_{1ref}(t) - \dot{y}_1^k(t)) + k_2 (y_{1ref}(t) - y_1^k(t)) + \eta = 0.$$

Au temps  $t$ , on peut mettre le système sous la forme  $\ddot{Y}(t)^T (M(t) + \omega(t)) = \Omega(t) + \eta(t)$ , avec  $\omega, \eta$  des bruits blancs, et où les vecteurs  $\ddot{Y}, M, \Omega$  varient à chaque itération. On peut donc, avec les hypothèses émises, estimer pour chaque temps  $t$  les masses modales avec un filtre de Kalman où le « temps » est représenté par l'itération  $k$ . Il est bien connu, dans le cas d'une régression linéaire, que cet algorithme fournit un compromis idéal entre les performances en poursuite et le rejet des bruits, exprimé en termes de minimisation de la matrice de covariance a posteriori [Ljung, 1999]. Comme

$\sum_{i=1}^2 (\tilde{m}_i^k(t) - m_i^k(t)) \ddot{y}_i^k + \tilde{m}_1^k(t) (\dot{y}_{1ref}(t) - \dot{y}_1^k(t)) + k_1 (\dot{y}_{1ref}(t) - \dot{y}_1^k(t)) + k_2 (y_{1ref}(t) - y_1^k(t)) + \eta = 0$ , si  $\tilde{m}_i^k$  converge vers  $m_i$  si  $k \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{m}_1(t) \ddot{e}_1 + k_1 \dot{e}_1 + k_2 e_1$  tend vers zéro si  $k$  tend vers l'infini.

On peut remarquer que, si on modifie  $\tilde{m}_i^k(x(t))$ , la trajectoire  $x(t)$  va varier, et ainsi les masses modales  $m_i^{k+1}(x(t))$  également. Si les paramètres du système varient lentement, on pourra assimiler cet effet à un bruit.

L'application à notre banc d'essais n°1 montre que l'algorithme converge très vite (Figure 4.2). L'algorithme a été initialisé avec des masses arbitrairement faibles et les valeurs des masses convergent vers les masses modales estimées par analyse modale expérimentale. Le comportement du robot s'améliore avec l'identification de ses masses modales, le suivi de trajectoire au niveau moteur est, en effet, meilleur à l'itération n°4 qu'à l'itération n°1 (Figure 4.2.b). On reproduit ainsi automatiquement la méthode du régulateur qui commence par des gains faibles puis les augmente pour améliorer la dynamique.

Cette méthode peut permettre d'établir un protocole d'identification et/ou de calibrage en boucle fermée, en utilisant l'algorithme d'apprentissage indirect pour apprendre les masses modales aux nœuds d'une grille prédéfinie, et le long de trajets reliant ces points. Pour de nouveaux trajets, on peut alors interpoler les masses (par exemple de manière linéaire) et les nouveaux points servent à enrichir la base de données.

Il est important de noter que cette technique d'apprentissage permet essentiellement de régler la stratégie n°1 de la commande par retour accélérométrique. Les techniques d'estimation de fréquence présentées dans la partie suivante peuvent être utilisées, en complément, pour régler la stratégie n°2 ou la référence en jerk limité utilisé par la stratégie n°1.

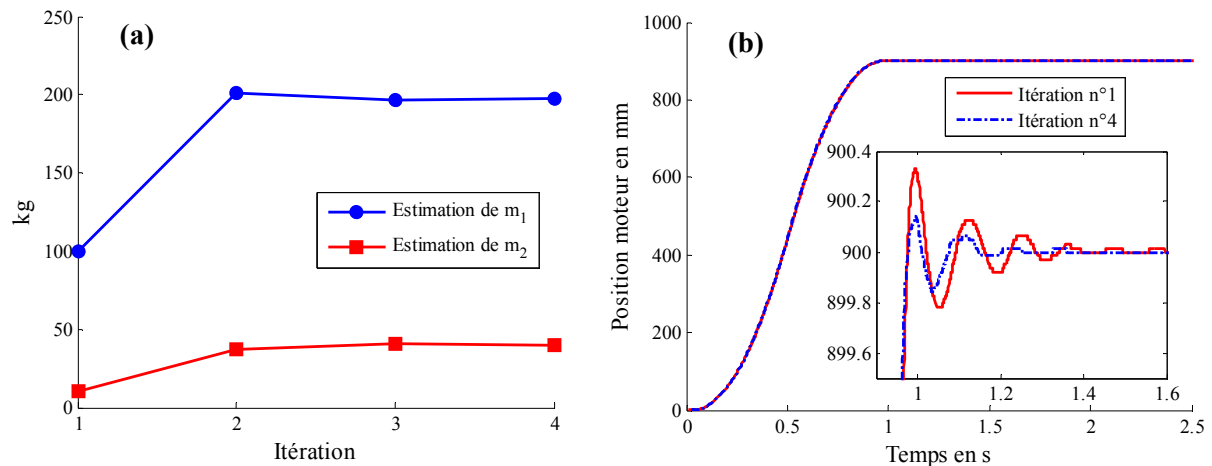


Figure 4.2 – Apprentissage indirect appliqué à la commande par retour accélérométrique.

(a) – Estimation des masses modales en fin de parcours, (b) – Evolution de la position moteur avec paramètres initiaux et après 4 itérations.

## 4.3 Estimation de fréquence en vue du réglage d'une précommande rigide

Le chapitre 3 a montré qu'une précommande rigide couplée à une loi de mouvement en jerk limité permet d'éliminer les vibrations en fin de mouvement à condition de paramétrer convenablement cet algorithme. Pour ce faire, il est alors intéressant d'estimer la fréquence dominante des vibrations et de l'injecter dans la loi de mouvement. Cette estimation fait l'objet de la partie suivante. Pour pouvoir réduire les vibrations résiduelles du bras du robot, nous sommes donc amenés à calculer les fréquences dominantes dans les signaux de mesure disponibles sur le système commandé. Pour cela, il est nécessaire de mettre en place des méthodes permettant le calcul de ces fréquences. On exposera dans cette partie trois techniques d'estimation de fréquence.

### 4.3.1 Techniques d'estimation fréquentielle

Cette partie a pour objectif de présenter différentes techniques d'estimation de fréquence. Trois méthodes sont étudiées dans cette partie, les techniques retenues étant des algorithmes simples à implanter :

1. la méthode par calcul moyen des périodes,
2. la méthode par transformée de Fourier rapide,
3. la méthode par estimation algébrique.

On notera que la liste ci-dessus n'est pas exhaustive, cependant les trois méthodes présentées ont l'avantage d'être utilisables sur les systèmes actuels. Nous renvoyons le lecteur désireux d'en savoir plus sur ces techniques vers [Hayes, 1996] pour une revue plus complète.

### 4.3.1.1 Méthode par calcul moyen des périodes

Cette méthode consiste à estimer la fréquence directement à partir des périodes du signal [Destuynder et Santi, 2003]. Le principe de cette méthode est illustrée Figure 4.3. Elle consiste à déterminer un ensemble de périodes en traçant la droite horizontale passant par la valeur moyenne du signal. L'inverse de la moyenne de ces périodes permet de donner une estimation de la fréquence dominante du signal étudié.

Cette méthode est assez simple à implémenter et donne de bons résultats quand le signal ne contient qu'une seule fréquence et même sur un « fragment » du signal (quelques périodes), ce qui permet une implantation en ligne. Par contre, elle ne permet de déterminer que la fréquence dominante du signal et n'est donc applicable qu'à des signaux possédant une seule fréquence.

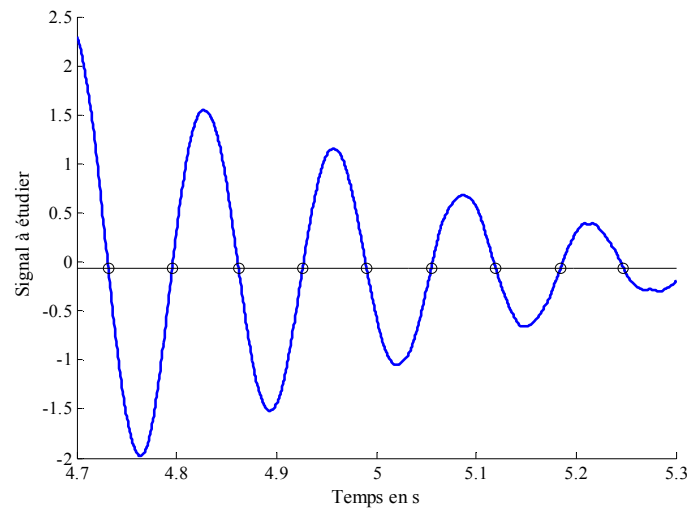


Figure 4.3 – Principe de la méthode d'estimation par calcul moyen des périodes.

### 4.3.1.2 Méthode par Transformée de Fourier Rapide

La Transformée de Fourier Rapide [Reinhard, 2002] est un algorithme de calcul de la transformée de Fourier discrète (TFD) [Blanchet et Charbit, 2001]. Cet algorithme permet comme la transformée de Fourier discrète (TFD) de transformer des données du domaine temporel dans le domaine fréquentiel.

Soient  $x_0 \dots x_{n-1}$  des nombres complexes. La transformée de Fourier Discrète est définie par la formule suivante :

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot e^{-\frac{2\pi i}{n} jk} \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (4.6)$$

La complexité algorithmique de l'évaluation directe de la série (4.6) est de l'ordre de  $O(n^2)$  opérations, la version rapide a, quant à elle, un coût en  $O(n \ln(n))$ .

La méthode d'estimation consiste à tracer la courbe représentant la fréquence en fonction de l'amplitude et à déterminer les fréquences dominantes et celles qui représentent un extremum local. Dans le cas où le signal ne comprend qu'une seule fréquence dominante, on obtient une courbe ne contenant qu'un seul pic. La fréquence correspondant à ce pic est la fréquence dominante du signal (Figure 4.4).

Cette méthode fiable peut être utilisée pour un signal comportant plusieurs fréquences. Cependant, il est nécessaire d'attendre plusieurs périodes, ce qui limite l'intérêt d'une implantation en ligne.

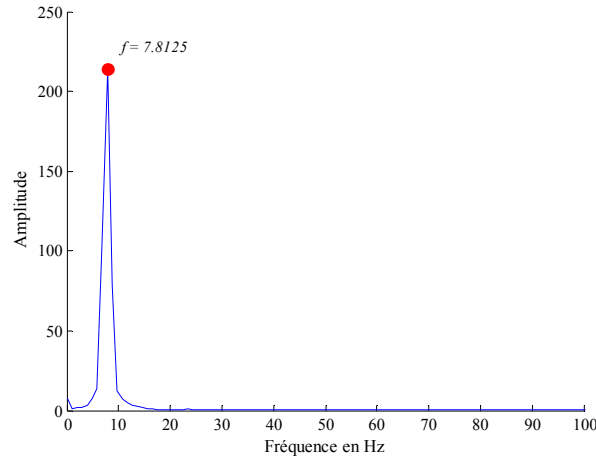


Figure 4.4 – Principe de la méthode d'estimation par Transformée de Fourier.

### 4.3.1.3 Méthode par estimation algébrique

Cette méthode consiste à représenter le signal par un modèle mathématique et à effectuer des opérations sur ce modèle afin de faire apparaître la fréquence recherchée en fonction du signal lui-même et de ses dérivées [Sira-Ramirez, 2003]. Cette technique est issue des travaux de **Hebertt Sira-Ramirez et Michel Fliess** qui ont travaillé sur les méthodes d'identification algébrique des systèmes linéaires [Fliess, Sira-Ramirez et coll., 2003]. Le travail le plus délicat consiste à choisir le modèle mathématique duquel va découler la structure du filtre.

Pour mieux expliquer cette technique, on l'illustrera avec le modèle d'un signal sinusoïdal [Fliess et Sira-Ramirez, 2003]. Dans ce cas, le modèle mathématique utilisé est représenté par l'équation :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \omega^2 y(t) = 0. \quad (4.7)$$

La solution de cette équation est une fonction sinus de la forme  $A \sin(\omega t + \varphi)$ .

Soit  $Y(s)$  la transformée de Laplace de  $y(t)$ , l'équation (4.7) dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + \omega^2 Y(s) = 0. \quad (4.8)$$

On dérive deux fois par rapport à  $s$  afin d'éliminer les conditions initiales et avant de revenir au domaine temporel on multiplie par  $s^{-2}$ , ce qui nous amène à l'équation suivante :

$$s^{-2} \times \left( 2Y(s) + 4s \frac{dY(s)}{ds} + s^2 \frac{d^2 Y(s)}{ds^2} + \omega^2 \frac{d^2 Y(s)}{ds^2} \right) = 0. \quad (4.9)$$

Sachant que  $\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{d f(s)}{ds} \right] = -t \cdot f(t)$  et que  $\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{F(s)}{s} \right] = \int f(t) \cdot dt$ , en passant au domaine temporel,

on aboutit à l'équation suivante après avoir résolu pour  $\omega$  :

$$\omega = - \frac{2 \int^{(2)} y(v) dv - 4 \int v y(v) dv + t^2 y(t)}{\int^{(2)} v^2 y(v) dv}. \quad (4.10)$$

On retrouve donc une équation exprimant la pulsation en fonction du signal initial uniquement et indépendamment des conditions initiales. L'application de cette technique à l'estimation de la fréquence d'un modèle souple est présentée en Annexe E.

Cette méthode peut être utilisée pour un signal comportant plusieurs fréquences, mais il est nécessaire de connaître la structure du modèle et les paramètres à identifier. En effet, le choix du modèle initial influence beaucoup la qualité du résultat trouvé.

### 4.3.2 Mise en œuvre de techniques d'estimation – application à un axe souple

Nous présentons dans ce qui suit l'application des trois méthodes présentées précédemment sur des signaux relevés sur les deux bancs d'essais. Le signal à étudier correspond à l'effort de référence envoyé à l'actionneur, l'asservissement utilisé étant le correcteur obtenu par une approche paramétrique (voir Chapitre 3.3.3) avec une précommande rigide et une loi de mouvement à accélération limitée (voir Chapitre 3.2.3.1). Les déplacements réalisés correspondent à ceux effectués dans le chapitre 4, soit un déplacement de 60 mm pour le banc d'essais n°1 et de 900 mm pour le banc d'essais n°2.

Les résultats obtenus sont résumés dans les figures 4.5 et 4.6. La partie étudiée correspond toujours à l'effort de commande en fin de mouvement. On considère ici que la fin du mouvement débute dès que la phase à accélération négative est terminée.

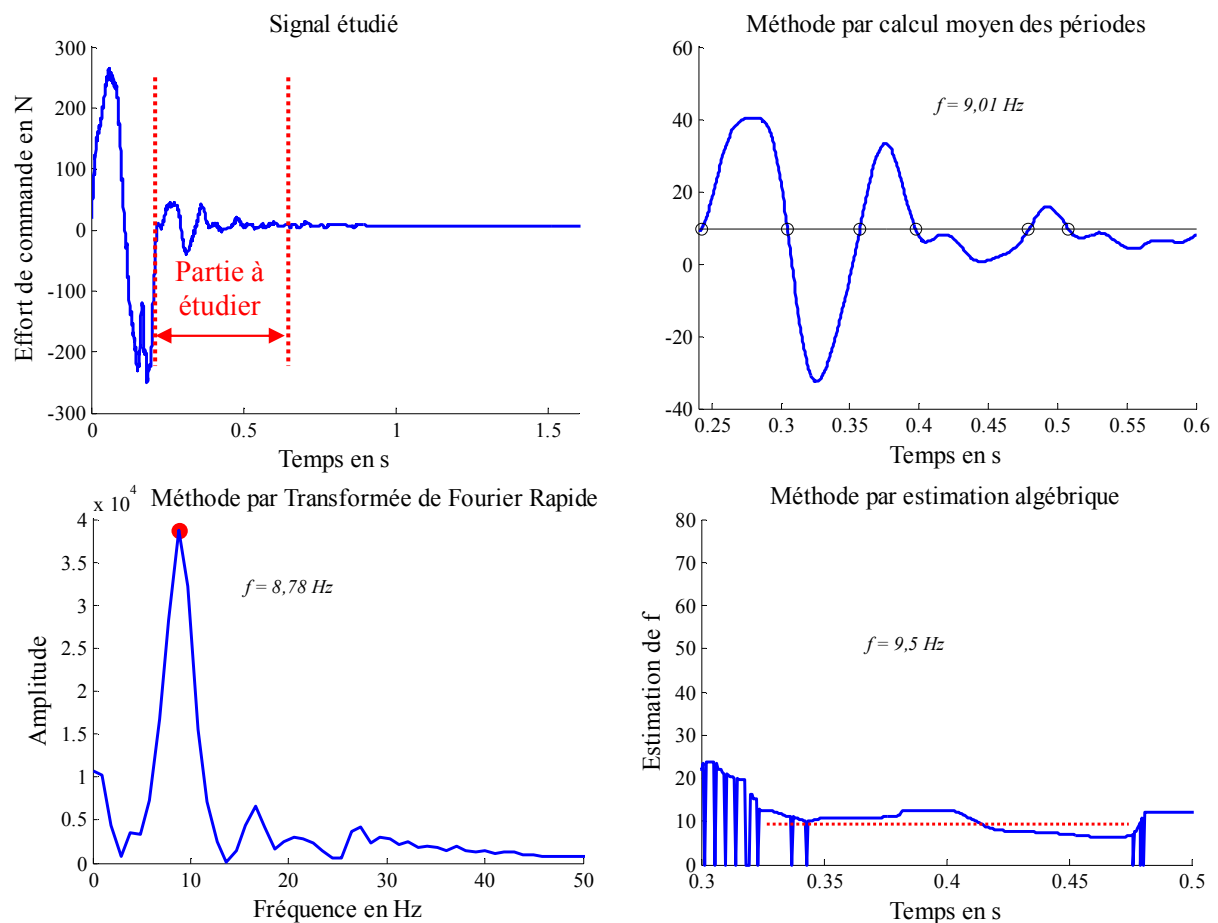


Figure 4.5 – Comparaison des méthodes d'estimation fréquentielle sur le banc d'essais n°1.

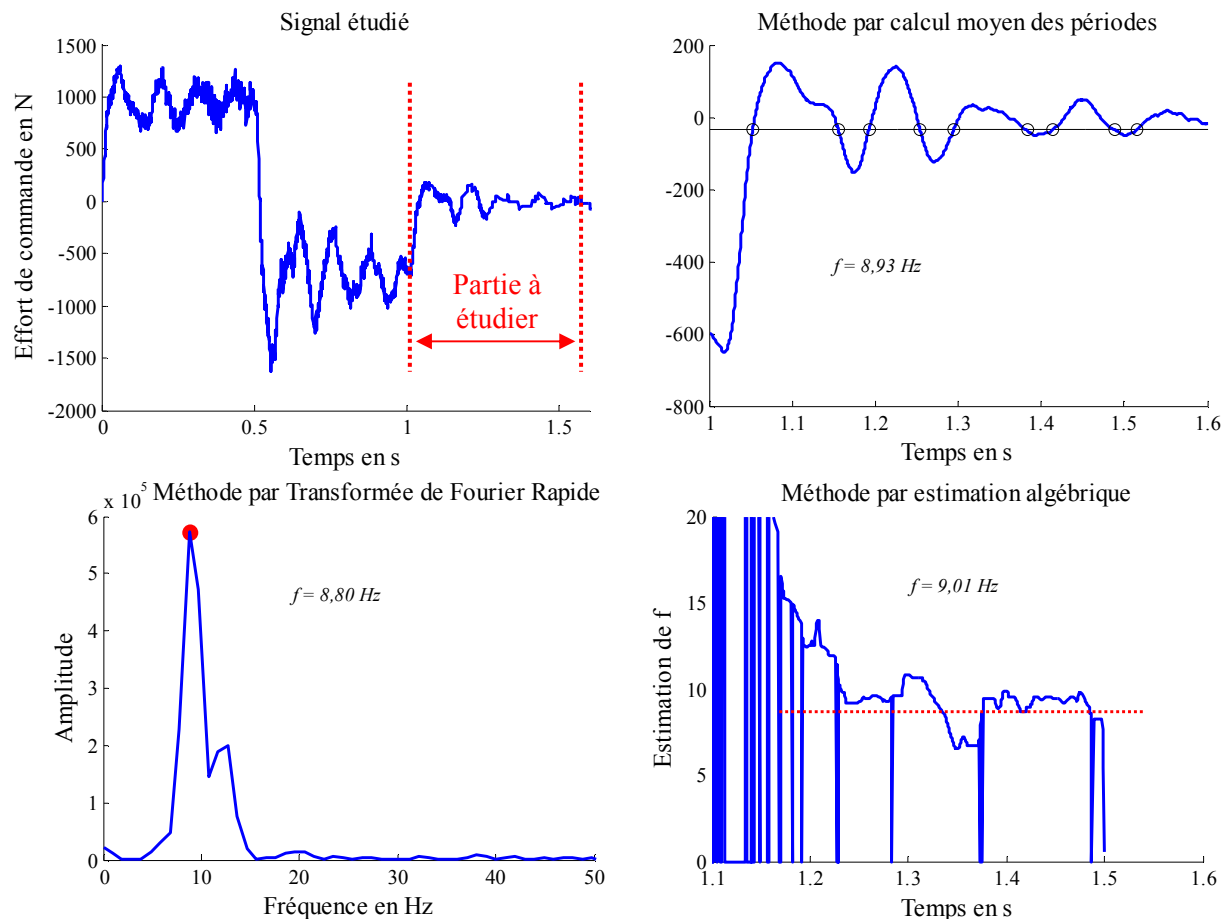


Figure 4.6 – Comparaison des méthodes d’estimation fréquentielle sur le banc d’essais n°2.

Dans ces conditions, on remarque que les fréquences estimées par les trois méthodes : (Moyenne des périodes, Transformée de Fourier Rapide et méthode algébrique) sont pratiquement équivalentes, autour de 9 Hz pour le banc d’essais n°1 et autour de 8,7 Hz pour le banc d’essais n°2.

### 4.3.3 Estimation de fréquence et adaptation de la loi de mouvement

Les résultats obtenus dans la partie précédente peuvent être utilisés pour être intégrés dans une loi de mouvement à jerk limité par exemple. Il a été montré dans le chapitre 3.2.3.1 que si les durées des phases à jerk limité sont égales à la période propre du système commandé, les vibrations en phase d’arrêt sont annulées. Il est donc intéressant de régler cette durée sur l’inverse de la fréquence obtenue en utilisant les techniques d’estimation présentées auparavant.

La figure 4.7 et le tableau 4.1 présentent les résultats obtenus après intégration de l’estimation de fréquence dans la loi de mouvement à jerk limité sur les deux bancs d’essais. Dans les deux cas, deux essais sont présentés, le premier correspond à un déplacement avec une loi de mouvement à accélération limitée et le deuxième à un déplacement avec une loi de mouvement à jerk limité, réglé grâce à l’estimation de la fréquence dominante effectuée sur l’essai précédent. On remarque tout de suite qu’après identification de la fréquence propre dominante, le comportement vibratoire de la structure est amélioré. Les vibrations en fin de mouvement ont diminué de plus de 85% pour le banc d’essais n°1 et sont quasiment nulles pour le banc d’essais n°2.

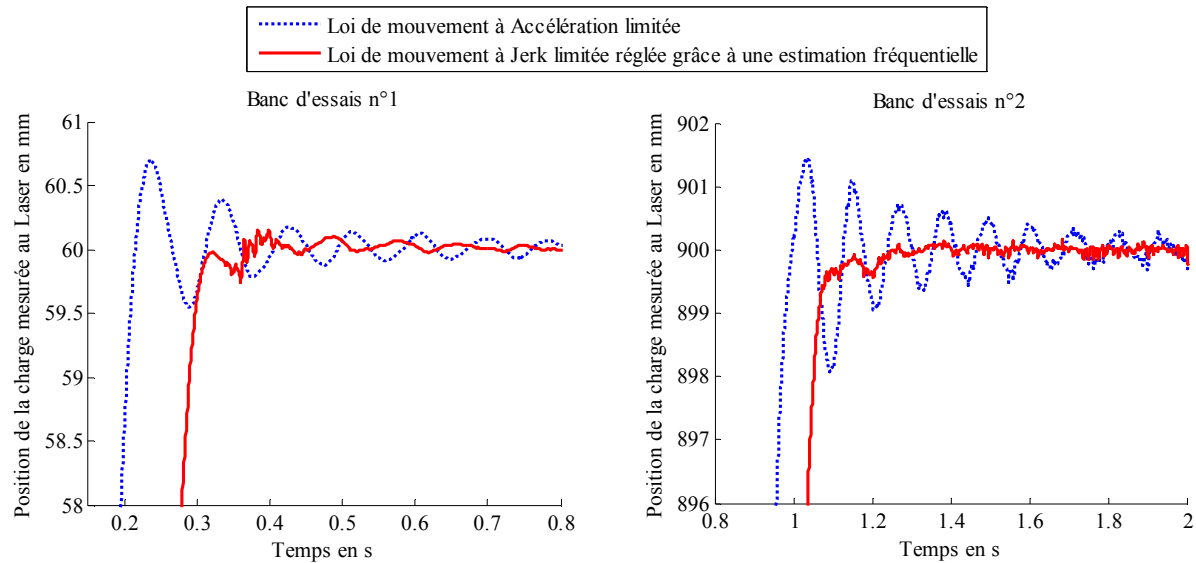


Figure 4.7 – Adaptation de la loi à jerk limité après estimation de la fréquence dominante.

|                                                                      | Amplitude maximale des vibrations au niveau de la charge |                   |
|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-------------------|
|                                                                      | Banc d'essais n°1                                        | Banc d'essais n°1 |
| Essai initial (loi de mouvement à accélération limitée)              | 0,7 mm                                                   | 1,4 mm            |
| Essai après estimation de fréquence (loi de mouvement à jerk limité) | 0,1 mm<br>(-85,7%)                                       | ≈ 0<br>(≈ -100%)  |

Tableau 4.1 – Comparatif de l'amplitude des vibrations de la charge avant et après estimation de la fréquence dominante de l'axe mis en mouvement.

## 4.4 Bilan sur les techniques d'autoréglage

Deux méthodes d'apprentissage ont été étudiées dans ce chapitre, la première méthode est adaptée à l'amélioration des commandes de la famille A et plus particulièrement à la commande par retour accélérométrique. Elle permet d'estimer les principaux paramètres physiques nécessaires aux réglages de cet asservissement, à savoir les deux masses modales  $m_1$  et  $m_2$ . Les validations expérimentales effectuées sur le banc d'essais n°2 ont permis de valider cette technique.

La deuxième méthode correspond à une estimation de la fréquence dominante de l'axe mis en mouvement. Elle permet, en particulier, de régler la loi de mouvement à jerk limité utilisé par une précommande rigide afin de maîtriser le comportement vibratoire de la structure commandée. Trois techniques d'estimation ont été présentées (calcul moyen des périodes, Transformée de Fourier Rapide et estimation algébrique) et validées sur les deux bancs d'essais. Cette liste n'est pas exhaustive, cependant la méthode par estimation algébrique est une méthode particulièrement prometteuse. L'investigation d'algorithmes plus fiables basés sur ces techniques reste un problème ouvert qui dépasse le cadre de cette étude.

Cette partie a fait l'objet d'une publication en congrès international [Dieulot, Colas et coll., 2007].

# Chapitre 5

## Conclusions générales et principales perspectives

### 5.1 Synthèse des travaux réalisés

Le travail mené tout au long de cette thèse a permis d'apporter un certain nombre de résultats théoriques et pratiques au problème de la commande d'un axe souple. La démarche adoptée permet de répondre à ce problème dans sa globalité : elle commence par les aspects modélisation en vue d'obtenir différents modèles de commande, des principes d'inversion sont ensuite utilisés pour en déduire différentes structures de commande et, enfin, des méthodes d'autoréglage adaptées à ces commande sont étudiées. Cette méthodologie s'inscrit dans une démarche déterministe classique, à savoir un enchaînement modélisation, commande et réglage. Il a été gardé à l'esprit que les solutions proposées se devaient d'être directement utilisables et implantables sur la famille complète des robots SEPRO-Robotique.

Dans le chapitre 2, nous montrons qu'un modèle mécanique de type poutre est utilisable pour modéliser le comportement d'une structure souple et permet d'extrapoler ses fréquences dominantes à partir de caractéristiques physiques simples (longueur des profilés, moment quadratique, etc.). La réduction de ce modèle a permis de mettre en exergue des modèles à paramètres localisés qui servent de modèle de commande, c'est-à-dire qui servent de base à la synthèse de commande. Nous avons montré que trois modèles de commande plus ou moins fins peuvent modéliser le comportement d'un axe souple. Parmi ceux-ci, seuls deux (modèle deux masses un ressort et modèle rigide) sont à retenir dans le cas des robots cartésiens.

Dans le chapitre 3, nous montrons en appliquant des principes d'inversion qu'une structure « idéale » de commande adaptée à un axe de machine se doit de coupler une précommande (inversion directe) et un asservissement (inversion indirecte). Un générateur de lois de mouvement est alors chargé de fournir les références nécessaires à ces deux leviers. Cette architecture est adaptée à la fois au suivi de trajectoire et au rejet de perturbation :

- la précommande qui intègre la relation inverse caractérisant la dynamique du système s'occupe de l'aspect suivi de trajectoire. L'application de principes d'inversion basée sur la théorie des systèmes permet d'obtenir deux types de précommande rigide lorsque le modèle utilisé est uniquement inertiel et souple dans le cas où le modèle utilisé est un système masse-ressort. Le choix d'une précommande conditionne alors le degré de dérivabilité minimum de

la loi de mouvement utilisée. Les notions de précommande et de lois de mouvement restent des notions duales. En effet, lorsque la précommande ne contient pas assez d'informations sur le système, il est nécessaire de « reporter » ce manque d'informations dans la génération de lois de mouvement. Une précommande rigide ne permet pas de maîtriser le comportement vibratoire d'une structure souple par exemple. Il a été nécessaire d'adapter la loi de mouvement pour tenir compte de cette souplesse,

- étant donné les inévitables imperfections du modèle et la difficulté d'intégrer en commande les perturbations exogènes agissant sur le point à contrôler, l'ajout d'un asservissement qui s'occupe du rejet de perturbation est alors indispensable. Nous avons montré à l'aide d'un comparatif que des asservissements sont plus adaptés à notre problématique, à savoir la commande par approche paramétrique et la commande par retour accélérométrique. La structure de commande par retour accélérométrique permet une modulation facile du compromis temps/vibration. Dans le cas où l'ajout d'un capteur supplémentaire n'est pas envisageable, la commande par approche paramétrique associée à une précommande rigide permet d'une manière très simple de réaliser un compromis satisfaisant.

Les résultats théoriques de ce chapitre ont tous été validés sur deux robots cartésiens de génération et de tailles différentes (cf. Annexe D).

Dans le chapitre 4, nous proposons différentes méthodes de réglage adaptés aux architectures de commande présentées au chapitre 3 et se servant de mesures effectuées sur le système commandé. Ces techniques peuvent être utilisées soit pour régler une commande en identifiant les paramètres du modèle (les masses modales  $m_1$  et  $m_2$  du modèle masse-ressort du chapitre 2), soit pour identifier la fréquence propre dominante de l'axe déplacé, identification qui est nécessaire pour le réglage d'une loi de mouvement à jerk limité. Les validations expérimentales ont montré que les techniques proposées sont toutes potentiellement utilisables sur un système industriel.

D'un point de vue industriel, outre le gain en performance aussi bien en temps de cycle qu'en comportement vibratoire, la démarche développée permet de mettre en place et systématiser le réglage d'axe sur les robots SEPRO-Robotique. Le gain de temps apporté, par rapport à un réglage basé des essais-erreurs, est en effet non négligeable sur une chaîne de conception.

## 5.2 Perspectives

De nombreuses pistes d'investigations sont soulevées par les recherches exposées dans ce mémoire.

Tout d'abord, une première piste d'étude consiste à investiguer les aspects implantations numériques. En effet, le codage d'algorithme dans des structures de programmation industrielle réserve généralement des surprises, notamment en termes de temps de calcul, partage des tâches et des retards ou erreurs ainsi induits. Les algorithmes de commande doivent ainsi être capables de gérer ces phénomènes, soit en les anticipant, soit en compensant leur effet. Il est bien connu que l'effet d'un retard de mesure ou d'action peut être extrêmement préjudiciable à la performance d'un algorithme, surtout lorsque celui-ci permet de repousser la structure vers ses possibilités dynamiques maximales.

Une seconde piste consiste à entreprendre l'optimisation des caractéristiques énergétiques des systèmes de positionnement, en intervenant sur l'architecture de commande. En particulier, le but est de réduire la durée des déplacements en optimisant la commande et d'évaluer l'incidence de l'optimisation sur l'amplitude du courant et sur la consommation énergétique. D'un point de vue pratique, la saturation en courant est, en effet, un autre facteur limitant. Le contexte économique actuel

(concurrence sévère) oblige les entreprises à calculer de manière optimale les ensembles « moteurs + variateurs » afin de rester compétitives. Les inerties et les masses sont accélérées au maximum prévu par le cahier des charges, la limite de courant (moteur + variateur) est presque atteinte. Une diminution de la limite en courant permettrait l'utilisation de convertisseurs de puissance de calibre plus faible, ce qui a un impact direct sur le coût de fabrication du système. Deux idées peuvent alors être examinées : la première consiste à intégrer un critère énergétique dans la loi de mouvement utilisée, la seconde consiste à réduire la dynamique de l'asservissement sur les phases d'accélération.

Les commandes à modèle interne du type commande prédictive auraient méritées d'être intégrées dans le comparatif réalisé au chapitre 3. Des études sont actuellement menées sur ce type de commande, le but étant d'utiliser comme modèle interne les modèles de commande présentés au chapitre 2.

La prise en compte des couplages vibratoires entre les axes est également un point important, puisque toutes les machines cartésiennes ne vérifient pas l'hypothèse de conception par modes orthogonaux. De plus, l'adaptation de la commande aux couplages inter-axes ouvre de nouvelles perspectives concernant les machines à axes non cartésiens (type robotique parallèles ou sérielles).

Le bruit de mesure, particulièrement sur le signal de vitesse, est un autre point limitant dans la commande industrielle de ce système. Une solution à ce problème, basée sur la reconstruction de la mesure vitesse par application d'un filtre de Kalman, a été testée. Cet estimateur d'état a pour avantage de ne pas introduire de retard, contrairement aux techniques de filtrage « classique » (filtre passe-bas, filtre moyenneur). Il reste cependant basé sur un modèle et l'intégration des flexibilités dans l'estimation est délicate. Une investigation plus poussée est envisageable, l'utilisation de filtres particuliers donnerait peut être de meilleurs résultats.

On remarquera, enfin, que cette démarche, bien qu'axée sur la maîtrise du comportement vibratoire, peut être appliquée sur d'autres phénomènes dont on peut déduire des modèles de commande comme les phénomènes pneumatiques ou électriques.

---



# Glossaire

## Asservissement

Calcul des signaux de consigne des actionneurs à partir de valeurs de consigne et de mesures de grandeurs physiques à piloter.

## Inégalité Matricielle Linéaire (LMI)

Relation mathématique de la forme :

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_n F_n \succ 0,$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur réel,  $F_0 \dots F_n$  sont des matrices symétriques réelles et l'inégalité  $\succ$  signifie définie positive.

## Loi de mouvement

Fonction temporelle décrivant le mouvement d'un point.

## Modèle de commande

Modèle servant de base à une synthèse d'une architecture de commande d'un système. Ce type de modèle doit réaliser un compromis entre représentation fidèle du comportement de ce système et complexité généralement représentée par son ordre.

## Modèle de comportement

Modèle basé sur les relations physiques entre les grandeurs du système. Ces relations sont établies par raisonnement, à partir d'hypothèses spécifiques et de lois générales de la physique appliquées au système. Ainsi, pour modéliser le mouvement d'une pièce mécanique, on pourra par exemple l'assimiler à son centre de gravité, négliger les frottements et appliquer la relation fondamentale de la dynamique.

## Modèle de connaissance

Modèle purement mathématique de la relation observée entre des grandeurs d'entrées (causes) et de sorties (effets). Le tracé de la caractéristique d'un injecteur piézo-électrique constitue par exemple un modèle de comportement à part entière. Les techniques d'identification, de réseaux de neurones et d'estimation paramétrique permettent d'obtenir des modèles de comportement plus complexes.

## Mouvement de type point à point

Mouvement qui déplace un système d'un point à un autre avec des contraintes au niveau des points de départ et d'arrivée. Ce type de mouvement appliqué à un axe souple possède généralement des contraintes sur le comportement vibratoire de l'axe au début et à la fin d'un déplacement.

**Mouvement de type suivi de trajectoire**

Mouvement qui déplace un système avec des contraintes tout au long du déplacement. L'application de ce type de mouvement à un axe souple permet de maîtriser les déformations au début, à la fin et pendant un déplacement.

**Polytope**

Généralisation à toutes dimensions de la notion de polygone pour un espace à deux dimensions et de polyèdre pour un espace à trois dimensions.

**Précommande**

Calcul des signaux de consignes des actionneurs de façon à obtenir la trajectoire désirée (aspect commande en boucle ouverte), également appelé anticipation dans les commandes actuelles. Le terme d'anticipation (action à l'avance) n'a de sens que comparativement à la dynamique d'une boucle fermée (asservissement).

**Trajectoire d'un système**

Soit un système dont l'évolution temporelle est régie par  $\dot{x} = f(x, u)$ . Une trajectoire d'un système est un élément de l'ensemble  $\{x_0(t), u_0(t)\}$  qui vérifie l'équation précédente pour tout  $t$  :

$$\forall t \quad \dot{x}_0(t) = f(x_0(t), u_0(t))$$

---

# Bibliographie

Armstrong-Helouvry, B., Dupont, P. et Canudas de Wit, C. (1994). A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica*, 30, pp. 1083-1138.

Astrom, K. J. et Wittenmark, B. (1994). Adaptive Control. Boston, Addison-Wesley.

Balas, G. J., Doyle, J. C., Glover, K., Packard, A. et Smith, R. (2001).  $\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox User's Guide, The MathWorks, Inc.

Barre, P. J. (2004). Commande et Entraînement des Machines-Outils à Dynamique Elevée - Formalisme et applications, Habilitation à diriger des recherches, USTL.

Barre, P. J., Béarée, R., Borne, P. et Dumetz, E. (2005). Influence of a Jerk Controlled Movement Law on the Vibratory Behaviour of High-Dynamics Systems. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 42, pp. 275-293.

Barre, P. J., Hautier, J. P. et Charley, J. (1996). The use of modal analysis to improve the axis control. *Fourth International Congress on Sound and Vibration*, St Petersburg.

Béarée, R. (2005). Prise en compte des phénomènes vibratoires dans la génération de commande des machines-outils à dynamique élevée, Thèse de l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers.

Béarée, R. et Barre, P. J. (2006). Adaptation de la loi de mouvement aux systèmes de positionnement à dynamique élevée. *4ème Assises Machines et Usinage à Grande Vitesse*, Aix en Provence.

Béarée, R., Barre, P. J. et Bloch, S. (2004). Influence of high feed rate machine tool control parameters on the contouring accuracy. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 40, pp. 321-342.

Béarée, R., Barre, P. J. et Hautier, J. P. (2005). Vibration reduction abilities of some jerk-controlled movement laws for industrial machines. *16th IFAC World Congress*, Prague.

Benson, S. J. et Ye, Y. (2005). DSDP5 User Guide - Software for Semidefinite Programming, <http://www-unix.mcs.anl.gov/DSDP/>.

Bhattacharyya, S., Chapellat, H. et Keel, L. (2002). Robust Control: The Parametric Approach. Upper Saddle River, New Jersey, Prentice Hall.

Blanchet, G. et Charbit, M. (2001). Signaux et images sous Matlab. Paris, HERMES Science Europe Ltd.

Bonnans, J. F., Gilbert, J. C., Lemaréchal, C. et Sagastizabal, C. A. (2003). Numerical optimization: Theoretical and practical aspects. New York, Springer.

- Borne, P., Dauphin-Tanguy, G., Richard, J. P., Rotella, F. et Zambettakis, I. (1993). Analyse et régulation des processus industriels, tome 1 : Régulation continue, Technip.
- Boucher, P. et Dumur, D. (1996). La commande prédictive. Paris, Editions Technip.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. et Balakrishnan, V. (1994). Linear Matrix Inequalities in System and Control. *SIAM Studies in Applied Mathematics*, Philadelphia.
- Bristow, D. A., Tharayil, M. et Alleyne, A. G. (2006). A survey of Iterative Learning Control. *IEEE Control Systems Magazine*, 26, pp. 96-114.
- Bruël&Kjaer Modal Analysis of Large Structures, Multiple Exciter Systems (Note d'application).
- Brun-Picard, D. (2005). Influence des lois de mouvement sur les déformations et les vibrations des machines à grande vitesse. *Mécanique & Industries*, 6, pp. 417-423.
- Brunovsky, P. (1970). A classification of linear controllable systems. *Kybernetika*, 6, pp. 176-178.
- Bukkems, B., Kostic, D., Jager, B. d. et Steinbuch, M. (2005). Learning-based identification and Iterative Learning Control of Direct-Drive robots. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 13, pp. 537-549.
- Chen, D. et Paden, B. (1996). Stable inversion of nonlinear non-minimum phase systems. *International Journal of Control*, 64, pp. 81-97.
- Chen, Y. (1963). The vibration of beams or rods carrying a concentrated mass. *ASME/Journal of Applied Mechanics*, 39, pp. 310-311.
- Clarke, D. W., Mohtadi, C. et Tuffs, P. S. (1987). Generalized Predictive Control. *Automatica*, 23, pp. 149-160.
- Colas, F., Barre, P. J. et Dieulot, J. Y. (2006). A Quantitative Evaluation Of The Non-Minimum Phase Phenomenon For A Robot Arm. *CESA '2006 IEEE Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications*. Pekin.
- Colas, F., Dieulot, J. Y. et Barre, P. J. (2006). Influence de différentes structures de commande sur le compromis temps/vibration - Application à un robot cartésien. *4èmes Assises Machines et Usinage à Grande Vitesse*. Aix en Provence.
- Colas, F., Dieulot, J. Y., Barre, P. J. et Borne, P. (2005). Dynamic modeling of a non-minimum phase system using the Causal Ordering Graph. *WSEAS Control '05*, Venise.
- Colas, F., Dieulot, J. Y., Barre, P. J. et Borne, P. (2005). Dynamics modeling and Causal Ordering Graph representation of a non-minimum phase flexible arm fixed on a cart. *WSEAS Transaction on systems*, 5, pp. 225-232.
- Colas, F., Dumetz, E., Barre, P. J. et Dieulot, J. Y. (2005). Use of the COG representation to control a robot with acceleration feedback. *IFAC ICINCO 2005*, Barcelone.
- Culforth, C. F. et Pao, L. Y. (2004). Adaptive input shaping for maneuvering flexible structures. *Automatica*, 40, pp. 685-693.
- Cutler, C. R. et Ramaker, B. L. (1980). Dynamic Matrix Control - a computer control algorithm. *Proceedings of the joint automatic control conference*, San Francisco.

- Destuynder, P. et Santi, F. (2003). Calcul Scientifique : Analyse et Contrôle Numérique du Signal, Technosup - ELLIPSES.
- Dieulot, J. Y., Colas, F., Barre, P. J. et Borne, P. (2007). Indirect Adaptive learning of Acceleration feedback control for chained Multiple Mass-Spring-Damper Systems. *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 2007)*, Rome.
- Dieulot, J. Y., Thimoumi, I., Colas, F. et Béarée, R. (2006). Numerical aspects and performances of trajectory planning methods of flexible axes. *IJCSNS International Journal of Computer Science and Network Security*, 1, pp. 35-44.
- Dingwell, J. B., Mah, C. D. et Mussa-Ivaldi, F. A. (2004). Experimentally Confirmed Mathematical Model for Human Control of a Non-Rigid Object. *Journal of Neurophysiology*, 91, pp. 1158-1170.
- Dombre, E. et Khalil, W. (1999). Modélisation, identification et commande des robots. Paris, Hermès Science Publications.
- Doyle, J. C. (1978). Guaranteed margins for LQG regulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 23, pp. 756-757.
- Doyle, J. C., Glover, K., Khargonakar, P. et Francis, B. (1989). State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34, pp. 831-847.
- Dumetz, E., Barre, P. J., Bergeon, M. et Bloch, S. (2002). Techniques de filtrage pour la commande de machines à dynamique élevée. *2ème Assises Machines et Usinage à Grande Vitesse*. Lille.
- Dumetz, E., Dieulot, J. Y., Barre, P. J., Colas, F. et Delplace, T. (2006). Control of an Industrial Robot using Acceleration Feedback. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 46, pp. 111-128.
- Ellis, G. et Lorenz, R. D. (1999). Comparison of motion control loops for industrial applications. *Industry Applications Conference, 1999. Thirty-Fourth IAS Annual Meeting.*, Phoenix, AZ, USA.
- Erkorkmaz, K., Yeung, C.-H. et Altintas, Y. (2006). Virtual CNC system. Part II. High speed contouring application. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 46, pp. 1124-1138.
- Ewins, D. J. (1999). Modal Testing: Theory, Practice and Application. Hertfordshire, Research Studies Press Ltd.
- Fliess, M., Lévine, J., Martin, P. et Rouchon, P. (1995). Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples. *International Journal of Control*, 61, pp. 1327-1361.
- Fliess, M. et Sira-Ramirez, H. (2003). Automatique théorique. Reconstructeurs d'Etat. *C. R. Académie des Sciences de Paris*, 2, pp. 91-96.
- Fliess, M., Sira-Ramirez, H., Mboup, M. et Mounier, H. (2003). Questioning some paradigms of signal processing via concrete examples. *Conference on algebraic Methods in Flatness*, Mexico.
- Gautier, M. et Poignet, P. (2002). Identification en boucle fermée par modèle inverse des paramètres physiques de systèmes mécatroniques. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 36, pp. 465-480.
- Ge, S. S., Lee, T. H. et Zhu, G. (1998). Asymptotically stable end-point regulation of a flexible SCARA/Cartesian robot. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 3, pp. 138-144.
- Ghazavi, A. et Gordaninejad, F. (1995). A comparison of the control of a flexible robot arm constructed from graphite/epoxy versus aluminum. *Computer and Structures*, 54, pp. 621-632.

- Ginsberg, J. H. (2001). *Mechanical and Structural Vibrations: Theory and Applications*. New York, John Wiley & Sons.
- Graichen, K., Hagenmeyer, V. et Zeitz, M. (2005). A new approach to inversion-based feedforward control design for nonlinear systems. *Automatica*, 41, pp. 2033-2041.
- Gürgöze, M. (1996). On the eigenfrequencies of a cantilever beam with attached tip mass and a spring mass system. *Journal of Sound and Vibration*, 190, pp. 149-162.
- Hanselman, D. C. (1994). Minimum torque ripple, maximum efficiency excitation of brushless permanent magnet motors. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 41, pp. 292-300.
- Harris, C. M. (1996). *Shock and Vibration Handbook* (fourth edition). New York, McGraw-Hill.
- Hautier, J. P. et Barre, P. J. (2004). The Causal Ordering Graph A tool for system modelling and control law synthesis. *Journal of studies in informatics an control*, 13, pp. 265-283.
- Hayes, M. H. (1996). *Statistical Digital Signal Processing*, John Wiley & Sons.
- Henrion, D., Arzelier, D. et Peaucelle, D. (2003). Positive polynomial matrices and improved LMI robustness conditions. *Automatica*, 39, pp. 1479-1485.
- Hermes, H. et Lasalle, J. P. (1969). *Functional analysis and time optimal control*. New York, Academic Press.
- Hernandez, D., Park, S., Horowitz, R. et Packard, A. K. (1999). Dual-stage track following servo design for hard disk drives. *Proceedings of the American Control Conference*.
- Holtz, J. et Springob, L. (1996). Identification and compensation of torque ripple in high-precision permanent magnet motor drives. *IEEE Transaction On Industrial Electronics*, 43, pp. 309-320.
- Horowitz, I. M. (1963). *Synthesis of feedback systems*. New York, Academic Press.
- Ignizio, J. (1991). *Introduction to Expert Systems : the developement and implementation of rule-based expert systems*. New York, Mc Graw-Hill.
- Isermann, R. (2005). *Mechatronic Systems Fundamentals*. New York, Springer.
- Isidori, A. (1989). *Nonlinear Control Systems*. New York, Springer.
- Isidori, A. et Byrnes, C. I. (1990). Output regulation of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35, pp. 131-140.
- Jakubczyk, B. et Respondek, W. (1980). On linearization of control systems. *Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math.*, 18, pp. 517-522.
- Jiang, P., Unbehauen, R. et Woo, P. Y. (2001). Singularity-free indirect iterative learning control. *40th IEEE Conference on Decision and Control*.
- Karnopp, D. C., Margolis, D. L. et Rosenberg, R. C. (2000). *System dynamics: modeling and simulation of mechatronic systems* (third edition). New York, Wiley-Interscience.
- Khalil, W. et Gautier, M. (2000). Modeling of mechanical systems with lumped elasticity. *IEEE Conference on Robotics and Automation*. San Francisco.

- Khalil, W., Liegeois, A. et Fournier, A. (1979). Commande dynamique des robots. *Revue RAIRO Automatique / Systels Analysis and Control*, 13, pp. 189-201.
- Lee, D. G., Lee, C. S., Lee, H. G., Hwang, H. Y. et Kim, J. W. (2004). Novel applications of composite structures to robots, machine tools and automobile. *Composite Structures*, 66, pp. 17-39.
- Lévine, J. et Nguyen, D. V. (2003). Flat output characterization for linear systems using polynomial matrices. *Systems & Control Letters*, 48, pp. 69-75.
- Lippman, R. P. (1987). An introduction to computing with neural nets. *IEEE ASSP Magazine*, 4, pp. 4-22.
- Ljung, L. (1999). System Identification: Theory for the User, 2nd edition, Prentice Hall.
- Loftberg, J. (2004). YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Taipei, Taiwan.
- Low, K. H. (1987). A systematic formulation of dynamic equations for robot manipulators with elastic links. *Journal of Robotic Systems*, 4, pp. 435-456.
- Low, K. H. (1997). A note on the effect of hub inertia and payload on the vibration of a flexible slewing link. *Journal of Sound and Vibration*, 204, pp. 823-828.
- Low, K. H. (1998). On the eigenfrequencies for mass loaded beams under classical boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 215, pp. 381-389.
- Luo, G. et Saridis, G. (1985). LQ Design of PID controllers for robot arms. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 1, pp. 152-159.
- Luo, Z. H., Kitamura, N. et Guo, B. Z. (1995). Shear force feedback control of flexible robot arms. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 11, pp. 760-763.
- Margolis, D. L. (1978). Bond Graphs, normal Modes and vehicule Structures. *Vehicule System Dynamics*, 7, pp. 49-63.
- Moore, B. (1981). Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability, and Model Reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26, pp. 17-31.
- Moore, K. L. (1998). Iterative Learning Control: An expository overview. *Applied and Computational Controls, Signal Processing and Circuits*, 1, pp. 425-488.
- Packard, A. et Doyle, J. C. (1993). The complex structured singular value. *Automatica*, 29, pp. 71-109.
- Paijmans, B., Symens, W., Van Brussel, H. et Swevers, J. (2006). A gain-scheduling-control technique for mechatronic systems with position-dependent dynamics. *American Control Conference*.
- Park, S., Chung, W. K. et Youm, Y. (2000). Natural frequencies and open-loop responses of an elastic beam fixed on a moving cart and carrying an intermediate lumped mass. *Journal of Sound and Vibration*, 230, pp. 591-615.
- Park, S., Kim, B. K. et Youm, Y. (2001). Single-mode vibration suppression for a beam-mass-cart system using input preshaping with a robust internal-loop compensator. *Journal of Sound and Vibration*, 241, pp. 693-716.

- Parnell, L. A. et Cobble, M. H. (1976). Lateral displacement of a vibrating cantilever with a concentrated mass. *Journal of Sound and Vibration*, 44, pp. 499-511.
- Petit, N., Milam, M. B. et Murray, R. M. (2001). Inversion Based Constrained Trajectory Optimization. *5th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*.
- Piazzzi, A. et Visioli, A. (2001). Optimal noncausal set-point regulation of scalar system. *Automatica*, 37, pp. 121-127.
- Pledel, P., Bestaoui, Y. et Gautier, M. (1997). Motion generation in cartesian space for industrial robots with actuators limitations. *Applied Mathematics and Computer Science Journal, Recent Developments in Robotics*, 7, pp.
- Poignet, P., Gautier, M., Khalil, W. et Pham, M. (2002). Modeling, simulation and control of high speed machine tools using robotics formalism. *Mechatronics*, 12, pp. 461-487.
- Reinhard, H. (2002). *Eléments de Mathématique du Signal*, Dunod.
- Richalet, J., Rault, A., Testud, J. L. et Papon, J. (1978). Model Predictive Heuristic Control: Applications to industrial processes. *Automatica*, 14, pp. 413-428.
- Singhose, W., Singer, N. et Seering, W. (1997). Time-optimal negative input-shapers. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 119, pp. 198-205.
- Sira-Ramirez, H. (2003). An algebraic framework for linear identification. *ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 1, pp. 151-168.
- Sloss, J. M., Brush, J. C., Sadek, I. S. et Adali, S. (2003). Piezo patch sensor/actuator control of the vibrations of a cantilever under axial load. *Composite Structures*, 62, pp. 423-428.
- Sun, D. et Mills, J. K. (1999). High-accuracy trajectory tracking of industrial robot manipulator using adaptive learning scheme. *American Control Conference*.
- Tallman, G. et Smith, O. (1958). Analog study of dead-beat posicast control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 4, pp. 14-21.
- Timoshenko, S. P. (1970). *Theory of elasticity*. New York, McGraw-Hill.
- To, C. W. S. (1982). Vibration of a cantilever beam with a base excitation and tip mass. *Journal of Sound and Vibration*, 83, pp. 445-460.
- Torfs, D. E., Vuerinckx, R., Swevers, J. et Schoukens, J. (1998). Comparison of two feedforward design methods aiming at accurate trajectory tracking of the end point of a flexible robot arm. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 6, pp. 2-14.
- Vivas, A. et Poignet, P. (2005). Predictive functional control of a parallel robot machine. *Control Engineering Practice*, 13, pp. 863-874.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Inf. Control*, 8, pp. 338-353.
- Zain, M. Z., Tokhi, M. O. et Mohamed, Z. (2006). Hybrid learning control schemes with input shaping of a flexible manipulator system. *Mechatronics*, 16, pp. 209-216.
-

# Annexe A

## Principe de l'analyse modale expérimentale

Les chaînes d'acquisition dédiées à l'analyse modale sont toujours composées de trois éléments principaux, un mécanisme d'excitation, un système de mesure permettant d'obtenir la réponse de la structure au mécanisme d'excitation et un analyseur de spectre qui récupère et traite les données à chaque essai.

La figure A.1 présente le système de mesure utilisé pour une analyse modale expérimentale. Il est composé de cinq éléments principaux :

- un marteau de chocs excitant la structure, qui permet de mesurer l'effort d'impact pendant chaque essai et de récupérer une réponse impulsionnelle,
- plusieurs accéléromètres de type piézoélectrique qui sont généralement fixés sur la structure à tester à l'aide d'embases aimantées,
- un dispositif de mise à niveau des signaux qui permet de filtrer et d'amplifier les signaux de mesure,
- un analyseur de spectre qui permet de traiter tous les signaux de mesure pour afficher sous différentes formes la réponse de la structure,
- un PC connecté à l'analyseur de spectre pour afficher les résultats.

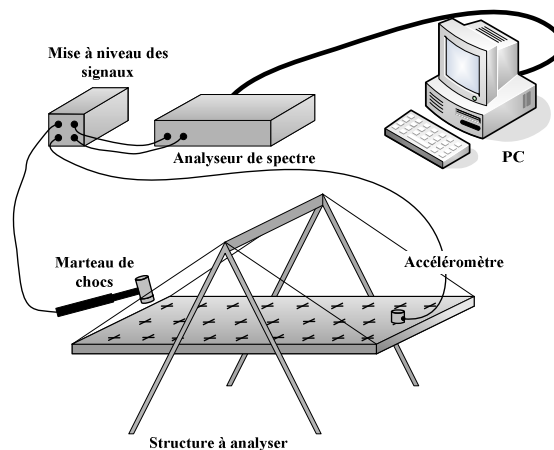


Figure A.1 – Système de mesure utilisé pour une analyse modale expérimentale.

Nous allons illustrer cette méthode d'analyse sur l'exemple simple d'un système possédant un unique mode de transmission qui peut se représenter par le système masse-ressort présenté Figure A.2. Dans ce cas, la dynamique du système est régie par :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= k(y_2 - y_1) + c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + u, \\ m_2 \ddot{y}_2 &= k(y_1 - y_2) + c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

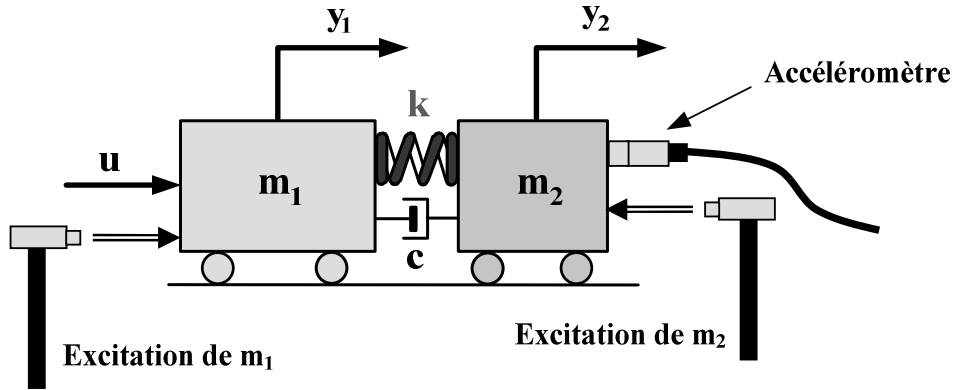


Figure A.2 – Analyse modale expérimentale d'un modèle 2 Masses – 1 Ressort.

En utilisant le formalisme de Laplace, les fonctions de transfert recherchées s'écrivent :

$$H_1(s) = \frac{\ddot{Y}_1(s)}{U(s)} = \frac{k + c.s + m_2.s^2}{(m_1 + m_2) \left( k + c.s + \frac{m_1.m_2}{m_1 + m_2}.s^2 \right)} = \frac{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}.s + \frac{s^2}{\omega_a^2}}{M_T \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_n}.s + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right)}, \quad (\text{A.2})$$

$$H_2(s) = \frac{\ddot{Y}_2(s)}{U(s)} = \frac{k + c.s}{(m_1 + m_2) \left( k + c.s + \frac{m_1.m_2}{m_1 + m_2}.s^2 \right)} = \frac{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}.s}{M_T \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_n}.s + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right)}, \quad (\text{A.3})$$

$$\text{avec } M_T = m_1 + m_2, \omega_n^2 = \frac{M_T.k}{m_1.m_2}, \frac{c}{k} = \frac{2\xi}{\omega_n} \text{ et } \omega_a^2 = \frac{k}{m_2}, \quad (\text{A.4})$$

où  $\ddot{Y}_1(s)$ ,  $\ddot{Y}_2(s)$  et  $U(s)$  représentent respectivement les transformées de Laplace de l'accélération de  $m_1$ , de l'accélération de  $m_2$  et de l'effort d'entrée,  $M_T$  la masse totale en mouvement.

Pour déterminer chacun des paramètres qui caractérisent (A.2) et (A.3), un accéléromètre est généralement placé sur  $m_2$  et la structure est excitée soit par un choc (impulsion) sur  $m_1$  soit par un choc sur  $m_2$  (Figure A.2).

Généralement, la structure est excitée au niveau de la charge, c'est-à-dire au niveau de  $m_2$ . L'analyseur de spectre récupère l'allure d'une fonction de transfert qui correspond à  $H_1(s)$ , puisque la réponse obtenue dans ce cas correspond à celle où l'excitation et la mesure sont colocalisées. Comme l'analyse spectrale que nous réalisons se fait sur les parties réelles et imaginaires des fonctions de transfert de la réponse de la structure, l'allure de celles-ci pour  $H_1(s)$  est présentée Figure A.3 :

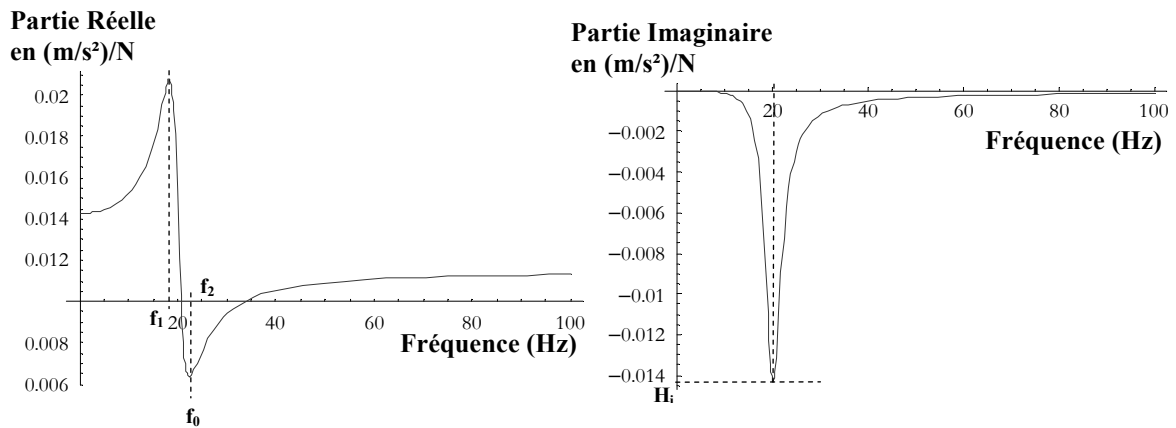


Figure A.3 – Allure des parties réelle et imaginaire de  $H_1(s)$ .

Dans le cas où la structure est faiblement amortie, il est simple de calculer les valeurs introduites dans (A.4) à partir de celles de la figure A.3 :

$$\zeta = \frac{f_2 - f_1}{2f_0}, \omega_n = 2\pi \cdot f_0 \text{ et } \omega_a = \frac{\omega_n}{\sqrt{2M_T \cdot H_i \cdot \zeta + 1}}. \quad (\text{A.5})$$

A partir de (A.4) et (A.5), il est alors possible de calculer directement les valeurs des paramètres  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $k$  et  $c$ .

Les résultats expérimentaux obtenus sur le banc d'essais n°1 sont résumés dans la suite. Les différents points de mesure sont représentés par la grille de position de la figure A.4 dont les coordonnées sont décrites tableau A.1.

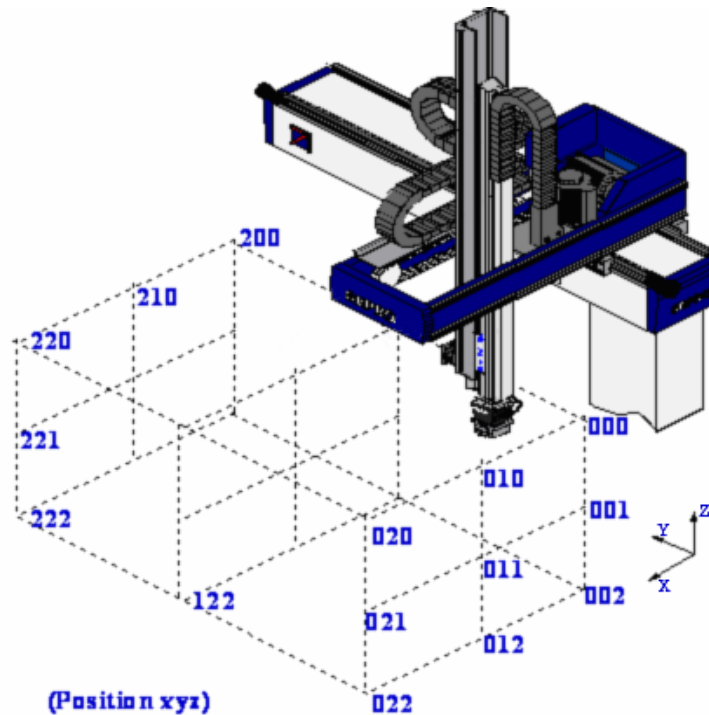


Figure A.4 – Grille de positions.

| <b>Coordonnées</b><br><b>Positions</b> | <b>X (en mm)</b> | <b>Y (en mm)</b> | <b>Z (en mm)</b> |
|----------------------------------------|------------------|------------------|------------------|
| 000                                    | 340              | 102.1            | 114.4            |
| 001                                    | 340              | 102.1            | 504.9            |
| 002                                    | 340              | 102.1            | 950.9            |
| 010                                    | 340              | 322.8            | 114.4            |
| 011                                    | 340              | 322.8            | 504.9            |
| 012                                    | 340              | 322.8            | 950.9            |
| 020                                    | 340              | 600              | 114.4            |
| 021                                    | 340              | 600              | 504.9            |
| 022                                    | 340              | 600              | 950.9            |
| 100                                    | 950              | 102.1            | 114.4            |
| 101                                    | 950              | 102.1            | 504.9            |
| 102                                    | 950              | 102.1            | 950.9            |
| 110                                    | 950              | 322.8            | 114.4            |
| 111                                    | 950              | 322.8            | 504.9            |
| 112                                    | 950              | 322.8            | 950.9            |
| 120                                    | 950              | 600              | 114.4            |
| 121                                    | 950              | 600              | 504.9            |
| 122                                    | 950              | 600              | 950.9            |
| 200                                    | 2000             | 102.1            | 114.4            |
| 201                                    | 2000             | 102.1            | 504.9            |
| 202                                    | 2000             | 102.1            | 950.9            |
| 210                                    | 2000             | 322.8            | 114.4            |
| 211                                    | 2000             | 322.8            | 504.9            |
| 212                                    | 2000             | 322.8            | 950.9            |
| 220                                    | 2000             | 600              | 114.4            |
| 221                                    | 2000             | 600              | 504.9            |
| 222                                    | 2000             | 600              | 950.9            |

**Tableau A.1 – Coordonnées de la grille de position utilisée pour l'analyse modale expérimentale.**

Pour chacune des positions allant de 000 à 022, les tableaux suivants résument l'évolution de la fréquence des modes de déformation dominants selon chacun des axes :

**Axe X :**

|            | <b>Y=0</b> | <b>Y=1</b> | <b>Y=2</b> |
|------------|------------|------------|------------|
| <b>Z=0</b> | 13,63 Hz   | 12,5 Hz    | 11,5 Hz    |
| <b>Z=1</b> | 12,19 Hz   | 11,06 Hz   | 9,44 Hz    |
| <b>Z=2</b> | 10,68 Hz   | 9,38 Hz    | 8,00 Hz    |

**Tableau A.2 – Evolution de la fréquence du mode dominant de l'axe X.**

**Axe Y :**

|            | <b>Y=0</b> | <b>Y=1</b> | <b>Y=2</b> |
|------------|------------|------------|------------|
| <b>Z=0</b> | 14,13 Hz   | 13,75 Hz   | 13,56 Hz   |
| <b>Z=1</b> | 13,69 Hz   | 13,25 Hz   | 12,81 Hz   |
| <b>Z=2</b> | 12,69 Hz   | 12,06 Hz   | 11,69 Hz   |

**Tableau A.3 – Evolution de la fréquence du mode dominant de l'axe Y.**

La méthode d'identification développée auparavant est ensuite utilisée pour déterminer les paramètres modaux de chacun des axes.

**Axe X :**

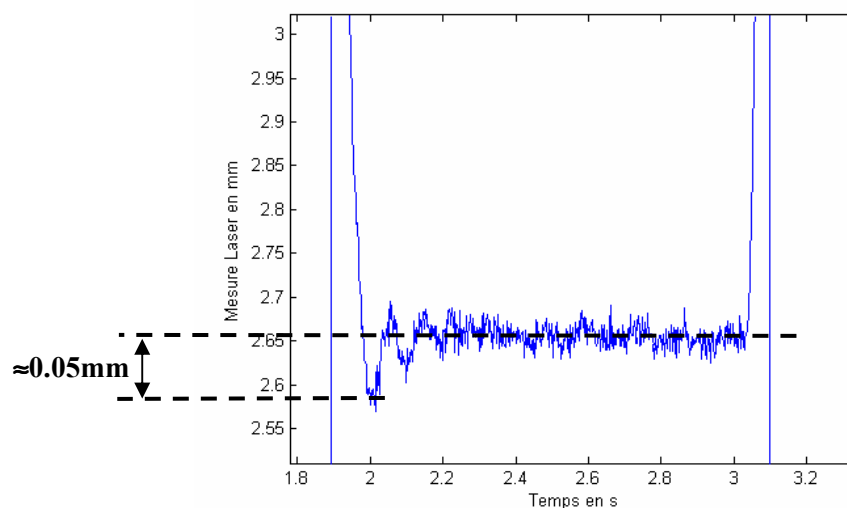
| <b>Position</b> | <b>Fréquence propre (en Hz)</b> | <b>Masse Mobile <math>M_T</math> (en kg)</b> | <b>Masse m1 (en kg)</b> | <b>Masse m2 (en kg)</b> | <b>Raideur k (en N/m)</b> | <b>Amortissement c en N/(m/s)</b> |
|-----------------|---------------------------------|----------------------------------------------|-------------------------|-------------------------|---------------------------|-----------------------------------|
| <b>000</b>      | 13,63                           | 171                                          | 147,41                  | 23,59                   | 149014                    | 111,79                            |
| <b>001</b>      | 12,19                           | 171                                          | 157,43                  | 13,57                   | 73242,4                   | 78,48                             |
| <b>002</b>      | 10,68                           | 171                                          | 159,9                   | 11,1                    | 46847,6                   | 48,96                             |
| <b>010</b>      | 12,5                            | 171                                          | 153,36                  | 17,64                   | 98575                     | 198,8                             |
| <b>011</b>      | 11,06                           | 171                                          | 159,45                  | 11,55                   | 52018,6                   | 67,65                             |
| <b>012</b>      | 9,38                            | 171                                          | 158,75                  | 12,25                   | 39441,7                   | 35,71                             |
| <b>020</b>      | 11,5                            | 171                                          | 156,19                  | 14,81                   | 73733,3                   | 306,12                            |
| <b>021</b>      | 9,44                            | 171                                          | 152,94                  | 18,06                   | 56787,3                   | 63,42                             |
| <b>022</b>      | 8                               | 171                                          | 157,52                  | 13,48                   | 31370,2                   | 29,25                             |

**Axe Y :**

| Position | Fréquence propre (en Hz) | Masse Mobile $M_T$ (en kg) | Masse m1 (en kg) | Masse m2 (en kg) | Raideur k (en N/m) | Amortissement c en N/(m/s) |
|----------|--------------------------|----------------------------|------------------|------------------|--------------------|----------------------------|
| 000      | 14,13                    | 78,6                       | 62,1             | 16,50            | 102686             | 61,43                      |
| 001      | 13,69                    | 78,6                       | 67,86            | 10,74            | 68597,8            | 43,71                      |
| 002      | 12,69                    | 78,6                       | 70,06            | 8,54             | 48387,5            | 41,86                      |
| 010      | 13,75                    | 78,6                       | 70,36            | 8,24             | 55070,4            | 46,36                      |
| 011      | 13,25                    | 78,6                       | 69,64            | 8,96             | 55043,2            | 31,19                      |
| 012      | 12,06                    | 78,6                       | 70,06            | 8,54             | 43733              | 35,88                      |
| 020      | 13,56                    | 78,6                       | 69,32            | 9,28             | 59419,4            | 32,13                      |
| 021      | 12,81                    | 78,6                       | 71,04            | 7,56             | 44302,1            | 32,21                      |
| 022      | 11,69                    | 78,6                       | 70,59            | 8,01             | 38661,9            | 45,2                       |

**Remarque concernant l'axe Z :**

Des tests au marteau de chocs et des mesures d'amplitudes de vibrations de la charge au capteur Laser ont été faits pour identifier les souplesses de l'axe Z. Seulement, aucune souplesse n'est réellement détectable à partir des tests réalisés au marteau de chocs. Les relevés temporels avec mesure Laser confirme ce résultat (Figure A.5) puisque, lors d'un déplacement en Z à accélération et vitesse maximums, le bout du bras Z mobile vibre au maximum de 0,05 mm. On reste très loin des amplitudes de vibrations des autres axes et il est de toutes façons impossible de déterminer si ces vibrations viennent d'une souplesse mécaniques ou d'une souplesse due aux asservissements.



**Figure A.5 – Mesure Laser au niveau de la charge pour un déplacement en Z de 900mm.**

## Annexe B

# Analyse modale du modèle continu de l'axe Y

La position  $y$  du chariot  $M$  est divisée en deux contributions, une qui décrit le mouvement du centre de gravité du système soumis à la seule commande des forces extérieures  $f(t)$ ,  $F_{21}$  et  $F_{22}$  et une autre provenant de la perturbation des ensembles 20 et 21 :

$$y_2(t) = \alpha_2(t) + \beta_2 q_2(t) \text{ avec } M_{t2} \ddot{\alpha}_2(t) = \sum F_{ext}, \quad (\text{B.1})$$

où  $M_{t2}$  est la masse totale de la partie fixe.

On suppose alors que les déplacements du bras s'écrivent de la façon suivante (principe de séparation des variables) :

$$w_{2i}(z, t) = \Phi_{2i}(z) q_2(t), \quad (\text{B.2})$$

D'après (2.37),  $\beta_2$  s'exprime de la façon suivante :

$$\beta_2 = -\frac{m_1}{M} \Psi_{21}(-l_0 + l_1) - \frac{\rho_{20}}{M} \int_0^{l_2-l_0} \Psi_{20}(z) dz - \frac{\rho_{21}}{M} \int_{-l_0}^0 \Psi_{21}(z) dz, \quad (\text{B.3})$$

avec  $\Psi_{2i}(z) \triangleq \beta_2 + \Phi_{2i}(z)$ .

La substitution de (B.2) et (B.3) dans (2.38) et (2.39) donne :

$$EI_{20} \Psi_{20}^{(4)}(z) q_2(t) + \rho_{20} \Psi_{20}(z) \ddot{q}_2(t) = \begin{aligned} & -\rho_{20} \ddot{\alpha}_2(t) + F_{21} \delta(z - z_{F_{21}}) \delta(z_{F_{21}}) \\ & + F_{22} \delta(z - z_{F_{22}}) \delta(z_{F_{22}}) \end{aligned}, \quad (\text{B.4})$$

$$EI_1 \Psi_{21}^{(4)}(z) q_2(t) + \bar{\rho}_{21} \Psi_{21}(z) \ddot{q}_2(t) = \begin{aligned} & -\bar{\rho}_{21} \ddot{\alpha}_2(t) + F_{21} \delta(z - z_{F_{21}}) (1 - \delta(z_{F_{21}})) \\ & + F_{22} \delta(z - z_{F_{22}}) (1 - \delta(z_{F_{22}})) \end{aligned}. \quad (\text{B.5})$$

Pour obtenir les modes propres (solutions des équations précédentes sans sollicitations extérieures), les termes qui ne dépendent que de la composante spatiale  $z$  et les termes qui ne dépendent que de la composante temporelle  $t$  sont séparés, nous avons alors :

$$\ddot{q}_2(t) + \omega_2^2 q_2(t) = 0, \quad (\text{B.6})$$

$$EI_{20} \Psi_{20}^{(4)}(z) - \omega_2^2 \rho_{20} \Psi_{20}(z) = 0, \quad (\text{B.7})$$

$$EI_{21} \Psi_{21}^{(4)}(z) - \omega_2^2 [\rho_{21} + m_1 \delta(z - (-l_0 + l_1))] \Psi_{21}(z) = 0. \quad (\text{B.8})$$

Et les conditions aux limites (2.40) et (2.41) deviennent :

$$\text{Sur } 20 \begin{cases} \Psi_{20}(0) = \beta_2 & \Psi'_{20}(0) = 0, \\ \Psi''_{20}(l_2 - l_0) = 0 & \Psi^{(3)}_{20}(l_2 - l_0) = 0, \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

$$\text{Sur } 21 \begin{cases} \Psi_{21}(0) = \beta_2 & \Psi'_{21}(0) = 0, \\ \Psi''_{21}(-l_0) = 0 & \Psi^{(3)}_{21}(-l_0) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

En utilisant le formalisme de Laplace, (B.7) devient :

$$\bar{\Psi}_{20}(s) = \frac{s^3}{s^4 - k_{20}^4} \beta_2 + \frac{s}{s^4 - k_{20}^4} \Psi''_{20}(0) + \frac{\Psi_{20}^{(3)}(0)}{s^4 - k_{20}^4} \text{ avec } k_{20}^4 = \frac{\rho_{20} \omega_2^2}{EI_{20}}, \quad (\text{B.11})$$

où  $\bar{\Psi}_{20}(s)$  représente la transformée de Laplace de  $\Psi_{20}(z)$ .

La transformée inverse de (B.11) donne la solution générale de (B.7) :

$$\begin{aligned} \Psi_{20}(z) = & \frac{\beta_2}{2} [\cos(k_{20} z) + \cosh(k_{20} z)] - \frac{\Psi''_{20}(0)}{2k_{20}^2} [\cos(k_{20} z) - \cosh(k_{20} z)] \\ & - \frac{\Psi_{20}^{(3)}(0)}{2k_{20}^3} [\sin(k_{20} z) - \sinh(k_{20} z)]. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Les constantes  $\Psi''_{20}(0)$  et  $\Psi_{20}^{(3)}(0)$  sont calculées en utilisant (B.9) et finalement la solution de (B.7) s'exprime de la façon suivante :

$$\Psi_{20}(z) = B_{20}(z) \beta_2. \quad (\text{B.13})$$

Le changement de variable suivant  $z' = -z$  sur (B.8) donne :

$$\tilde{\Psi}_{21}(z') = \Psi_{21}(z). \quad (\text{B.14})$$

La transformée de Laplace de l'équation (B.8) donne donc :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{21}(s) = & \frac{s^3}{s^4 - k_{21}^4} \beta_2 + \frac{s}{s^4 - k_{21}^4} \tilde{\Psi}_{21}''(0) + \frac{\tilde{\Psi}_{21}^{(3)}(0)}{s^4 - k_{21}^4} + \frac{m_1 \omega_2^2 \tilde{\Psi}_{21}(l_0 - l_1)}{EI_{21}} \frac{e^{-(l_0 - l_1)s}}{s^4 - k_{21}^4}, \\ \text{avec } k_{21}^4 = & \frac{\rho_{21} \omega_2^2}{EI_{21}}. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

La solution générale de (B.8) a donc la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Psi_{21}(z) = & \frac{\beta_2}{2} [\cos(-k_{21} z) + \cosh(-k_{21} z)] - \frac{\Psi_{21}''(0)}{2k_{21}^2} [\cos(-k_{21} z) - \cosh(-k_{21} z)] \\ & - \frac{\Psi_{21}^{(3)}(0)}{2k_{21}^3} [\sin(-k_{21} z) - \sinh(-k_{21} z)] \\ & - \frac{m_1 \omega_2^2 \Psi_{21}(-l_0 + l_1)}{2EI_{21} k_{21}^3} U(-l_0 + l_1 - z) [\sin(k_1 [-l_0 + l_1 - z]) - \sinh(k_1 [-l_0 + l_1 - z])]. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Comme précédemment, Les constantes  $\Psi_{21}''(0)$  et  $\Psi_{21}^{(3)}(0)$  sont calculées en utilisant (B.10) et finalement la solution de (B.8) s'exprime de la façon suivante :

$$\Psi_{21}(z) = A_{21}(z) \Psi_{21}(-l_0 + l_1) + B_{21}(z) \beta_2. \quad (\text{B.17})$$

Pour déterminer l'expression de  $\beta_2$ , on utilise (B.7) et (B.8) dans (B.3) pour obtenir :

$$\begin{aligned}\beta_2 &= -\frac{1}{M} \left( \int_0^{l_2-l_0} \frac{EI_2}{\omega_2^2} \Psi_{20}^{(4)}(z) dz + \int_{-l_0}^0 \frac{EI_1}{\omega_2^2} \Psi_{21}^{(4)}(z) dz \right) \\ &= -\frac{EI_2}{M\omega_2^2} \left( \left[ \Psi_{20}^{(3)}(z) \right]_0^{l_2-l_0} - \left[ \Psi_{21}^{(3)}(z) \right]_{-l_0}^0 \right).\end{aligned}\tag{B.18}$$

D'où :

$$\beta_2 = \frac{-\frac{EI_{21}}{M\omega_2^2} A_{21}^{(3)}(0)}{1 - \frac{EI_{20}}{M\omega_2^2} B_{20}^{(3)}(0) + \frac{EI_{21}}{M\omega_2^2} B_{21}^{(3)}(0)} = \frac{C_2}{1+D_2} \Psi_{21}(-l_0+l_1).\tag{B.19}$$

Les déformées de chacun des ensembles ont donc la forme suivante :

$$\Psi_{20}(z) = B_{20}(z) \frac{C_2}{1+D_2} \Psi_{21}(-l_0+l_1),\tag{B.20}$$

$$\Psi_{21}(z) = \left( A_{21}(z) + B_{21}(z) \frac{C_2}{1+D_2} \right) \Psi_{21}(-l_0+l_1).\tag{B.21}$$



## Annexe C

# Réduction de l'ordre du modèle de comportement

La réduction du modèle continu présenté Chapitre 2.3 à son premier mode consiste à réduire, pour une position  $q$  du robot fixée, l'ordre des fonctions de transfert entre l'accélération de la masse  $M$  et l'effort d'entrée  $f$  et entre l'accélération de la masse  $m_4$  et l'effort d'entrée  $f$  en utilisant les techniques introduites par Moore [Moore, 1981]. Les fonctions de transfert obtenues ont alors la forme suivante :

$$\frac{\ddot{Y}_1(s)}{F(s)} = \frac{a_0 + a_2 s^2}{b_0 + b_2 s^2}, \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\ddot{Y}_2(s)}{F(s)} = \frac{c_0 + c_2 s^2}{b_0 + b_2 s^2}, \quad (\text{C.2})$$

où  $\ddot{Y}_1$  correspond à la transformée de Laplace de l'accélération du chariot  $M$ ,  $\ddot{Y}_2$  de l'accélération de la charge,  $F$  de l'effort d'entrée  $f$  et les paramètres des ces deux fonctions de transfert dépendent directement des paramètres du modèle continu.

Les fonctions de transfert entre les grandeurs analogues du modèle à paramètres localisés présenté Figure 2.22 s'écrivent :

$$\frac{\ddot{Y}_1(s)}{F(s)} = \frac{k_t(q) + (I_2(q) + L^2 m_2(q))s^2}{(m_1(q) + m_2(q)) \left( k_t(q) + \left( I_2(q) + L^2 \frac{m_1(q)m_2(q)}{m_1(q) + m_2(q)} \right) s^2 \right)}, \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{\ddot{Y}_2(s)}{F(s)} = \frac{k_t(q) + I_2(q)s^2}{(m_1(q) + m_2(q)) \left( k_t(q) + \left( I_2(q) + L^2 \frac{m_1(q)m_2(q)}{m_1(q) + m_2(q)} \right) s^2 \right)}. \quad (\text{C.4})$$

L'identification des paramètres de ce modèle se fait alors simplement à partir de la résolution du système (C.5) :

$$\begin{aligned}\frac{I_2(q) + L^2 m_2(q)}{k_t(q)} &= \frac{a_2}{a_0}, \\ \frac{I_2(q) + L^2 \frac{m_1(q)m_2(q)}{m_1(q) + m_2(q)}}{(m_1(q) + m_2(q))k_t(q)} &= \frac{b_2}{b_0}, \\ \frac{I_2(q)}{k_t(q)} &= \frac{c_2}{c_0}.\end{aligned}\tag{C.5}$$

---

# Annexe D

## Bancs d'essais

Les deux bancs d'essais sont deux robots cartésiens 3 axes développés par la société SEPRO Robotique qui sont généralement dédiés à la décharge de presse à injection plastique. Ils sont présentés Figure D.1, le tableau D.1 résume les caractéristiques principales des deux bancs d'essais.



(a) – Banc d'essai n°1



(b) – Banc d'essai n°2

Figure D.1 – Présentation des deux bancs d'essais.

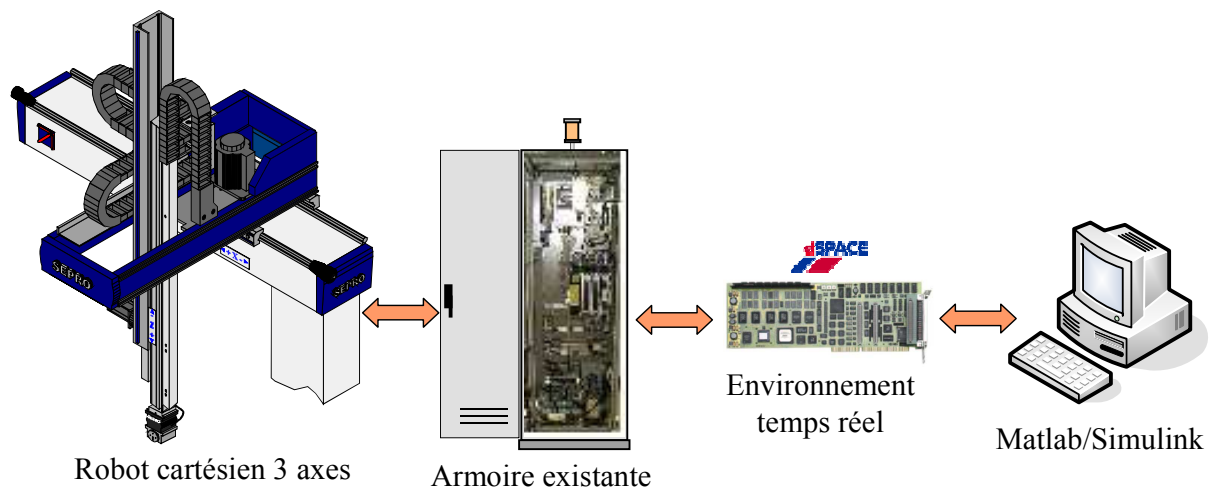
| Caractéristiques principales          | Bancs d'essais n°1 |       |       | Bancs d'essais n°2 |       |       |
|---------------------------------------|--------------------|-------|-------|--------------------|-------|-------|
|                                       | Axe X              | Axe Y | Axe Z | Axe X              | Axe Y | Axe Z |
| Course (mm)                           | 2000               | 590   | 1100  | 1750               | 800   | 1400  |
| Vitesse max. (m/s)                    | 4                  | 3,2   | 5     | 4                  | 3,2   | 4     |
| Accélération max. (m/s <sup>2</sup> ) | 6                  | 7,7   | 36    | 4                  | 5,5   | 19    |

Tableau D.1 – Caractéristiques principales des axes des deux bancs d'essais.

Les résultats expérimentaux présentés dans ce mémoire sont issus de différents systèmes de mesure :

- Information codeur pour les mesures au niveau du moteur,
- Capteur laser mesurant directement le comportement en position de la charge (distance maxi. de mesure : 50 mm, intervalle de mesure : 20 mm),
- accéléromètres (MMA7260 de Freescale<sup>inc.</sup> ou accéléromètre tri-axes de PCB piezotronics<sup>inc.</sup>) placés directement sur la charge.

La commande de ces deux bancs d'essais est réalisée sur un environnement temps réel dSPACE 1103 qui pilote en courant les variateurs connectés à chacun des moteurs (Figure D.2). Cette ouverture de commande a été nécessaire afin de tester différentes architectures de commande.



**Figure D.2 – Ouverture de la commande des deux bancs d'essais à l'aide d'un environnement temps réel dSPACE.**

## Annexe E

# Réalisation d'un observateur algébrique de fréquence

Dans cette partie, nous utilisons la méthode d'estimation algébrique décrite au chapitre 4.3.1.3 sur le modèle deux masses un ressort illustré Figure 2.24.

On suppose que l'excitation en entrée correspond à des échelons d'effort. Le comportement du système masse-ressort peut être assimilé, dans le domaine de Laplace, à l'équation suivante :

$$\frac{1}{\omega_n^2} s^4 (X_1(s) - s x_1(0) - \dot{x}_1(0)) + (X_1(s) - s x_1(0) - \dot{x}_1(0)) = \frac{U_0}{J s}. \quad (\text{E.1})$$

Nous dérivons l'équation plusieurs fois jusqu'à éliminer les conditions initiales :

$$\begin{aligned} & 2520 \left( \frac{d^2 X_1(s)}{ds^2} \right) + 4200s \left( \frac{d^3 X_1(s)}{ds^3} \right) + 2100s^2 \left( \frac{d^4 X_1(s)}{ds^4} \right) + 420s^3 \left( \frac{d^5 X_1(s)}{ds^5} \right) + \\ & 35s^4 \left( \frac{d^6 X_1(s)}{ds^6} \right) + s^5 \left( \frac{d^7 X_1(s)}{ds^7} \right) + 210 \left( \frac{d^4 X_1(s)}{ds^4} \right) \omega_n^2 + \\ & 126 \cdot s \cdot \left( \frac{d^5 X_1(s)}{ds^5} \right) \omega_n^2 + 21 \cdot s^2 \left( \frac{d^6 X_1(s)}{ds^6} \right) \omega_n^2 + s^3 \left( \frac{d^7 X_1(s)}{ds^7} \right) \omega_n^2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

On multiplie ensuite par  $s^{-5}$  et on résout pour  $\omega_n^2$ . Nous obtenons l'équation suivante :

$$\omega_n^2 = - \frac{2520 \frac{d^2 X_1(s)}{ds^2} + 4200s \frac{d^3 X_1(s)}{ds^3} + 2100s^2 \frac{d^4 X_1(s)}{ds^4} + 420s^3 \frac{d^5 X_1(s)}{ds^5} + 35s^4 \frac{d^6 X_1(s)}{ds^6} + s^5 \frac{d^7 X_1(s)}{ds^7}}{210 \frac{d^4 X_1(s)}{ds^4} + 126s \frac{d^5 X_1(s)}{ds^5} + 21s^2 \frac{d^6 X_1(s)}{ds^6} + s^3 \frac{d^7 X_1(s)}{ds^7}}. \quad (\text{E.3})$$

On revient en suite au domaine temporel pour obtenir l'expression du filtre de l'observateur algébrique de fréquence basé sur un modèle deux masses un ressort :

$$\omega_n^2(t) = \frac{2520 \int^{(5)} v^2 x_1(v) dv - 4200 \int^{(4)} v^3 x_1(v) dv + 2100 \int^{(3)} v^4 x_1(v) dv - 420 \int^{(2)} v^5 x_1(v) dv + 35 \int^{(1)} v^6 x_1(v) dv - t^7 x_1(t)}{- \left( 210 \int^{(5)} v^4 x_1(v) dv - 126 \int^{(4)} v^5 x_1(v) dv + 21 \int^{(3)} v^6 x_1(v) dv - \int^{(2)} v^7 x_1(v) dv \right)}. \quad (\text{E.4})$$