

Université des Sciences et Technologies de Lille

THESE

Spécialité
Génie Electrique

Présentée par:

Xiaodong SHI

En vue de l'obtention du grade de Docteur de l'Université des Sciences et
Technologies de Lille

**Contribution à la simulation du mouvement en 3D
avec la méthode des éléments finis, appliquée à la
modélisation des machines électriques**

Date de soutenance : le 13 décembre 2005

Devant le Jury composé de:

| | |
|-------------------------|---------------------------------|
| Mr. Jean-Louis COULOMB | Président |
| Mr. Frédéric BOUILLAULT | Rapporteur |
| Mr. Yvan LEFEVRE | Rapporteur |
| Mr. Jean-Pierre DUCREUX | Examinateur |
| Mr. Yvonnick LE MENACH | Examinateur |
| Mr. Francis PIRIOU | Examinateur, Directeur de Thèse |

Remerciements

Mes travaux, cofinancés par la société EDF et la région Nord-Pas de Calais, ont été effectués au Laboratoire d'Electrotechnique et d'Électronique de Puissance de Lille (L2EP) au sein de l'équipe "modélisation numérique des systèmes électromagnétiques". Je tiens à remercier Monsieur le Professeur Jean-Paul Hautier, Directeur du laboratoire, pour son accueil.

Je tiens tout particulièrement à remercier Monsieur le Professeur F. Piriou et Monsieur le Maître de Conférences Y. Le Menach, qui ont encadré ma thèse, pour la confiance qu'ils m'ont témoignée dès ma licence. Je leur suis très reconnaissant de l'aide qu'ils m'ont apportée tout au long de ce travail.

J'adresse également mes remerciements à:

Monsieur Jean-Louis Coulomb, Professeur à l'ENSIEG, pour l'honneur qu'il m'a fait de juger cette thèse en tant que président du jury.

Monsieur F. Bouillault, professeur des Universités à Paris XI (Orsay) et Monsieur Y. Lefevre, HDR Chargé de Recherche CNRS, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être rapporteurs de mes travaux et pour avoir alimenté le débat avec des remarques judicieuses.

Monsieur Jean-Pierre Ducreux, ingénieur de Recherche EDF de Clamart, pour avoir participé au jury de thèse et pour les nombreuses discussions qui ont permis l'avancement du travail.

Je tiens aussi à remercier:

Monsieur S. Clenet, professeur à l'ENSA, pour le soutien et les nombreuses idées qu'il m'a apportées durant ma thèse.

Enfin, je tiens à remercier l'ensemble des enseignants chercheurs et des thésards du L2EP ainsi que Madame M. C. Blonde pour son aide et son soutien.

Je n'oublie pas de remercier mon épouse LU Lu, mes parents et mes amis qui m'ont toujours soutenus et encouragés.

SOMMAIRE

SOMMAIRE

1

INTRODUCTION GENERALE

4

CHAPITRE I FORMULATION DES PROBLEMES DE MAGNETOSTATIQUE **6**

| | | |
|----------------|---|-----------|
| I.1 | EQUATIONS DE MAXWELL | 6 |
| <i>I.1.1</i> | MODÈLE MATHÉMATIQUE | 6 |
| <i>I.1.2</i> | CONDITIONS DE TRANSMISSION..... | 7 |
| I.2 | ESPACES FONCTIONNELS..... | 7 |
| <i>I.2.1</i> | ESPACES DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS | 7 |
| <i>I.2.2</i> | DIAGRAMME DE TONTI | 8 |
| I.3 | LES FORMULATIONS EN POTENTIELS..... | 10 |
| <i>I.3.1</i> | DOMAINE CONTINU | 10 |
| <i>I.3.1.1</i> | FORMULATION EN POTENTIEL SCALAIRE | 10 |
| <i>I.3.1.2</i> | FORMULATION EN POTENTIEL VECTEUR | 10 |
| <i>I.3.2</i> | DOMAINE DISCRET | 11 |
| <i>I.3.2.1</i> | ESPACES FONCTIONNELS DISCRETS..... | 11 |
| <i>I.3.2.2</i> | FORMULATION EN POTENTIEL SCALAIRE | 12 |
| <i>I.3.2.3</i> | FORMULATION EN POTENTIEL VECTEUR | 13 |
| <i>I.3.2.4</i> | DIAGRAMME DE TONTI DISCRET | 14 |
| I.4 | COUPLAGE CIRCUIT..... | 14 |
| <i>I.4.1</i> | DÉFINITION DES CHAMPS DE VECTEURS N ET K | 14 |
| <i>I.4.2</i> | EXPRESSION DU FLUX DE L'INDUCTION MAGNÉTIQUE..... | 15 |
| <i>I.4.3</i> | COUPLAGE DES ÉQUATIONS MAGNÉTIQUES ET ÉLECTRIQUES | 15 |
| <i>I.4.3.1</i> | CAS D'UN SEUL ENROULEMENT COUPÉ..... | 16 |
| <i>I.4.3.2</i> | GÉNÉRALISATION À PLUSIEURS ENROULEMENTS | 17 |

CHAPITRE II METHODES DE PRISE EN COMPTE DU MOUVEMENT **18**

| | | |
|-----------------|---|-----------|
| II.1 | CONTEXTE ET POSITIONNEMENT DU PROBLÈME..... | 18 |
| II.2 | PRÉSENTATION DES MÉTHODES ÉTUDIÉES | 19 |
| <i>II.2.1</i> | MÉTHODES BASÉES SUR UNE SURFACE DE GLISSEMENT | 20 |
| <i>II.2.1.1</i> | MÉTHODE DU PAS BLOQUÉ | 20 |
| <i>II.2.1.2</i> | MÉTHODES D'INTERPOLATION NODALE | 21 |
| | Méthode d'interpolation nodale au 1 ^{er} ordre | 22 |

| | |
|--|-----------|
| Méthode d'interpolation nodale du 2 ^{ème} ordre | 24 |
| Méthode d'interpolation de surface cas général | 25 |
| Cas d'une surface cylindrique | 29 |
| II.2.1.3 LA MÉTHODE MORTAR | 30 |
| II.2.2 MÉTHODES BASÉES SUR UN RECOLLEMENT VOLUMIQUE | 33 |
| II.2.2.1 BANDE DE MOUVEMENT | 33 |
| II.2.2.2 LA MÉTHODE "OVERLAPPING" | 34 |
| II.2.3 CONCLUSION | 38 |
| II.3 APPLICATION DES MÉTHODES..... | 38 |
| II.3.1 ETUDE DES GRANDEURS LOCALES | 38 |
| II.3.2 MODÉLISATION D'UNE MACHINE À AIMANTS PERMANENTS | 41 |
| II.3.2.1 MACHINE ÉTUDIÉE | 41 |
| II.3.2.2 PRÉSENTATION DES MAILLAGES | 43 |
| II.3.2.3 COMPARAISON DES RÉSULTATS | 45 |
| Flux dans les enroulements de la machine | 45 |
| Forces électromotrices aux bornes des enroulements de la machine | 47 |
| Couple de détente | 50 |
| Essai en court-circuit | 53 |
| II.3.3 COMPORTEMENT NUMÉRIQUE | 57 |
| II.4 CONCLUSION | 58 |

CHAPITRE III MODELISATION D'UN TURBOALTERNATEUR **60**

| | |
|--|-----------|
| III.1 MACHINE ÉTUDIÉE..... | 60 |
| III.1.1 DIMENSIONS ET CARACTÉRISTIQUES DU TURBOALTERNATEUR | 60 |
| III.1.2 DISTRIBUTION DU BOBINAGE | 60 |
| III.1.3 CARACTÉRISTIQUE DES MATÉRIAUX | 62 |
| III.2 MODÉLISATION DE L'ALTERNATEUR SANS EFFETS D'EXTRÉMITÉS..... | 62 |
| III.2.1 PRÉSENTATION DE LA GÉOMÉTRIE ET DES MAILLAGES | 62 |
| III.2.2 CONDITIONS DE CALCULS | 65 |
| III.2.2.1 SIMULATION DE L'ESSAI À VIDE | 65 |
| III.2.2.2 PRISE EN COMPTE DU MOUVEMENT | 65 |
| III.2.3 SIMULATION AVEC COURANTS IMPOSÉS | 65 |
| III.2.4 SIMULATION AVEC LE COUPLAGE CIRCUIT | 67 |
| III.3 RÉSULTATS DE LA MODÉLISATION | 70 |
| III.3.1 COMPARAISON DU FLUX ET DE LA F.E.M | 70 |
| III.3.2 CARACTÉRISTIQUE À VIDE | 72 |
| III.3.3 POINTS DE FONCTIONNEMENT EN CHARGE | 73 |
| III.3.4 FONCTIONNEMENT EN COUPLAGE CIRCUIT | 76 |
| III.3.5 CONCLUSION | 77 |
| III.4 MODÉLISATION DU TURBOALTERNATEUR AVEC LES TÊTES DE BOBINES..... | 79 |
| III.4.1 PRÉSENTATION DES MAILLAGES | 79 |
| III.4.2 PRISE EN COMPTE DU MOUVEMENT AVEC LES TÊTES DE BOBINES | 80 |
| III.4.3 CONDITIONS DE SIMULATIONS | 82 |
| III.4.4 RÉSULTATS DE LA SIMULATION | 83 |
| III.4.4.1 ESSAI À VIDE | 83 |
| III.4.4.2 RÉSULTATS EN COURANTS IMPOSÉS | 85 |
| III.4.5 CONCLUSION | 86 |

CONCLUSION GENERALE **88**

| | |
|--|-------------------|
| <u>ANNEXES</u> | <u>90</u> |
| <u>ANNEXE I: MÉTHODE MORTAR CALCUL DES MATRICES</u> | <u>90</u> |
| A-I-1 CAS 2D, INTÉGRATION SUR UNE LIGNE..... | 90 |
| A-I-2 CAS 3D, INTÉGRATION SUR UNE SURFACE | 93 |
| A-I-3 PROPRIÉTÉS DE LA MATRICE $[M]=[C]^{-1}[D]$ | 99 |
| <u>ANNEXE II: TECHNIQUE D'INTÉGRATION POUR LA MÉTHODE "OVERLAPPING"</u> | <u>101</u> |
| <u>ANNEXE III: COUPLAGE CIRCUIT, CHARGE CAPACITIVE</u> | <u>104</u> |
| <u>ANNEXE IV: RÉSULTATS DE L'ESSAI EN CHARGE COUPLÉ CIRCUIT</u> | <u>106</u> |
| <u>REFERENCES</u> | <u>107</u> |

INTRODUCTION GENERALE

Depuis une trentaine d'années, dans le domaine de l'électrotechnique, de nombreux travaux ont contribué à la mise au point de la méthode des éléments finis. Aujourd'hui, cette méthode est couramment utilisée pour la modélisation des systèmes électromagnétiques. Elle permet la résolution des équations de Maxwell en tenant compte de la géométrie réelle des structures et des propriétés des matériaux. Dans le domaine de l'électrotechnique, elle permet de simuler, avec précision, des dispositifs en 2D ou en 3D.

Cependant, un certain nombre de problèmes subsistent. Pour obtenir des résultats particulièrement fiables, on utilise généralement un maillage extrêmement fin qui peut conduire en 3D ou bien dans le cas de problèmes évolutifs, à des temps de calcul extrêmement longs. En outre, la prise en compte du mouvement n'est pas complètement résolue ce qui peut limiter l'utilisation de cette méthode en 3D.

Pour la simulation du mouvement, une des premières propositions a été l'utilisation d'un "macro-élément" pour simuler en 2D l'entrefer d'une machine[1, 5, 3]. Par la suite, l'utilisation d'une bande de mouvement a été proposée [6, 17] puis, améliorée [25]. On peut également citer l'approche que l'on appellera la méthode du pas bloqué [12], les méthodes d'interpolation [24] et les méthodes hybrides permettant le couplage de la méthode des éléments finis avec les méthodes intégrales. Ces dernières ont été utilisées pour simuler l'entrefer de machines [8] et le mouvement [9]. Les opérateurs de Lagrange ont également été sollicités [16, 33] et plus récemment la méthode "Overlapping" [22] et la méthode des éléments avec joints [45] ont été proposées. Ce tour d'horizon, certainement non exhaustif, donne un aperçu des principaux travaux menés sur ce sujet au cours des vingt cinq dernières années. Il montre également l'intérêt suscité par ce sujet. Enfin, à notre connaissance, parmi les méthodes proposées à ce jour aucune ne s'est réellement imposée.

En 3D, à la difficulté de la prise en compte du mouvement vient s'ajouter l'utilisation des diverses formulations envisageables associées aux éléments de Whitney. De plus, la contrainte liée aux temps de calcul devient cruciale.

C'est dans ce contexte que se situent les travaux présentés dans ce mémoire. L'objectif était de modéliser en 3D un turboalternateur avec les têtes de bobines et en tenant compte du mouvement. L'étude devant être faite en régime permanent nous avons utilisé une formulation en magnétostatique. Au L2EP, nous disposons d'un code de calcul éléments finis 3D couplé

circuit (CARMEL) avec, pour la simulation du mouvement, la méthode du pas bloqué. Bien que précise, cette méthode est pénalisée car elle impose certaines contraintes sur le maillage qui peuvent la rendre inutilisable du point de vue des temps de calcul. Dans le cadre de nos travaux de thèse nous avons donc entrepris de développer les méthodes les plus couramment utilisées ou celles qui nous ont semblé les plus performantes. Afin de les tester nous avons étudié leurs performances sur des grandeurs très sensibles aux erreurs numériques: la force électromotrice et le couple électromagnétique.

Le premier chapitre de ce mémoire a pour objet la formulation en 3D des problèmes de magnétostatique. Un rappel des formulations en potentiel scalaire et vecteur est effectué. La technique de prise en compte des termes sources est également développée ainsi que le couplage avec les équations de circuit électrique.

Dans le deuxième chapitre, nous abordons les méthodes de prise en compte du mouvement. Sept approches sont étudiées et classées en deux familles. Pour chacune d'elle, nous développons en détail le principe et sa mise en œuvre. Parmi ces méthodes nous proposons une extension de la méthode d'interpolation au 2^{ème} ordre ainsi qu'une méthode d'interpolation de surface. Afin de tester les différentes techniques de prise en compte du mouvement deux exemples sont traités dont une machine synchrone à aimants permanents. Pour terminer, une analyse du comportement numérique des approches étudiées est proposée.

Au chapitre trois, nous abordons la modélisation d'un turboalternateur. Une première étude consiste à utiliser un maillage 2D extrudé. Dans ce cas on doit résoudre en 3D un problème dont la solution est 2D. Comme au chapitre précédent, toutes les méthodes de simulation du mouvement sont testées sur cet exemple en étudiant le fonctionnement à vide et en charge de la machine. Nous abordons ensuite la modélisation du turboalternateur en tenant compte des têtes de bobines. Pour effectuer cette étude, nous utilisons pour la simulation du mouvement une approche hybride à savoir l'interpolation du 2^{ème} ordre dans la partie active de la machine et l'interpolation de surface au niveau des têtes de bobines.

CHAPITRE I FORMULATION DES PROBLEMES DE MAGNETOSTATIQUE

I.1 Equations de Maxwell

I.1.1 Modèle mathématique

La modélisation en magnétostatique s'appuie sur les équations de Maxwell qui constituent le modèle de base. Dans un domaine, que l'on notera D , composé d'air, de termes sources de densité de courant \mathbf{J}_0 , et de matériaux magnétiques, l'objectif est de rechercher les champs de vecteurs \mathbf{H} et \mathbf{B} qui représentent respectivement le champ magnétique et l'induction magnétique. Il est à noter que dans toute notre étude, le domaine D sera considéré simplement connexe. Dans ces conditions, les équations auxquelles on associe les conditions aux limites s'écrivent [7]:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 \quad (\text{I-1})$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{I-2})$$

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_h} = 0 \quad (\text{I-3})$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_b} = 0 \quad (\text{I-4})$$

où \mathbf{n} est un vecteur unitaire qui correspond à la normale sortante à la frontière Γ . Γ_h et Γ_b appartiennent à Γ avec : $\Gamma_b \cap \Gamma_h = \emptyset$ et $\Gamma_b \cup \Gamma_h = \Gamma$

Pour les grandeurs magnétiques, si on néglige le phénomène d'hystérésis, il est possible d'exprimer \mathbf{B} par une fonction univoque de la forme: $\mathbf{B} = \mu(|\mathbf{H}|) \mathbf{H}$ avec la perméabilité μ qui est une fonction du module de \mathbf{H} . Dans le cas des aimants permanents, on ne considère que la partie utile du cycle d'hystérésis qui peut être modélisée par la relation : $\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{B}_r$. Dans cette expression \mathbf{B}_r représente l'induction magnétique rémanente des aimants permanents.

On résout rarement directement un système mathématique constitué par les équations de Maxwell et les lois de comportement. En fait, on introduit bien souvent des potentiels qui

assurent, naturellement, la vérification de l'une ou l'autre des équations avec les conditions limites sur la frontière.

I.1.2 Conditions de transmission

A l'interface entre deux milieux 1 et 2 les équations de Maxwell impliquent des relations de continuité entre les champs. Ces relations, issues des équations (I-1) et (I-2), s'expriment de la manière suivante :

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{I-5})$$

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \wedge \mathbf{n} = 0 \quad (\text{I-6})$$

Dans le cas où la densité surfacique de courant est nulle, la deuxième équation montre que la composante tangentielle du champ \mathbf{H} est continue au passage entre deux milieux différents.

A titre d'illustration, nous avons représenté, sur la figure I-1 la transmission de l'induction magnétique à l'interface entre deux milieux qui traduit la relation (I-5) et sur la figure I-2, la transmission du champ magnétique (relation (I-6)).

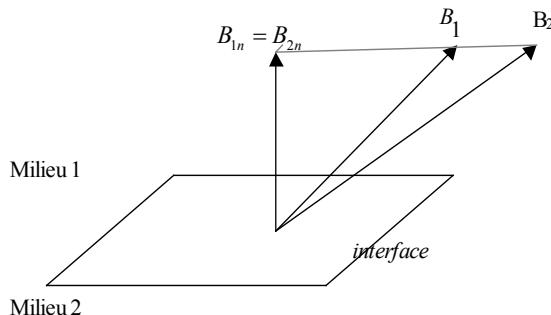


Figure I-1: Conservation de \mathbf{B}_n

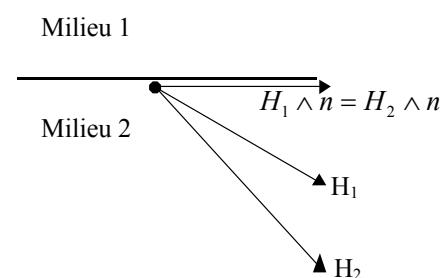


Figure I-2: Conservation de \mathbf{H}_t

La problématique, de la prise en compte du mouvement, est de conserver les relations de continuité de ces grandeurs locales au niveau d'une surface entre la partie mobile et la partie fixe. Ces propriétés seront donc utilisées, pour la mise en œuvre des modèles et pour en tester la qualité lors de la simulation du mouvement.

I.2 Espaces fonctionnels

En électromagnétisme, nous utilisons principalement les opérateurs différentiels (**grad**, **rot**, **div**) qui sont le gradient d'une fonction scalaire, le rotationnel et la divergence d'un vecteur. Nous allons dans la suite, présenter les espaces fonctionnels dans lesquels les équations de Maxwell doivent être résolues.

I.2.1 Espaces des opérateurs différentiels

Les domaines de définition de ces opérateurs sont des sous espaces fonctionnels de L^2 et L^2 qui représentent, respectivement, l'espace des champs scalaires de carré sommable et l'espace des champs de vecteurs dont le carré de la norme est sommable. Ces différents sous espaces sont définis par:

$$E^0 = \left\{ f \in L^2 ; \mathbf{grad}f \in \mathbf{L}^2 \right\} \quad (I-7)$$

$$\mathbf{E}^1 = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2 ; \mathbf{rot}\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2 \right\} \quad (I-8)$$

$$\mathbf{E}^2 = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2 ; \operatorname{div}\mathbf{v} \in L^2 \right\} \quad (I-9)$$

Pour la prise en compte des conditions aux limites sur Γ_h et Γ_b , on définit deux ensembles de sous espaces E_h et E_b qui sont des restrictions de E^0, E^1 et E^2 . On a alors:

$$E_h^0 = \left\{ f \in E^0 ; f = 0 \Big|_{\Gamma_h} \right\} \quad (I-10)$$

$$\mathbf{E}_h^1 = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{E}^1 ; \mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0 \Big|_{\Gamma_h} \right\} \quad (I-11)$$

$$\mathbf{E}_h^2 = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{E}^2 ; \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \Big|_{\Gamma_h} \right\} \quad (I-12)$$

$$E_b^0 = \left\{ f \in E^0 ; f = 0 \Big|_{\Gamma_b} \right\} \quad (I-13)$$

$$\mathbf{E}_b^1 = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{E}^1 ; \mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0 \Big|_{\Gamma_b} \right\} \quad (I-14)$$

$$\mathbf{E}_b^2 = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{E}^2 ; \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \Big|_{\Gamma_b} \right\} \quad (I-15)$$

De plus, on introduit deux sous espaces E_h^3 et E_b^3 qui sont les images de E_h^2 et E_b^2 définis par l'opérateur divergence.

I.2.2 Diagramme de Tonti

Nous allons développer maintenant la notion d'opérateurs adjoints qui va permettre d'établir un lien entre les espaces E_h^i et E_b^i .

A partir des propriétés des opérateurs vectoriels (**grad**, **rot**, **div**), on peut écrire les deux relations suivantes :

$$\int_D \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}f \, d\tau = - \int_D f \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\tau + \int_{\Gamma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) f \, d\gamma \quad (I-16)$$

$$\int_D \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot}\mathbf{v} \, d\tau = \int_D \mathbf{v} \cdot \mathbf{rot}\mathbf{u} \, d\tau + \int_{\Gamma} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\gamma \quad (I-17)$$

où Γ est la frontière du domaine D et " \mathbf{n} " la normale sortante. Compte tenu des conditions aux limites dans les espaces E_h^i et E_b^i , les termes $\int_{\Gamma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) f \, d\gamma$ et $\int_{\Gamma} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\gamma$ s'annulent et, nous avons donc les relations suivantes :

$$\int_D \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}f \, d\tau = - \int_D f \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\tau \quad f \in E_h^0 \text{ et } \mathbf{u} \in \mathbf{E}_b^2 \quad (I-18)$$

$$\int_D \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} \, d\tau = \int_D \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u} \, d\tau \quad \mathbf{u} \in \mathbf{E}_h^1 \text{ et } \mathbf{v} \in \mathbf{E}_b^1 \quad (\text{I-19})$$

L'opérateur adjoint du gradient est donc l'opposé de la divergence et l'opérateur adjoint du rotationnel est lui-même.

L'ensemble des résultats présentés ci-dessus permet de déboucher sur le diagramme de Tonti [20, 29] que nous avons représenté sur la figure I-3.

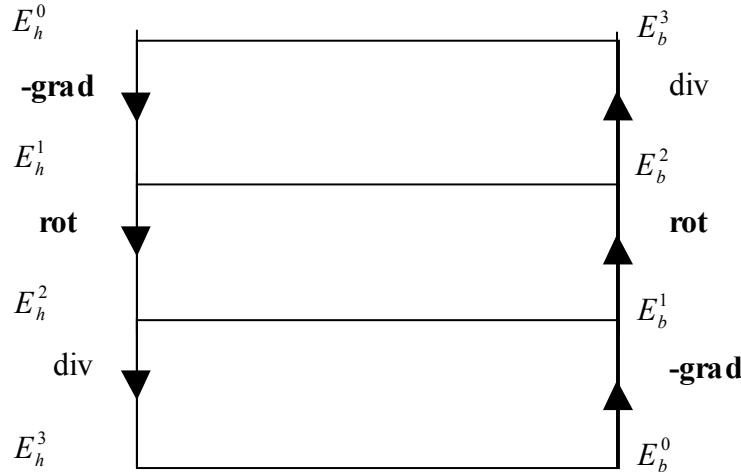


Figure I-3 Diagramme de Tonti représentant les structures duales

Dans le cas de problèmes de magnétostatique, la répartition spatiale de la densité de courant est supposée connue. Selon les relations (I-7) (I-8) et les conditions aux limites sur les frontières Γ_h et Γ_b (I-3) et (I-4), le champ magnétique \mathbf{H} appartient à l'espace E_h^1 et l'induction magnétique \mathbf{B} à l'espace E_b^2 . Dans ces conditions, le diagramme de Tonti, dans le cas d'une formulation en magnétostatique est représenté sur la figure I-4. Sur cette figure, nous avons positionné les champs \mathbf{H} , \mathbf{B} et \mathbf{J}_0 ainsi que la loi de comportement notée " μ " qui relie \mathbf{B} et \mathbf{H} .

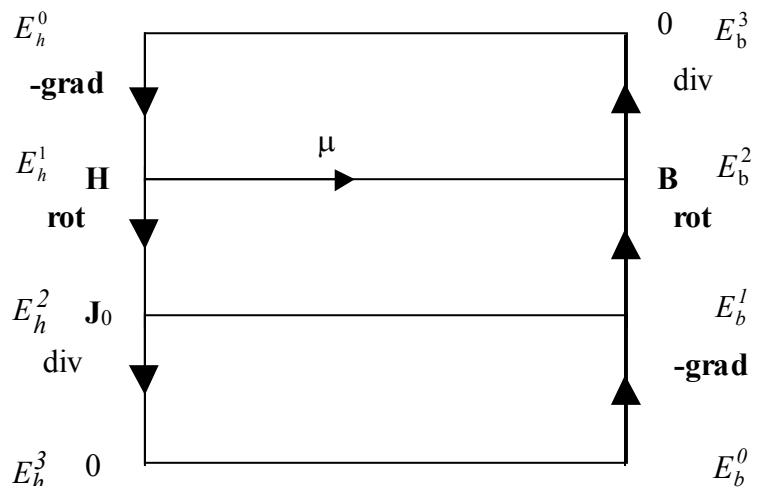


Figure I-4 Diagramme de Tonti appliqué à la magnétostatique

I.3 Les formulations en potentiels

I.3.1 Domaine continu

Comme nous l'avons vu précédemment, le système d'équations à résoudre a pour expression :

$$\text{Rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}_0 \quad (\text{I-20})$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0 \quad (\text{I-21})$$

avec la loi de comportement qui relie le champ \mathbf{H} à l'induction magnétique \mathbf{B} .

L'utilisation des formulations en potentiel permet de vérifier implicitement l'une des deux équations à résoudre. Dans le cas de la magnétostatique, pour vérifier l'équation (I-20), on introduit un terme source et un potentiel scalaire [13]. Pour vérifier implicitement l'équation (I-21) on a recours à un potentiel vecteur.

I.3.1.1 Formulation en potentiel scalaire

Pour prendre en compte les inducteurs, où la densité de courant \mathbf{J}_0 est connue ou bien supposée connue, on peut introduire un champ magnétique source \mathbf{H}_s [23, 39] tel que son rotationnel soit égal à \mathbf{J}_0 . Le champ source \mathbf{H}_s est tel qu'il appartient à l'espace fonctionnel E^l . De plus, compte tenu que le rotationnel est défini à un gradient près, on introduit également un potentiel scalaire Ω qui appartient à l'espace E_h^0 selon (I-10). Dans ces conditions le champ magnétique \mathbf{H} s'écrit:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s - \mathbf{grad}\Omega \quad (\text{I-22})$$

avec la condition aux limites $\mathbf{H}_s \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma_h} = 0$ et $\Omega|_{\Gamma_h} = \text{Cte}$. Pour déterminer le champ source, il est nécessaire d'imposer une condition de jauge puisqu'il n'est défini que par son rotationnel et ses conditions aux limites [7].

On peut donc définir la formulation en potentiel scalaire magnétique qui s'écrit, en regroupant I-21, I-22 et la loi de comportement des matériaux, sous la forme suivante:

$$\text{div}(\mu(\mathbf{H}_s - \mathbf{grad}\Omega)) = 0 \quad (\text{I-23})$$

A l'interface entre deux milieux de perméabilité différente, la définition d'un potentiel scalaire continu et dérivable assure la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique.

I.3.1.2 Formulation en potentiel vecteur

D'après la relation I-21 on note que l'induction magnétique \mathbf{B} est un champ de vecteur à divergence nulle. On peut donc introduire un potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} , qui appartient l'espace E_b^l selon (I-14), tel que :

$$\text{Rot}\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (\text{I-24})$$

Cette relation permet de montrer que la continuité et la dérivabilité de la composante tangentielle de \mathbf{A} assurent la continuité de la composante normale de \mathbf{B} à l'interface entre deux milieux. En combinant les équations I-20, I-24 et la loi de comportement $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, on obtient la formulation en potentiel vecteur magnétique soit la relation:

$$\text{Rot}\left(\frac{1}{\mu} \text{Rot}\mathbf{A}\right) = \mathbf{J}_0 \quad (\text{I-25})$$

Il est à noter, la nécessité d'ajouter à cette équation une condition de jauge pour assurer l'unicité de \mathbf{A} . On a recours généralement à la jauge de Coulomb $\text{div}\mathbf{A} = 0$ [7] ou à une condition de la forme $\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = 0$. Avec \mathbf{w} , un champ vecteur dont les lignes de champs ne se referment pas et sont telles qu'elles relient tous les points du domaine [15].

I.3.2 Domaine discret

Afin de résoudre les équations (I-23) et (I-25), on a recours à la méthode des résidus pondérés [18, 2] et on utilise une méthode numérique tel que la méthode des éléments finis pour discréteriser le problème.

Avec la méthode des éléments finis en 3D, le domaine d'étude est découpé en un nombre finis d'éléments qui peuvent être des tétraèdres, des prismes ou des hexaèdres. Ces éléments sont composés, dans notre cas, de nœuds, d'arêtes et de facettes, sur lesquelles on discréte les grandeurs à l'aide de fonctions d'interpolation. Dans la suite, on notera: N_n le nombre de nœuds du maillage, N_a le nombre d'arêtes, N_f le nombre de facettes et N_v le nombre de volume.

I.3.2.1 Espaces fonctionnels discrets

Dans le domaine discret on associe, à chaque entité géométrique, des fonctions de forme. On introduit alors, les fonctions nodales, d'arêtes, de facettes et de volume, notées respectivement w_n , w_a , w_f , et w_v . Ces fonctions de formes engendrent des espaces fonctionnels discrets que l'on note W^0 , W^1 , W^2 et W^3 . Elles ont certaines propriétés [20] dont les principales sont résumées dans le tableau I-1.

| Fonctions | Propriétés | Continuité | Espace engendré |
|-----------|---|----------------|-----------------|
| w_n | $w_{ni}(x_j) = \delta_{ij}$ | continue | W^0 |
| w_a | $\int_a \mathbf{w}_b \cdot \mathbf{dl} = \delta_{ab}$ | $w_a \wedge n$ | W^1 |
| w_f | $\int_f \mathbf{w}_g \cdot \mathbf{ds} = \delta_{fg}$ | $w_f \cdot n$ | W^2 |
| w_v | $\int_v w_e d\tau = \delta_{ve}$ | discontinu | W^3 |

Tableau I-1: Principales propriétés des fonctions de formes [47]

A partir des propriétés des fonctions de forme, on peut montrer que les grandeurs physiques, définies par les équations de Maxwell, peuvent être décomposées naturellement

dans le domaine discret. A titre d'exemple, le potentiel scalaire magnétique Ω sera décomposé dans l'espace des éléments nodaux W^0 et la densité de courant \mathbf{J}_0 dans l'espace des éléments de facette W^2 . Comme dans le domaine continu, on définit des sous espaces W_k^i avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $k \in \{h, b\}$.

I.3.2.2 Formulation en potentiel scalaire

Comme indiqué précédemment, le potentiel scalaire Ω est décomposé dans l'espace des éléments nodaux. A partir des fonctions d'approximation nodale, sa forme discrète Ω_d peut s'écrire de la façon suivante:

$$\Omega_d = \sum_{k \in N_n} w_{n_k} \Omega_{n_k} \quad (I-26)$$

où Ω_n est la valeur du potentiel scalaire magnétique au nœud n .

Le champ source \mathbf{H}_s , compte tenu de ses propriétés, est décomposé dans l'espace des éléments d'arêtes. Comme il n'est défini que par son rotationnel et des conditions aux limites, il existe une infinité de solutions. Pour le déterminer plusieurs solutions ont été proposées. Certains auteurs utilisent la Loi de Biot et Savart [10], ou encore un solution analytique [23]. Une méthode de minimisation peut également être utilisée pour déterminer un champ source [35].

Une autre approche consiste à construire sur tout le domaine, un arbre d'arêtes et à imposer que la circulation de \mathbf{H}_s sur ces arêtes est égale à zéro, tel que $\mathbf{H}_{sd} \cdot \mathbf{w} = 0$. Ensuite, à l'aide d'une méthode itérative, en vérifiant facette par facette l'équation (I-20), nous pouvons déterminer un champ source directement exprimé dans l'espace des éléments d'arêtes [39, 26, 43]. Toutefois, dans ce cas, il faut préalablement avoir discréteisé la densité de courant dans l'espace des éléments de facettes.

Ainsi discréteisé, le champ source s'écrit sous la forme suivante:

$$\mathbf{H}_{sd} = \sum_{k \in N_a} w_{a_k} \mathbf{H}_{sa_k} \quad (I-27)$$

dans cette expression, H_{sa_k} représente la circulation du champ source sur l'arête "k" du maillage. En appliquant la méthode des résidus pondérés [2], à l'équation (I-23), la forme intégrale de la formulation en potentiel scalaire magnétique s'écrit :

$$\int_D \psi [\operatorname{div} \mu (\mathbf{H}_{sd} - \mathbf{grad} \Omega_d)] d\tau = 0 \quad (I-28)$$

où ψ représente une fonction test. La méthode de Galerkin consiste à prendre la fonction test ψ égale aux fonctions d'interpolation nodale w_n . En effectuant une intégration par parties, on obtient alors la forme faible de l'expression :

$$\begin{aligned} & \int_D \mu (\mathbf{grad} w_n \cdot \mathbf{grad} \Omega_d) d\tau - \int_{\Gamma} w_n \mu (\mathbf{H}_{sd} - \mathbf{grad} \Omega_d) \cdot \mathbf{n}_s d\gamma \\ &= \int_D \mu \mathbf{grad} w_n \cdot \mathbf{H}_{sd} d\tau \quad \forall n \in N_n \end{aligned} \quad (I-29)$$

dans cette expression, \mathbf{n}_s représente la normale sortante à la surface extérieure du domaine.

Compte tenu des conditions aux limites du problème, l'intégrale de surface sur Γ disparaît. En remplaçant, dans cette expression, Ω_d et \mathbf{H}_{sd} par leur forme discrète respective on obtient un système d'équations que l'on peut mettre sous la forme matricielle suivante:

$$[\mathbf{S}][\Omega_n] = [\mathbf{F}] \quad (\text{I-30})$$

On rappelle que pour le calcul du champ source qui doit respecter l'équation (I-20) on utilise une méthode itérative en utilisant la notion d'arbre de facettes [39].

I.3.2.3 Formulation en potentiel vecteur

Compte tenu des propriétés du potentiel vecteur, sa discréétisation s'effectue en utilisant les éléments d'arêtes. Considérons la circulation de \mathbf{A} sur une arête "a" tel que:

$$\mathbf{A}_a = \int_a \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{I-31})$$

Dans ces conditions, le potentiel vecteur discréétisé \mathbf{A}_d peut être exprimé par la relation:

$$\mathbf{A}_d = \sum_{k=1}^{N_a} w_{a_k} \mathbf{A}_{a_k} \quad (\text{I-32})$$

avec w_{a_k} qui représente la fonction d'interpolation associée à l'arête k.

La forme intégrale de la formulation à résoudre s'écrit:

$$\int_D \psi \cdot \left[\mathbf{Rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{Rot} \mathbf{A}_d \right) - \mathbf{J}_{0d} \right] d\tau = 0 \quad (\text{I-33})$$

où ψ est une fonction test vectoriel et \mathbf{J}_{0d} la densité de courant qui est discréétisée dans l'espace des éléments de facettes [39]. La méthode Galerkin conduit à prendre ψ égale aux fonctions d'arêtes w_a . En effectuant une intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_D \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{Rot} w_a \cdot \mathbf{Rot} \mathbf{A}_d \right) d\tau - \int_{\Gamma} \frac{1}{\mu} w_a (\mathbf{Rot} \mathbf{A}_d \wedge \mathbf{n}_s) dy \\ &= \int_D w_a \cdot \mathbf{J}_{0d} d\tau \quad \forall a \in N_a \end{aligned} \quad (\text{I-34})$$

En tenant compte des conditions aux limites sur Γ_h et Γ_b , le terme relatif à l'intégrale de surface Γ disparaît.

Comme pour la formulation en potentiel scalaire en remplaçant \mathbf{A}_d et \mathbf{J}_{0d} par leur forme discréétisée on obtient un système d'équations que l'on peut mettre sous la forme suivante:

$$[\mathbf{S'}][\mathbf{A}_a] = [\mathbf{F}'] \quad (\text{I-35})$$

On notera que si la densité est discréétisée dans l'espace des éléments de facettes et qu'elle vérifie la relation $\text{div} \mathbf{J}_0 = 0$, ce qui est le cas dans notre modèle, toutes méthodes de

résolution, basées sur la méthode de gradient conjugué jauge automatiquement la formulation en potentiel vecteur magnétique [32].

I.3.2.4 Diagramme de Tonti discret

Comme dans le domaine continu, il est possible de construire le diagramme de Tonti discret. Sur la base du diagramme de la figure I-4, nous avons donc placé les différents espaces W_k^i ainsi que les grandeurs physiques discrétisées. On trouvera, sur la figure I-5 le diagramme obtenu.

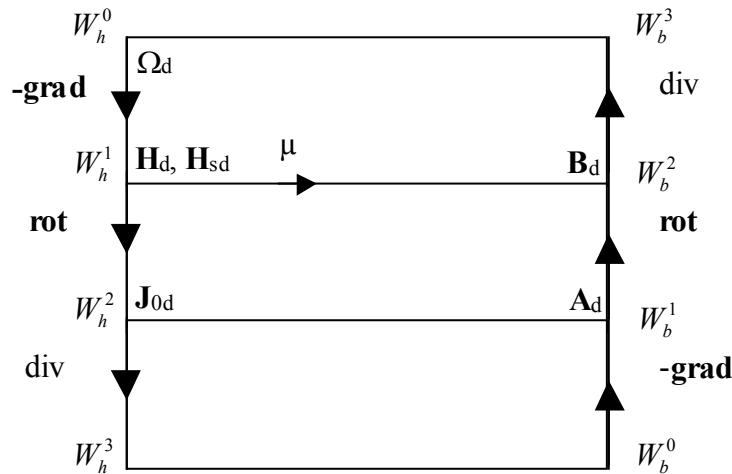


Figure I-5 Diagramme de Tonti discret appliqué à la magnétostatique

I.4 Couplage circuit

Nous n'allons pas, dans ce paragraphe, traiter le couplage entre les équations magnétiques et les équations du circuit électrique. En effet, ce sujet a déjà fait l'objet d'un grand nombre de travaux depuis de nombreuses années [6, 14, 17, 27, 33, 34, 39, 47, 48]. Dans cette partie, nous développerons uniquement les points importants qui serviront principalement dans le chapitre III pour la modélisation d'un turboalternateur.

I.4.1 Définition des champs de vecteurs N et K

Dans les développements relatifs à la formulation en potentiel scalaire nous avons introduit le champ source \mathbf{H}_s défini de telle sorte que son rotationnel soit égal à la densité de courant \mathbf{J}_0 . Cette dernière, peut s'exprimer en fonction d'un champ de vecteurs \mathbf{N} et de l'intensité du courant "i" dans l'enroulement sous la forme:

$$\mathbf{J}_0 = \mathbf{N} i \quad (\text{I-36})$$

avec \mathbf{N} défini par:

$$\mathbf{N} = \frac{n_s}{S_{\text{bob}}} \mathbf{u} \quad (\text{I-37})$$

dans cette expression n_s représente le nombre de spires de l'enroulement considéré, S_{bob} la section du bobinage et \mathbf{u} un vecteur unitaire définissant l'orientation du bobinage dans l'espace. Comme la densité de courant, le vecteur \mathbf{N} est à divergence nulle. On peut alors définir un champ de vecteur \mathbf{K} tel que:

$$\mathbf{N} = \mathbf{Rot} \mathbf{K} \quad (\text{I-38})$$

En multipliant l'expression I-38 par l'intensité du courant "i" on retrouve la définition du champ source avec:

$$\mathbf{H}_s = \mathbf{K} i \quad (\text{I-39})$$

Après avoir défini ces champs vecteurs nous allons les utiliser pour déterminer le flux de l'induction magnétique.

I.4.2 Expression du flux de l'induction magnétique

A partir de l'expression de l'énergie magnétique le flux propre dans un enroulement traversé par un courant "i" peut s'écrire, en fonction du potentiel vecteur, sous la forme:

$$\phi = \frac{1}{i} \int_D \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}_0 d\tau \quad (\text{I-40})$$

En regroupant les expressions I-36 et I-40, on obtient l'expression du flux dans un enroulement dans le cas de la formulation en potentiel vecteur à savoir:

$$\phi = \int_D \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} dt \quad (\text{I-41})$$

Le champ de vecteur \mathbf{N} , comme la densité de courant \mathbf{J}_0 , étant défini uniquement sur l'enroulement, le domaine d'intégration est automatiquement restreint à la bobine.

Si, dans l'expression (I-41), on introduit le champ de vecteur \mathbf{K} à l'aide de l'équation (I-38), en utilisant les propriétés des opérateurs vectoriels et, compte tenu des conditions aux limites, on obtient, pour l'expression du flux:

$$\phi = \int_D \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} dt \quad (\text{I-42})$$

C'est cette expression qui sera utilisée dans la formulation en potentiel scalaire.

Dans le code de calcul CARMEL, que nous allons utiliser pour nos développements, les champs de vecteurs \mathbf{N} et \mathbf{K} sont discrétisés respectivement dans l'espace des éléments de facettes et des éléments d'arêtes. La procédure utilisée pour les calculer a été développée dans la référence [39].

I.4.3 Couplage des équations magnétiques et électriques

Dans ce paragraphe, nous allons tout d'abord développé le couplage circuit [41] dans le cas d'un seul enroulement. Nous présenterons ensuite, la généralisation à un plus grand nombre d'enroulements. Ce modèle, sera utilisée dans le chapitre III pour la modélisation d'un turboalternateur.

I.4.3.1 Cas d'un seul enroulement couplé

Avec des conventions de type générateur et dans le cas où l'on a un seul enroulement, l'équation de circuit peut se mettre sous la forme:

$$-\frac{d\phi(t)}{dt} = v(t) + Ri(t) \quad (I-43)$$

dans cette expression $v(t)$ représente la différence de potentiel aux bornes de l'enroulement, R la résistance du bobinage et $\phi(t)$ le flux de l'induction magnétique.

Pour effectuer le couplage dans le cas de la formulation en potentiel scalaire, on élimine le champ source dans l'équation magnétique (I-23) et le flux de l'induction magnétique dans l'équation de circuit. On obtient alors, le système d'équations suivant:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mu(Ki_s - \operatorname{grad}\Omega)) &= 0 \\ -\frac{d}{dt} \left(\int_D \mathbf{K} \cdot \mathbf{B} d\tau \right) - Ri(t) &= v(t) \end{aligned} \quad (I-44)$$

En appliquant la méthode des éléments finis à l'équation magnétique on aboutit au système d'équations classiques qui peut prendre la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} S & -D \\ 0 & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_n \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D^t & G \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Omega_n \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \quad (I-45)$$

la matrice D dépend de la perméabilité magnétique, du vecteur \mathbf{K} discrétisé dans l'espace des éléments d'arêtes et du gradient des fonctions d'approximation nodales. Quant à la matrice G elle dépend de la perméabilité magnétique et du vecteur \mathbf{K} discrétisé. Pour résoudre ce système on utilise une méthode d'intégration numérique de type Euler implicite pour la discrétisation temporelle.

Dans le cas de la formulation en potentiel vecteur le couplage est obtenu en éliminant la densité de courant dans l'équation (I-25) et le flux de l'induction magnétique dans l'équation électrique on obtient le système suivant:

$$\begin{aligned} \operatorname{Rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{Rot} \mathbf{A} \right) &= Ni(t) \\ -\frac{d}{dt} \left(\int_D \mathbf{N} \cdot \mathbf{A} d\tau \right) - Ri(t) &= v(t) \end{aligned} \quad (I-46)$$

En appliquant la méthode des éléments finis, le système (I-46), prend la forme classique:

$$\begin{bmatrix} S' & D' \\ 0 & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_a \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D'^t & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} A_a \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \quad (I-47)$$

Compte tenu des expressions (I-46) on notera que la matrice D' dépend directement du vecteur \mathbf{N} qui sera discrétisé dans l'espace des éléments de facettes. Pour résoudre ce système d'équations on utilise, comme pour la formulation en potentiel scalaire, une méthode d'intégration numérique de type pas-à-pas dans le temps.

I.4.3.2 Généralisation à plusieurs enroulements

Nous allons développer, dans ce paragraphe, le cas plus général dans lequel plusieurs circuits peuvent être considérés. Il est à noter, que pour la formulation en potentiel vecteur cela ne pose aucune difficulté. En revanche pour la formulation en potentiel scalaire le système d'équations devient plus délicat à établir. En effet, comme nous l'avons vu dans les paragraphes précédents, le champ magnétique s'exprime en fonction du champ source et du gradient du potentiel scalaire.

Prenons le cas général où nous avons "p" enroulements avec un courant imposé (enroulements inducteurs) et "q" autres enroulements couplés avec des équations de circuit (enroulements induits). Dans ces conditions, il est fort probable que la circulation de \mathbf{H}_s sur une arête donnée soit une combinaison de plusieurs courants. Pour exprimer le champ magnétique \mathbf{H} nous utiliserons trois termes. Le premier sera relatif aux champs sources définis par "p" courants imposés, le second par "q" courants qui sont des inconnues du problème et le troisième terme est le gradient du potentiel scalaire. Le champ magnétique, aura donc pour expression:

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^p \mathbf{K}_k i_{0k} + \sum_{m=1}^q \mathbf{K}_m i_m - \mathbf{grad}\Omega \quad (I-48)$$

dans cette équation, i_{0k} représente le courant imposé dans le $k^{\text{ème}}$ inducteur.

L'expression du flux dans le $j^{\text{ème}}$ enroulement s'exprime alors, compte tenu de l'équation (I-42), sous la forme suivante:

$$\phi_j = \int_D \mu \mathbf{K}_j \cdot \left(\sum_{k=1}^p \mathbf{K}_k i_{0k} + \sum_{m=1}^q \mathbf{K}_m i_m - \mathbf{grad}\Omega \right) d\tau \quad (I-49)$$

L'expression de la $j^{\text{ème}}$ tension s'écrit, dans ces conditions:

$$-\frac{d}{dt} \left(\int_D \mu \mathbf{K}_j \cdot \left(\sum_{k=1}^p \mathbf{K}_k i_{0k} + \sum_{m=1}^q \mathbf{K}_m i_m - \mathbf{grad}\Omega \right) d\tau \right) - R_j i_j(t) = v_j(t) \quad (I-50)$$

Nous pouvons remarquer, dans cette expression, qu'il existe un produit croisé entre les champs sources.

CHAPITRE II METHODES DE PRISE EN COMPTE DU MOUVEMENT

II.1 Contexte et positionnement du problème

Pour simuler le mouvement d'un système électromagnétique, lorsqu'on effectue une modélisation avec la méthode des éléments finis, diverses stratégies ou techniques numériques peuvent être envisagées. Elles peuvent être classées de la façon suivante [33, 42, 45]:

- Introduction d'un terme de transport en $v \wedge B$ (où v représente la vitesse de déplacement des pièces mobiles) [19]. Cette solution peut être utilisée sous certaines conditions et impose des contraintes sur la structure matricielle du système à résoudre.
- Modification du maillage; remaillage local ou déformation du maillage dans une zone intégrant la frontière entre la partie fixe et la partie mobile. On peut citer: la méthode du pas bloqué [12, 34], la bande de mouvement [17, 21, 25, 32] et la méthode "Overlapping" [22].
- Couplage de la méthode des éléments finis, avec une autre méthode de résolution numérique. Dans ce cas, on définit un sous domaine intégrant la frontière entre la partie fixe et la partie mobile. Dans les parties fixe et mobile, à l'exception du sous domaine réservé au mouvement, les équations à résoudre sont discrétisées avec la méthode des éléments finis. Dans le sous domaine on peut utiliser le macro-élément qui consiste à rechercher une solution analytique dans une partie de l'entrefer [1, 3] ou bien, une méthode intégrale de frontière qui ramène la discrétisation spatiale sur la frontière du sous domaine permettant ainsi un couplage avec la méthode des éléments finis[1, 8].
- Recollement des maillages à l'interface entre la partie fixe et la partie mobile; dans ce cas nous sommes confrontés à deux maillages que nous appellerons "non-conforme" au niveau de la surface de glissement. Pour le recollement des deux maillages, on peut imposer la continuité de la grandeur inconnue à l'aide de méthodes d'interpolation [24, 31, 42] ou bien, en utilisant, la méthode des éléments joints (Mortar) [44, 45, 49] ou les opérateurs de Lagrange [16]. Pour les deux dernières méthodes le recollement des deux maillages est effectué en imposant la continuité d'une grandeur physique sur la surface de recollement.

Parmi les méthodes proposées ci-dessus, comme nous l'avons indiqué celle basée sur l'introduction d'un terme de transport a un domaine d'utilisation limité. Par ailleurs, l'utilisation du macro-élément augmente notablement les temps de calcul et comme la

méthodes intégrales de frontières conduit à ajouter, au niveau de la matrice de raideur, une matrice pleine qui relie tous les termes de la frontière. Cela entraîne alors un stockage plus important et des temps de calcul relativement lourd [33, 42].

Dans ces conditions, dans le cadre de cette étude nous avons retenu, outre la méthode du pas bloqué, la bande de mouvement, la méthode "Overlapping", les méthodes d'interpolation et la méthode des éléments joints récemment proposée [45] que nous appellerons méthode Mortar dans la suite de l'exposé.

Ce chapitre sera consacré au développement de ces méthodes de prise en compte du mouvement. Dans un premier temps nous ferons une présentation puis, un exemple académique sera traité afin d'évaluer le comportement des grandeurs locales. Enfin, nous modéliserons une machine à aimants permanents pour un mode de fonctionnement à vide et en court-circuit.

II.2 Présentation des méthodes étudiées

Comme indiqué précédemment, nous avons retenu la méthode du pas bloqué, la bande de mouvement, la méthode "Overlapping", la méthode d'interpolation et la méthode Mortar. Une analyse de ces différentes méthodes montre quelles peuvent être classées en deux rubriques.

En effet, le pas bloqué, la méthode d'interpolation et la méthode Mortar s'appuient sur un recollement de maillage en ayant défini au préalable, une surface de recollement. Dans le cas de la simulation du mouvement, nous regrouperons donc ces différentes techniques dans une rubrique intitulée "Méthodes basées sur une surface de glissement".

D'une autre manière, la bande de mouvement et la méthode "Overlapping", sont développées dans une zone de recouvrement volumique. Nous les avons donc regroupé dans la rubrique "Méthodes basées sur un recollement volumique".

Par ailleurs, pour les méthodes d'interpolation (à l'exception de la méthode d'interpolation de surface, qui sera présentée dans la suite), la méthode "Overlapping" et Mortar, la simulation du mouvement sera développée en utilisant dans la zone de recollement, un maillage de type "extrudé".

Dans la suite, le domaine complet du système étudié sera noté "D". Lors d'un déplacement, on introduira le domaine fixe noté D_f et le domaine mobile D_m (on a $D_f \cup D_m = D$). De plus, on notera Γ_{f-m} , l'interface entre la partie fixe et la partie mobile. On remarquera également, qu'aucun champ source \mathbf{H}_s , introduit au chapitre I, ne traversera la frontière Γ_{f-m} . Ce type de contrainte, peut être facilement imposée [43].

D'un point de vue descriptif des méthodes, les inconnues seront notées " I " dans le cas général avec, quand cela sera nécessaire à la compréhension du texte un exposant "f" pour indiquer son appartenance à la partie fixe et un exposant "m" pour la partie mobile.

Enfin, dans ce mémoire, nous traiterons comme applications, un exemple académique et des machines tournantes. Dans ces applications, les grandeurs inconnues, potentiel vecteur \mathbf{A} ou potentiel scalaire Ω , seront liés par des conditions de périodicités ou d'anti-périodicités sur les frontières latérales par rapport à la direction du mouvement. Grâce à cette condition, les inconnues situées aux extrémités permutent et ne sont pas considérés, pour le système matriciel, comme de nouvelles inconnues.

II.2.1 Méthodes basées sur une surface de glissement

II.2.1.1 Méthode du pas bloqué

A notre connaissance les premiers travaux relatifs à la méthode que nous avons intitulée pas bloqué, ont été présentés en 1988 par Preston et all [12]. Une extension en 3D a été présentée en 1995 [28] puis reprise par la suite [30, 34, 36].

Le principe est basé, sur le raccordement d'un maillage fixe et d'un maillage mobile qui s'effectue sur la frontière Γ_{f-m} . Cette frontière est une ligne en 2D et une surface en 3D. Cette méthode exige un maillage régulier au niveau de la frontière. Elle doit être discrétisée en segments de même longueur en 2D ou en surfaces élémentaires parfaitement identiques en 3D. Pour conserver un maillage conforme le pas de mouvement doit correspondre à un nombre entier de pas de maillage.

A titre d'exemple, considérons un mouvement avec un pas correspondant au pas du maillage. Dans le cas d'une formulation en potentiel scalaire magnétique, comme indiqué sur la figure II-1, on permute les inconnues nodales au niveau de la surface de glissement. Pour la formulation en potentiel vecteur se sont les inconnues circulation sur les arêtes qui permutent. Ce changement est effectué au niveau du tableau de connectivité. Les conditions de périodicité ou d'anti-périodicité sont assurées par les inconnues situées aux extrémités de la surface de glissement.

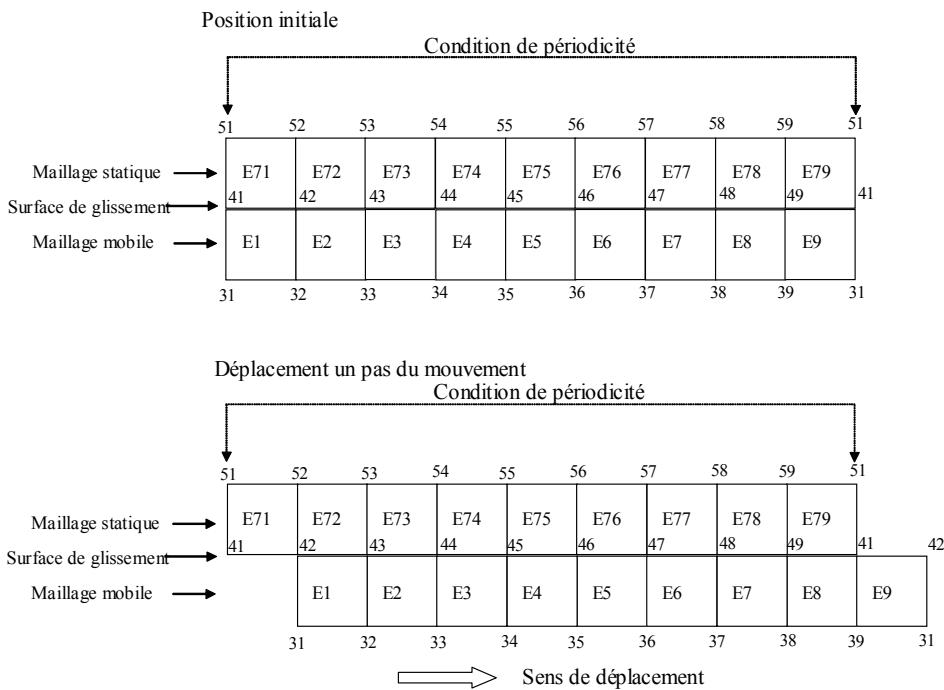


Figure II-1 Simulation du mouvement avec la méthode du pas bloqué

Pour réaliser le déplacement relatif, on corrige uniquement la connectivité dans les éléments mobiles qui touchent la surface de glissement. A titre d'exemple, pour l'élément E1 de la figure II-1, le système matriciel élémentaire, avec les termes s'écrit:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & \dots & S_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{41} & \dots & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{41} \\ I_{42} \\ I_{31} \\ I_{32} \end{bmatrix} \text{ Pour Position initiale} \quad (\text{II-1})$$

Puis, après un pas de mouvement, voir figure II-1 :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & \dots & S_{14} \\ \dots & \dots & \dots \\ S_{41} & \dots & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{42} \\ I_{43} \\ I_{31} \\ I_{32} \end{bmatrix} \quad (\text{II-2})$$

Cette méthode présente l'avantage d'avoir un maillage toujours conforme. Elle est simple à mettre en œuvre et les propriétés des éléments finis sont conservées. De ce fait, la prise en compte du mouvement n'introduit pas de nouvelle erreur numérique. Dans ces conditions, lors des comparaisons, cette méthode sera considérée comme la référence pour évaluer la qualité de la solution.

Néanmoins, la contrainte sur le pas du mouvement qui doit correspondre au pas du maillage, constitue le principal inconvénient.

La méthode du pas bloqué est déjà implantée dans le logiciel CARMEL du L2EP et est utilisée pour modéliser des machines tournantes avec la formulation en potentiel vecteur ou en potentiel scalaire.

II.2.1.2 Méthodes d'interpolation nodale

Avec la surface de glissement le recollement du maillage s'effectue dans le cas 2D sur une ligne et sur une surface dans le cas 3D. Si l'on considère un déplacement quelconque, les éléments et donc les nœuds ne sont plus coïncidents. Pour le recollement des deux maillages et donc des inconnues, on a alors recours à une technique d'interpolation.

On pourrait envisager une interpolation au niveau des divers types de grandeurs discrétisées développées dans le chapitre précédent, ce qui conduit aux éléments nodiaux, d'arêtes et de facettes. Cependant, la méthode d'interpolation, facilement applicable aux éléments nodiaux, devient délicate à développer avec les autres types d'éléments. Dans cette étude, nous nous sommes donc limités au cas de la formulation en potentiel scalaire magnétique.

Pour l'interpolation on exprime, sur la frontière Γ_{f-m} les inconnues des nœuds mobiles en fonction des inconnues fixes. Cette méthode a été proposée à l'origine Perrin-Bit et all [24, 31] et nous l'appellerons interpolation au 1^{er} ordre. Nous proposerons, pour cette méthode, une extension qui sera basée sur une interpolation au 2^{ème} ordre ainsi qu'une méthode d'interpolation de surface.

Une illustration de cette approche est faite en 2D, sur la figure II-2 [24, 42]. Nous présentons tout d'abord, sur la figure II-2.a, un maillage régulier. Dans la position initiale, les nœuds fixes et mobiles sur l'interface sont confondus. La figure II-2.b représente le maillage après un pas de mouvement différent du pas du maillage. On observe alors, au niveau de l'interface, l'apparition de nouvelles inconnues "mobiles" par opposition aux nœuds de la partie statique que l'on notera "fixes".

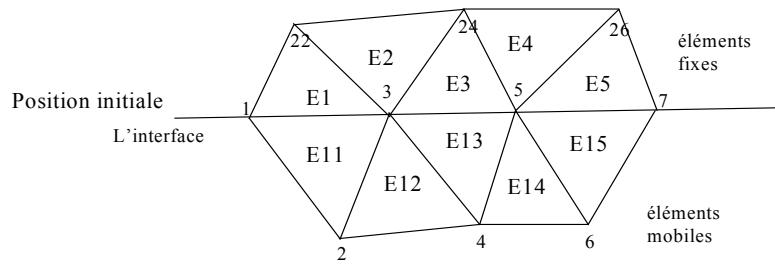


Fig. II-2.a

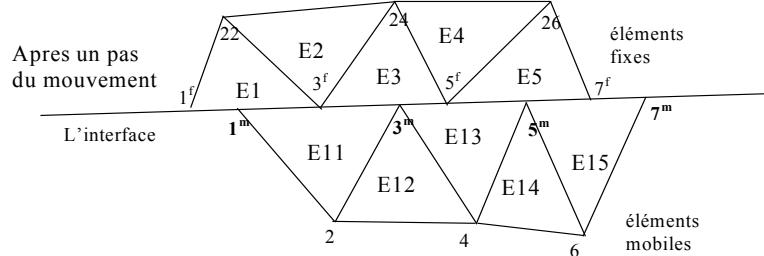


Fig. II-2.b

Figure II-2 Schéma de connexion par interpolation nodale [24]

Nous allons maintenant décrire les trois approches que nous avons développées, basées sur la méthode d'interpolation nodale.

Méthode d'interpolation nodale au 1^{er} ordre

Comme pour la méthode du pas bloqué les inconnues nodales, qui dans notre cas sont les valeurs du potentiel scalaire magnétique, seront notées I^f et I^m par association respectivement aux nœuds fixes et mobiles. On rappelle également que l'on utilise un maillage 3D de type 2D extrudé.

Comme indiqué ci-dessus, on cherche à exprimer, à partir d'une interpolation, les inconnues nodales mobiles en fonction des inconnues fixes. A l'aide d'une méthode d'interpolation, pour un élément fixe donné, on cherche une expression de la forme:

$$I^m = \sum_{i=1}^{n_{ne}} \alpha_i I_i^f \quad (\text{II-3})$$

où n_{ne} : représente le nombre de nœuds de l'élément fixe.

I^m : l'inconnue nodale associée aux nœuds mobiles considérés.

I^f : l'inconnue nodale associée aux nœuds fixes.

α_i : fonction d'approximation à déterminer.

A titre d'exemple (cf fig. II-2.b) si le nœud mobile " 1^m " est confondu avec le nœud fixe " 1^f ", alors la fonction d'approximation " α " est égale à 1. En revanche s'il est confondu avec le nœud " 3^f " elle est égale à zéro. Ces propriétés permettent de "définir" la fonction " α " comme une fonction d'approximation nodale.

Lorsque le maillage est dans la position initiale les éléments sont tous connectés, les uns aux autres, d'une façon conforme (fig. II-2.a). En revanche, après un déplacement quelconque (fig. II-2.b) on peut exprimer les inconnues nodales, qui se sont déplacées, en fonction des inconnues des nœuds fixes à l'aide de la relation II-1. Avec une interpolation linéaire au 1^{er} ordre, les inconnues mobiles de l'élément E11, peuvent s'exprimer de la façon suivante:

$$I_1^m = \alpha I_1^f + (1 - \alpha) I_3^f \quad (\text{II-4})$$

$$I_3^m = \beta I_3^f + (1 - \beta) I_5^f \quad (\text{II-5})$$

Dans cette expression, les coefficients α et β sont définis de la façon suivante:

$$\alpha = l_{1^m 3^f} / l_{1^f 3^f} \text{ et } \beta = l_{3^m 5^f} / l_{3^f 5^f} \quad (\text{II-6})$$

où l_{jk} est la distance entre les nœuds j et k. Bien entendu, si le maillage est régulier, on $\alpha=\beta$.

Dans ces conditions, la matrice élémentaire (pour l'élément E11) qui s'écrit, pour la position initiale:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (\text{II-7})$$

est modifiée, après le mouvement, par I_1 et I_3 qui deviennent I_1^m et I_3^m . Soit:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \text{ après mouvement} \begin{bmatrix} I_1^m \\ I_2 \\ I_3^m \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1-\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^f \\ I_2 \\ I_3^f \\ I_5^f \end{bmatrix} \quad (\text{II-8})$$

Pour la suite de l'étude, on notera $|\alpha|$, la matrice soit:

$$|\alpha| = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \quad (\text{II-9})$$

Il est important de noter que la somme de tous les coefficients d'une ligne de la matrice $|\alpha|$ doit être égale à 1.

Afin de respecter les propriétés de la méthode de Galerkin, on doit multiplier la matrice élémentaire par $|\alpha|^T$ ce qui conduit, pour l'élément E11 au système suivant:

$$|\alpha|^T \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} |\alpha| \begin{bmatrix} I_1^f \\ I_2 \\ I_3^f \\ I_5^f \end{bmatrix} \quad (\text{II-10})$$

On notera que la matrice élémentaire est modifiée par la matrice $|\alpha|$, mais qu'elle reste symétrique.

Si on considère maintenant le cas des machines tournantes. Le maillage dans la zone de l'entrefer est cylindrique et, comme le montre la figure II-3, il engendre alors un problème discrétilisation spatiale. Les coefficients α et β ne peuvent plus être calculés à l'aide de l'équation (II-6). En effet, dans ce cas, la somme sur une ligne des termes de la matrice $|\alpha|$ ne serait plus égale à 1.

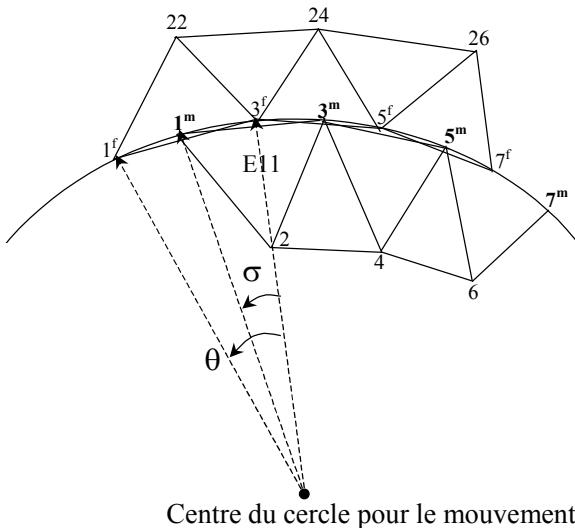


Figure II-3 Mouvement de rotation avec erreur de discréétisation

Afin de contourner cette difficulté, on modifie la méthode de calcul des coefficients donnée par l'équation (II-6). A titre d'exemple, dans le cas de la figure II-3, on pose $\alpha = \sigma/\theta$.

Méthode d'interpolation nodale du 2^{ème} ordre

Afin d'améliorer l'approximation, nous avons développé une méthode d'interpolation à l'ordre 2 [52], en exprimant les inconnues mobiles en fonction de trois inconnues fixes.

Reprendons, la figure II-2 et l'élément E11. Pour les inconnues mobiles I_1^m et I_3^m on choisit, de les exprimer en fonction des nœuds fixes les plus proche à savoir, dans notre cas, I_1^f , I_3^f et I_5^f . Dans ces conditions, on aura à l'ordre 2, des expressions de la forme suivante:

$$I_1^m = f_1(\alpha, \beta)I_1^f + f_2(\alpha, \beta)I_3^f + f_3(\alpha, \beta)I_5^f \quad (\text{II-11})$$

$$I_3^m = g_1(\alpha, \beta)I_1^f + g_2(\alpha, \beta)I_3^f + g_3(\alpha, \beta)I_7^f \quad (\text{II-12})$$

où $f_i(\alpha, \beta)$, $g_j(\alpha, \beta)$ sont des fonctions, des coefficients α et β définis par la relation (II-6).

Afin de ne pas alourdir les développements, dans un premier temps, on considère le maillage représenté sur la figure II-2, qui est régulier au niveau de l'interface (soit: $\alpha = \beta$). Par identification avec une fonction du 2^{ème} ordre on obtient, pour les f_i et g_j les expressions suivantes:

$$f_1(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha}{2}, \quad f_2(\alpha) = 1 - \alpha^2, \quad f_3(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha}{2} \quad (\text{II-13})$$

$$g_1(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha}{2}, \quad g_2(\alpha) = -\alpha^2 + 2\alpha \quad g_3(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{3\alpha}{2} + 1 \quad (\text{II-14})$$

Dans ces conditions, la matrice de passage définie en (II-9) et que l'on introduit en (II-10) s'écrit si on considère l'élément E11, sous la forme suivante pour une interpolation du 2^{ème} ordre:

Avant le mouvement on a

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

Et après le mouvement:

$$\begin{bmatrix} I_1^m \\ I_2 \\ I_3^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha}{2} & 0 & 1 - \alpha^2 & \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha}{2} & 0 & -\alpha^2 + 2\alpha & \frac{\alpha^2}{2} - \frac{3\alpha}{2} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^f \\ I_2 \\ I_3^f \\ I_5^f \end{bmatrix} \quad (\text{II-15})$$

Cette expression permet de définir la matrice $|\alpha|$. On notera qu'une inconnue mobile s'exprime maintenant à partir de trois inconnues fixes.

Si on considère maintenant le cas d'une surface cylindrique (entrefer d'une machine) on introduit, comme pour le premier ordre, le calcul des coefficients sous la forme d'un rapport angulaire ($\alpha = \sigma/\theta$ cf figure II-3)

Méthode d'interpolation de surface cas général

Nous présentons, dans ce paragraphe, une extension de la méthode d'interpolation du 1^{er} ordre, au cas d'une interface surfacique [53] composée d'un maillage quelconque.

Principe de la méthode

Considérons une géométrie, constitué d'un maillage quelconque, qui peut se mettre en mouvement. Les parties mobile et fixe sont liées par une interface et donc un maillage surfacique conforme, dans la position initiale, mais pas nécessairement régulier (dans le plan choisi x0z). Après un déplacement, dans le cas général (pas de contrainte particulière) le maillage n'est plus conforme. Pour effectuer la modélisation, il est donc nécessaire de prendre en compte, la non conformité des maillages, par une technique de recollement. Ce recollement est basé sur des fonctions d'interpolation en deux dimensions. Dans le cas particulier où le maillage sur l'interface est régulier suivant l'axe "z", nous pouvons appliquer la méthode d'interpolation du 1^{er} ou du 2^{ème} ordre suivant l'axe "x".

Pour prendre en compte le mouvement avec un maillage non régulier, nous proposons la Méthode d'Interpolation de Surface.

Cas d'une surface plane

Prenons le cas d'un maillage constitué de tétraèdres. Sur la figure II-4, nous avons représenté le maillage de l'interface (une surface plane) entre la partie mobile et la partie fixe. Sur la figure II-4.a nous avons la position initiale (maillage conforme) et, sur la figure II-4.b la position après un déplacement (maillage non conforme).

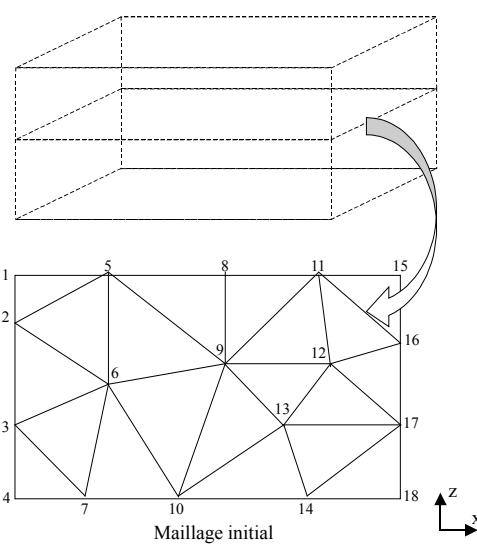


Fig. II-4.a

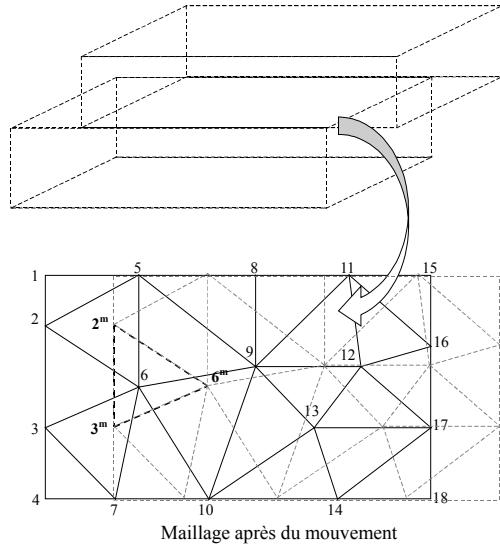


Fig. II-4.b

Figure II-4 Principe de la Méthode d'Interpolation de Surface

Dans le cas du maillage conforme, les nœuds appartenant à la surface de glissement, connectent les éléments des deux cotés de cette surface. Après mouvement, le nombre de nœuds appartenant à cette surface est multiplié par deux. De ce fait, il n'existe plus de connexion "nodale" entre les deux maillages fixe et mobile (fig. II-4.b). Pour recoller ces deux maillages, nous introduisons des fonctions d'approximation en deux dimensions. Les inconnues nodales, qui se sont déplacées, (i.e. nœuds 2^m, 3^m, 6^m sur la figure II-4.a), sont exprimées en fonction des inconnues nodales fixes à l'aide des fonctions d'approximation triangulaire [2, 24]. A titre d'exemple, considérons sur la figure II-5 qui se trouve dans un plan le triangle, représenté par les nœuds 2^f, 5^f, 6^f ainsi que le nœud mobile noté 2^m.

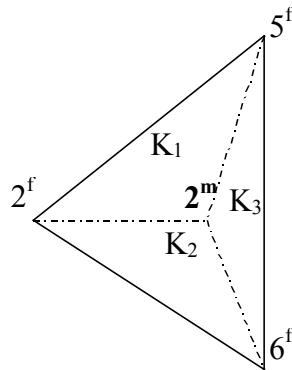


Figure II-5 Interpolation triangulaire

On obtient ainsi trois triangles (constitués des nœuds 2^f, 5^f, 2^m puis, 2^f, 6^f, 2^m et enfin 5^f, 6^f, 2^m), dont les surfaces sont notées respectivement K₁, K₂ et K₃. La somme des trois surfaces donne évidemment la surface K₂₅₆ du triangle "2-5-6".

On peut alors exprimer, à l'aide des coefficients K et des valeurs nodales, la valeur de l'inconnue nodale (notée I_2^m) en fonction des inconnues (notées I_k^f) fixes à l'aide de la relation linéaire:

$$I_2^m = \frac{K_1}{K_{256}} I_6^f + \frac{K_2}{K_{256}} I_5^f + \frac{K_3}{K_{256}} I_2^f \quad (\text{II-16})$$

dans cette expression, I_k^m I_k^f représente la valeur du potentiel scalaire au nœud k fixe ou mobile [25],

Afin de faciliter la lecture, on introduit les coefficients α_{ij} définis par les relations suivantes:

$$\alpha_{2^m 6^f} = \frac{K_1}{K_{256}}, \quad \alpha_{2^m 5^f} = \frac{K_2}{K_{256}} \text{ et } \alpha_{2^m 2^f} = \frac{K_3}{K_{256}}, \quad (\text{II-17})$$

L'équation (II-16) s'écrit alors:

$$I_{2^m} = \alpha_{2^m 6^f} I_6^f + \alpha_{2^m 5^f} I_5^f + \alpha_{2^m 2^f} I_2^f \quad (\text{II-18})$$

Reprendons le maillage de la figure II-4, et faisons un agrandissement de la zone relative aux nœuds mobiles 2^m , 3^m et 6^m . Cet agrandissement est représenté sur la figure II-6. Nous allons construire la nouvelle matrice élémentaire d'un tétraèdre dont une des facettes appartient à la surface de glissement. Cette matrice élémentaire est modifiée, à l'aide d'une matrice de passage, de la même façon que dans le cas de l'interpolation du 1^{er} ordre (cf équation (II-10))

Sur la figure II-6 on note que I_3^m peut être interpolé, à l'aide des équations d'approximation α en fonction des inconnues I_3^f , I_6^f , I_7^f . De même, I_6^m peut être interpolé à partir de I_6^f , I_9^f , I_{10}^f .

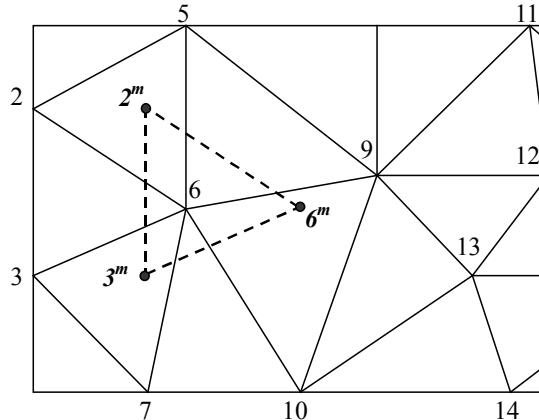


Figure II-6 Agrandissement d'un élément "mobile"

Pour le tétraèdre considéré (cf. figure II-7), après le mouvement les inconnues nodales I_2 , I_3 , I_6 , relatifs aux nœuds 2, 3, 6 qui représentent les nœuds appartenant à la surface de glissement deviennent I_2^m , I_3^m , I_6^m .

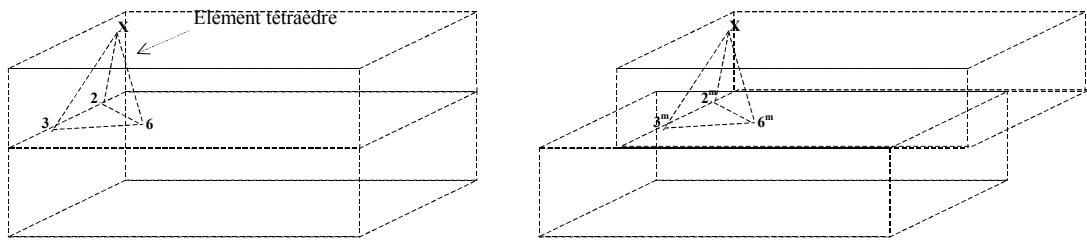


Figure II-7 Elément étudié

Par extension de la relation (II-9), nous pouvons alors construire la matrice de passage $|\alpha|$ par la transformation suivante:

$$\begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_6 \\ I_X \end{pmatrix}$$

après mouvement →

$$\begin{pmatrix} I_2^m \\ I_3^m \\ I_6^m \\ I_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{2^m 2^f} & 0 & \alpha_{2^m 5^f} & \alpha_{2^m 6^f} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{3^m 3^f} & 0 & \alpha_{3^m 6^f} & \alpha_{3^m 7^f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{6^m 6^f} & 0 & \alpha_{6^m 9^f} & \alpha_{6^m 10^f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2^f \\ I_3^f \\ I_5^f \\ I_6^f \\ I_7^f \\ I_9^f \\ I_{10}^f \\ I_X \end{pmatrix} \quad (\text{II-19})$$

où I_X représente l'inconnue nodale sur le nœud "x" qui n'appartient pas à la surface de glissement. De ce fait, sa fonction d'interpolation reste inchangée. On retrouve ainsi, la matrice notée $|\alpha|$.

Pour la position initiale, la matrice élémentaire du tétraèdre auquel on associe les inconnues nodales "2, 3, 6, x" s'écrit :

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} = [S^e] \quad (\text{II-20})$$

Après le mouvement, les inconnues nodales I_2, I_3, I_6 deviennent I_2^m, I_3^m et I_6^m (voir figure II-7) puis, à l'aide de la formule (II-19) elles s'expriment en fonction de: $I_2^f, I_3^f, I_5^f, I_6^f, I_7^f, I_9^f, I_{10}^f$ et I_x . Comme précédemment, afin de respecter les propriétés de la méthode de Galerkin, on doit multiplier la matrice élémentaire (II-20) par $|\alpha|^T$ ce qui conduit à la relation suivante:

$$|\alpha|_{(8 \times 4)}^T \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} |\alpha|_{(4 \times 8)} = |S_{\text{mouv}}|_{(8 \times 8)} \quad (\text{II-21})$$

dans cette relation, les indices entre parenthèse représentent les dimensions des matrices.

Nous notons qu'après le mouvement, le nombre d'inconnues pour cet élément est augmenté. La taille de la matrice élémentaire est aussi augmentée en multipliant par $|\alpha|^T$ et $|\alpha|$. En revanche, le nombre d'inconnues du système global est inchangé, car il n'y a pas, pour le problème, de nouvelles inconnues. Néanmoins, on a une légère augmentation des termes non nuls dans la matrice de raideur du système à résoudre.

Cas d'une surface cylindrique

Si on considère le cas des machines tournantes, le maillage dans la zone de l'entrefer est cylindrique. Comme cela a été montré pour l'interpolation du 1^{er} ordre, le mouvement engendre un problème de discréétisation spatiale ce que nous avons reproduit sur la figure II-8.

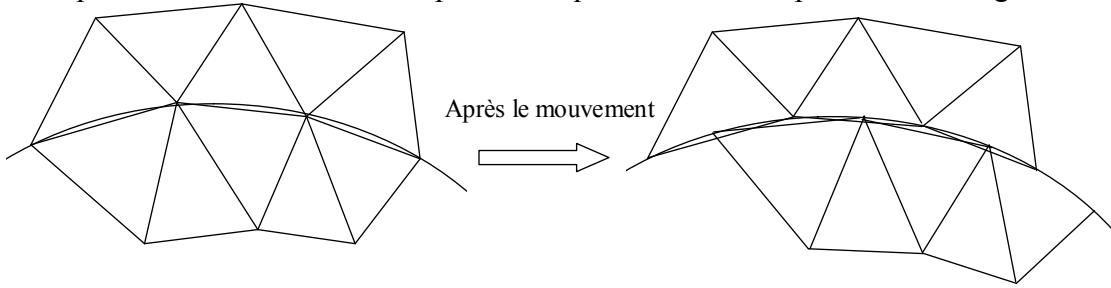


Figure II-8 Maillage d'une surface cylindrique

Dans le cas de l'interpolation de surface, comme le montre la figure II-9, après un mouvement de rotation les nœuds 2^f, 2^m, 5^f et 6^f ne se retrouvent plus sur un même plan.

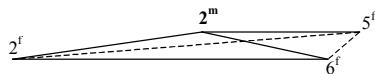


Figure II-9 Déformation due au mouvement

Dans ce cas, la somme des trois surfaces devient supérieure à la surface du triangle 2-5-6 soit, en reprenant les notations de la relation (II-16): $K_1+K_2+K_3>K_{256}$. Afin de prendre en compte cette erreur, la fonction d'interpolation 2D est corrigée de la manière suivante:

$$I_2^m = \frac{K_{2^m 25}}{K_{2^m 25} + K_{2^m 26} + K_{2^m 56}} I_6^f + \frac{K_{2^m 26}}{K_{2^m 25} + K_{2^m 26} + K_{2^m 56}} I_5^f + \frac{K_{2^m 56}}{K_{2^m 25} + K_{2^m 26} + K_{2^m 56}} I_2^f \quad (\text{II-21})$$

On note que la propriété des fonctions d'interpolation est bien conservée à savoir:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \text{ (avec } n=3\text{). On a alors:}$$

$$\alpha_1 = \frac{K_{2^m 25}}{K_{2^m 25} + K_{2^m 26} + K_{2^m 56}}, \quad \alpha_2 = \frac{K_{2^m 26}}{K_{2^m 25} + K_{2^m 26} + K_{2^m 56}}, \quad \alpha_3 = \frac{K_{2^m 56}}{K_{2^m 25} + K_{2^m 26} + K_{2^m 56}},$$

Si l'on considère les termes de la matrice passage $|\alpha|$ (relation (II-19) ainsi défini, la somme des termes sur chaque ligne est toujours égale 1.

$$\text{C'est à dire pour } |\alpha| = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{1j} \\ \alpha_{21} & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \alpha_{i1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{ij} \end{pmatrix} \quad (\text{II-22})$$

$$\text{on a: } \sum_{m=1}^j \alpha_{1m} = 1, \quad \sum_{m=1}^j \alpha_{2m} = 1, \quad \dots, \quad \sum_{m=1}^j \alpha_{im} = 1$$

II.2.1.3 La méthode Mortar¹

Cette méthode de recollement de maillages, proposée dans les références [44, 45, 54], peut être classée parmi les techniques basées sur une surface de glissement. En fait pour simuler le mouvement nous faisons glisser deux maillages que nous recollons. Il est à noter, que dans ce travail, nous nous sommes limités, pour le développement de la méthode Mortar au cas de la formulation en potentiel scalaire. Dans ce paragraphe, afin de faciliter la compréhension des développements, les inconnues seront notées Ω .

Prenons le système en mouvement on rappelle que le domaine fixe notée D_f et le domaine mobile D_m (on a $D_f \cup D_m = D$). On note également Γ_{f-m} , l'interface entre la partie fixe et la partie mobile.

Dans le domaine continu, on force la continuité du potentiel scalaire entre la partie fixe et la partie mobile en imposant, à l'interface entre les deux domaines, la condition:

$$\int_{\Gamma_{f-m}} \psi(\Omega_f - \Omega_m) d\gamma = 0 \quad (\text{II-23})$$

dans cette expression, ψ représente une fonction test.

On note maintenant Ω_{ff} , la valeur du potentiel scalaire obtenue à partir des valeurs discrétisées sur la partie fixe de la frontière. A l'aide des fonctions de forme nodale, il a pour expression:

$$\Omega_{ff} = \sum_{i=1}^{N_{nff}} w_{ni} \Omega_{fi} \quad (\text{II-24})$$

où N_{nff} représente le nombre de nœuds sur la frontière de la partie fixe. De la même façon, en notant $\Omega_{m\Gamma}$ la valeur du potentiel scalaire sur la frontière de la partie mobile on a, en fonction des valeurs discrétisées:

$$\Omega_{m\Gamma} = \sum_{j=1}^{N_{nm\Gamma}} w_{nj} \Omega_{mj} \quad (\text{II-25})$$

avec $N_{nm\Gamma}$ le nombre de nœuds sur la frontière de la partie mobile.

On introduit maintenant, dans l'équation (II-23), les valeurs discrétisées du potentiel scalaire (relations (II-24) et (II-25)). Pour appliquer la méthode de Galerkin, on choisit comme fonction test, l'ensemble des fonctions nodales de la partie mobile. On peut alors écrire le système d'équations:

$$\sum_{j=1}^{N_{nm\Gamma}} \left(\int_{\Gamma_{f-m}} w_{nj} w_{nk} d\gamma \right) \Omega_{mj} = \sum_{i=1}^{N_{nff}} \left(\int_{\Gamma_{f-m}} w_{ni} w_{nk} d\gamma \right) \Omega_{fi} \quad \forall k \in N_{nm\Gamma} \quad (\text{II-26})$$

Le système (II-26) peut se mettre sous la forme matricielle suivante [49, 50]:

$$[C] [\Omega_{m\Gamma}] = [D] [\Omega_{ff}] \quad (\text{II-27})$$

¹ Pour cette partie, nous tenons à remercier Messieurs J. P. A. Bastos et N. Sadowski pour les discussions que nous avons eues lors de leur visite à Lille ainsi qu'au Congrès COMPUMAG à Shenyang, O. Antunes pour les réponses qu'il a bien voulu faire à nos courriers électroniques, ainsi que F. Bouillaud pour les fructueux échanges que nous avons eus lors du Congrès COMPUMAG à Shenyang.

dans cette expression, $[C]$ est une matrice carrée de dimension $N_{nm\Gamma}$ et la matrice $[D]$ est de dimensions $N_{nm\Gamma} \times N_{nf\Gamma}$. A partir de l'expression (II-26), on peut facilement déterminer l'expression des termes élémentaires des deux matrices soit:

$$c(k, j) = \int_{\Gamma_{f-m}} w_{nj} w_{nk} d\gamma \quad \text{et} \quad d(k, i) = \int_{\Gamma_{f-m}} w_{ni} w_{nk} d\gamma \quad (\text{II-28})$$

La relation (II-27) permet d'exprimer les valeurs discrétisées du potentiel scalaire de la partie mobile en fonction des valeurs de la partie fixe soit:

$$[\Omega_{m\Gamma}] = [C]^{-1} [D] [\Omega_{f\Gamma}] \quad (\text{II-29})$$

Ecrivons maintenant l'équation (I-29), dans le maillage fixe. Si on considère les conditions aux limites sur Γ_h et Γ_b , l'intégrale de frontière se restreint à l'interface Γ_{f-m} . De plus, comme nous l'avons indiqué, aucun champ source \mathbf{H}_{sd} , ne traverse la frontière. On obtient alors, l'expression suivante:

$$\begin{aligned} & \int_{D_f} \mu(\mathbf{grad}w_n \cdot \mathbf{grad}\Omega_{df}) d\tau + \int_{\Gamma_{f-m}} w_n \mu \mathbf{grad}\Omega_{df} \cdot \mathbf{n}_{fm} d\gamma \\ &= \int_{D_f} \mu \mathbf{grad}w_n \cdot \mathbf{H}_{sd} d\tau \quad \forall n \in N_{nf} \end{aligned} \quad (\text{II-30})$$

dans cette expression, \mathbf{n}_{fm} représente la normale sortante orientée du domaine fixe vers le domaine mobile, Ω_{df} la valeur discrétisée du potentiel scalaire dans le domaine fixe et N_{nf} le nombre d'inconnues dans le domaine fixe. On peut remarquer que, sur la frontière Γ_{f-m} , l'expression discrétisée du potentiel scalaire, sera notée $\Omega_{f\Gamma}$ et qu'elle est donnée par la relation (II-24). En faisant apparaître explicitement les valeurs discrétisées nodales Ω_f dans le domaine fixe (sans la frontière) et $\Omega_{f\Gamma}$ le système (II-30) peut s'écrire:

$$\begin{bmatrix} S_f & L_{f\Gamma} \\ L_{f\Gamma}^t & S_{f\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_f \\ \Omega_{f\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-31})$$

On retrouve les matrices S et F comme dans le système (I-30) avec en plus la matrice L qui fait le lien entre les noeuds de la frontière Γ_{f-m} et les noeuds à l'intérieur du domaine fixe.

Ecrivons maintenant l'équation (I-29) pour le maillage mobile. On a alors, dans les mêmes conditions que pour le maillage fixe:

$$\begin{aligned} & \int_{D_m} \mu(\mathbf{grad}w_n \cdot \mathbf{grad}\Omega_{dm}) d\tau + \int_{\Gamma_{m-f}} w_n \mu \mathbf{grad}\Omega_{dm} \cdot \mathbf{n}_{mf} d\gamma \\ &= \int_{D_m} \mu \mathbf{grad}w_n \cdot \mathbf{H}_{sd} d\tau \quad \forall n \in N_{nm} \end{aligned} \quad (\text{II-32})$$

avec pour le domaine mobile, Ω_{dm} la valeur discrétisée du potentiel scalaire, N_{nm} le nombre d'inconnues et \mathbf{n}_{mf} la normale sortante orientée du domaine mobile vers le domaine fixe. Sur la frontière Γ_{m-f} , le potentiel scalaire magnétique est limité aux valeurs $\Omega_{m\Gamma}$ définies en (II-18). Comme pour la partie fixe, on impose que les termes sources ne traversent pas la

frontière. L'écriture sous forme matricielle du système (II-32), en faisant apparaître les valeurs du potentiel scalaire sur la frontière Γ_{mf} , prend la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} S_m & L_{m\Gamma} \\ L_{m\Gamma}^t & S_{m\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_m \\ \Omega_{m\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-33})$$

Dans cette expression on retrouve, pour le domaine mobile, les termes définis dans le système (II-31) relatifs au domaine fixe.

Le système à résoudre, sans lien entre les parties fixe et mobile peut être obtenu en regroupant les relations (II-31) et (II-33). Soit:

$$\begin{bmatrix} S_f & L_{ff} & 0 & 0 \\ L_{ff}^t & S_{ff} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_m & L_{m\Gamma} \\ 0 & 0 & L_{m\Gamma}^t & S_{m\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_f \\ \Omega_{ff} \\ \Omega_m \\ \Omega_{m\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_f \\ 0 \\ F_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-34})$$

auquel il faut ajouter la condition (II-29) pour imposer la continuité du potentiel scalaire sur la frontière Γ_{f-m} . On élimine alors $\Omega_{m\Gamma}$ en introduisant la transformation suivante:

$$\begin{bmatrix} \Omega_f \\ \Omega_{ff} \\ \Omega_m \\ \Omega_{m\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & C^{-1}D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_f \\ \Omega_{ff} \\ \Omega_m \end{bmatrix} \text{ on pose: } [\mathbf{T}]_{\text{Transf}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & C^{-1}D & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-35})$$

dans cette expression "**1**" représente une sous matrice identité.

Pour obtenir le système définitif, on regroupe les équations (II-34) et (II-35). Puis, afin de disposer d'un système matriciel carré, on multiplie le système par la matrice de transformation transposée. Ce qui donne l'expression suivante:

$$[\mathbf{T}]_{\text{Transf}}^t \begin{bmatrix} S_f & L_{ff} & 0 & 0 \\ L_{ff}^t & S_{ff} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_m & L_{m\Gamma} \\ 0 & 0 & L_{m\Gamma}^t & S_{m\Gamma} \end{bmatrix} [\mathbf{T}]_{\text{Transf}} \begin{bmatrix} \Omega_f \\ \Omega_{ff} \\ \Omega_m \end{bmatrix} = [\mathbf{T}]_{\text{Transf}}^t \begin{bmatrix} F_f \\ 0 \\ F_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-36})$$

que l'on peut encore écrire sous la forme ci-dessous après avoir effectué les développements:

$$\begin{bmatrix} S_f & L_{ff} & 0 & 0 \\ L_{ff}^t & S_{ff} + (C^{-1}D)^t S_{m\Gamma} C^{-1}D & (C^{-1}D)^t L_{m\Gamma}^t & 0 \\ 0 & L_{m\Gamma} C^{-1}D & S_m & \Omega_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_f \\ \Omega_{ff} \\ \Omega_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_f \\ 0 \\ F_m \end{bmatrix} \quad (\text{II-30})$$

De cette expression, on observe que les termes concernés pour le recollement du maillage, sont uniquement ceux relatifs à la partie mobile de la frontière Γ_{f-m} .

On peut également noter que si le maillage est "conforme" sur la frontière alors les termes élémentaires des matrices C et D sont identiques (voir relation (II-28)). Dans ce cas le produit matriciel $C^{-1}D$ est égal à la matrice unité.

En ce qui concerne les calculs ils sont effectués au niveau des termes élémentaires des nœuds mobiles. On trouvera, en annexe I, le détail des calculs à effectuer dans le cas d'un mouvement linéaire.

Remarques

Dans le cas d'un mouvement de rotation, la surface de glissement est cylindrique et comme pour les méthodes d'interpolation il apparaît un problème de discréétisation spatiale (cf figure II-3). Pour remédier à cette difficulté nous avons comme, précédemment, exprimé le déplacement α en fonction d'un rapport d'angle [45, 49].

Si on résout le système constitué des équations (II-27), (II-31) et (II-33), cela revient, comme l'ont montré O. Antunes et all [50, 55], à la méthode des multiplicateurs de Lagrange développée par l'équipe de D. Rodger [16].

II.2.2 Méthodes basées sur un recollement volumique

Contrairement aux méthodes basées sur une surface de glissement, pour le recollement volumique, le domaine d'étude est décomposé en trois sous domaines: fixe, mobile et une zone de recouvrement. Ces trois sous domaines sont notées, respectivement D_f , D_m et D_{rec} . Les domaines fixe et mobile (D_f et D_m) sont maillés classiquement avec des conditions aux limites de type Γ_h ou Γ_b suivant le cas. Quand au domaine de recouvrement il sera remaillé en fonction du mouvement.

II.2.2.1 Bande de mouvement

Cette méthode a été développée en 2D, dans les années 80 [6] puis, reprise et améliorée [17, 25]. Elle s'appuie sur un remaillage local situé dans la zone de recouvrement au niveau de l'entrefer d'une machine par exemple. Le maillage des domaines fixe et mobile est inchangé. Le mouvement est simulé par la modification relative de la partie mobile par rapport à la partie fixe. Afin d'augmenter les performances de cette méthode des améliorations ont été apportées [25].

La bande de mouvement a été développée en 2D avec des triangles et des quadrangles. Dans cette étude, nous avons développé la version d'origine dans le cas 3D avec des éléments prismatiques et hexaédriques.

Le principe de cette méthode est illustré sur la figure II-10. On retrouve, le maillage fixe, le maillage mobile et la zone de recouvrement appelée "bande de mouvement". Le premier maillage, en haut de la figure, correspond à la position initiale. En déplaçant le maillage mobile d'un mouvement Δx on déforme le maillage au niveau de la bande de mouvement.

Il est à noter que, sur la figure II-10, le mouvement Δx correspond au tiers du pas du maillage. Après trois pas du mouvement ($x+3\Delta x$) on remarque que la déformation devient très importante. Dans ces conditions, afin de conserver un maillage "acceptable", les inconnues liées aux nœuds fixes sont permutées et la connectivité du maillage est ainsi modifiée.

Avec cette méthode, pour simuler le déplacement, on corrige uniquement les termes de la matrice élémentaire des éléments situés de la bande de mouvement. Ces termes sont liés à l'évolution de la forme des éléments. Lorsque la déformation devient trop importante et que l'on change la connectivité, les inconnues nodales ou d'arêtes sont permutées comme c'est le cas pour la méthode du pas bloqué. Malheureusement, la déformation des éléments et la

permutation des inconnues engendrent une imprécision sur le calcul des grandeurs électromagnétiques.

Pour remédier à cet inconvénient deux solutions sont proposées dans la littérature.

- 1- La bande de mouvement est maillée avec des éléments quadrilatéraux décomposables en triangles. Dans ce cas, pour la construction des triangles deux possibilités peuvent être envisagées. En fonction de la déformation des triangles, le choix de la décomposition sera effectué en tenant compte d'un facteur de qualité [25].
- 2- L'utilisation d'éléments hiérarchiques dans la bande de mouvement conduit à l'amélioration des résultats. On notera, par exemple, la réduction des ondulations du couple dans l'entrefer [46].

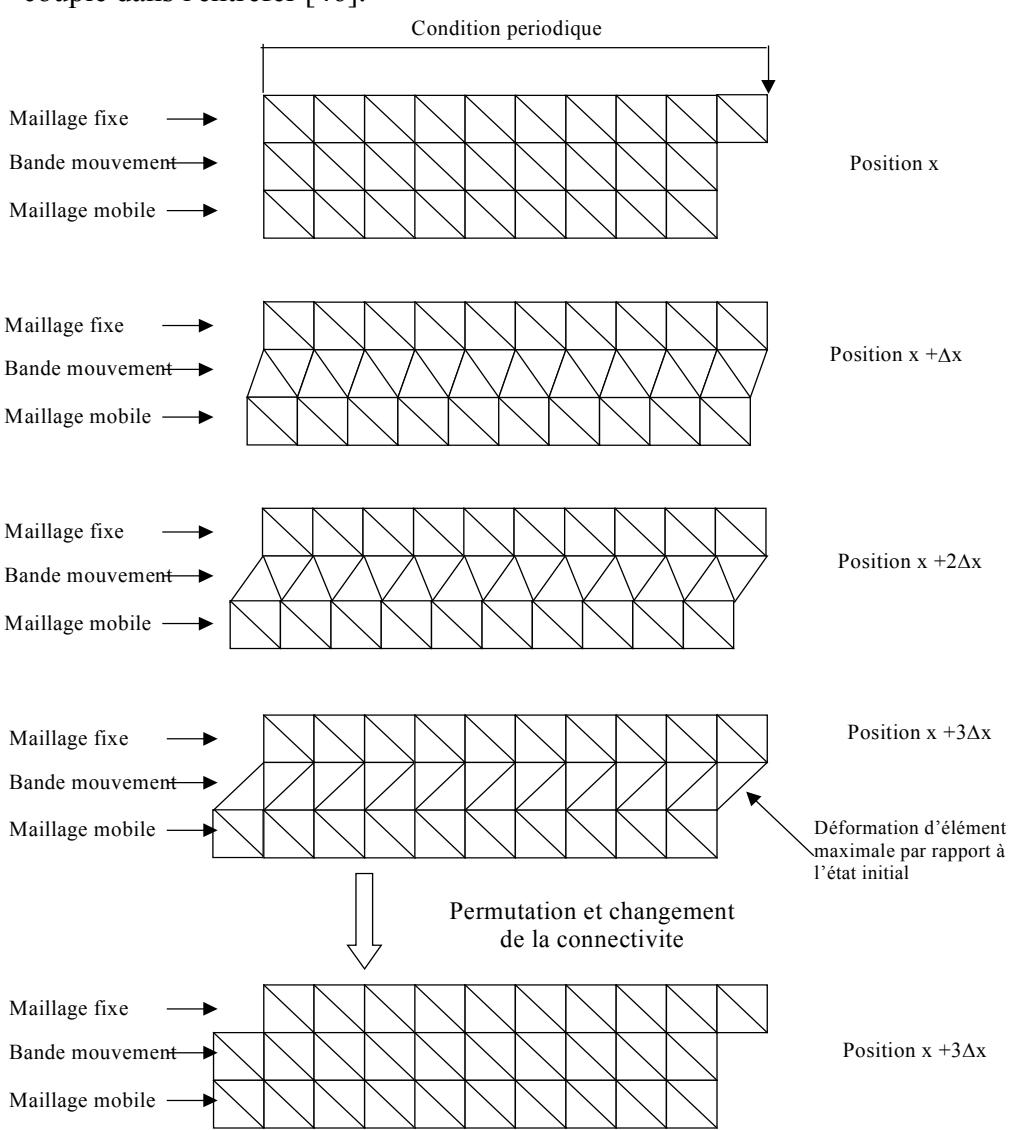


Figure II-10 Evolution des éléments de la bande de mouvement

II.2.2.2 La méthode "Overlapping"

Cette méthode proposée par I. Tsukerman [22] a été développée à l'origine, pour la modélisation en 2D avec la formulation en potentiel vecteur. Elle a été reprise ensuite pour

être appliquée en 2D à des machines électriques [11, 40]. Dans notre étude, la méthode "Overlapping", comme la méthode Mortar, est développée en 3D construit à partir d'un maillage 2D extrudé, et dans le cas de la formulation en potentiel scalaire.

Dans le domaine d'étude on retrouve, comme le montre la figure II-11.a, les trois sous domaines fixe (D_f), mobile (D_m) et la zone de recouvrement (D_{rec}). Les domaines fixe et mobile (D_f et D_m) sont maillés classiquement avec des conditions aux limites de type Γ_h ou Γ_b suivant le cas.

Afin d'effectuer le remaillage volumique, comme cela est illustré par la figure II-11.b, on prolonge dans la zone de recouvrement D_{rec} le maillage des sous domaines D_f et D_m . On fait ainsi apparaître de nouveaux nœuds (extrémité des flèches) mais qui ne sont pas pris en compte comme inconnus. La réunion des trois sous domaines comme le montre la figure II-11.c engendre, dans la zone de recouvrement, un double maillage, d'où le nom de méthode "Overlapping". Cette construction, conduit à des inconnues réelles et fictives.

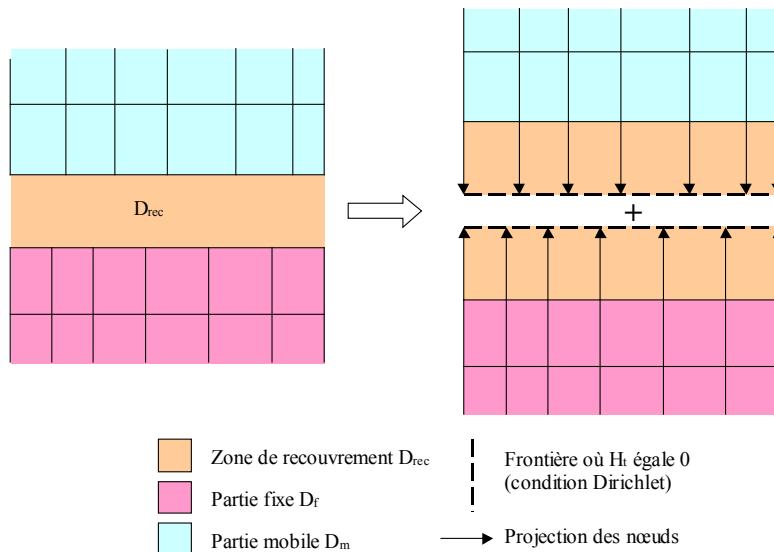


Fig. II-11.a

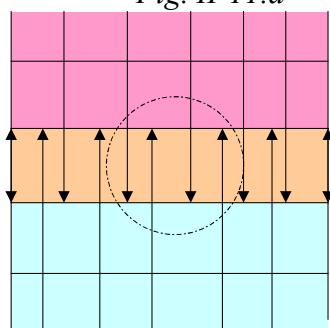
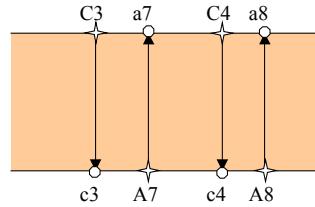


Fig. II-11.b



- ★ L'inconnue réelle
- L'inconnue fictive avec la condition Dirichlet

Fig. II-11.c

Figure II-11 Principe de la méthode "Overlapping"

La difficulté de cette méthode réside dans la construction des matrices élémentaires qui doivent être intégrées sur une partie des éléments. Prenons l'expression des termes élémentaires du système (I-29) compte tenu de (I-26) nous avons [47]:

$$S_{ij} = \int_e \frac{1}{\mu} \mathbf{grad}w_{ni} \cdot \mathbf{grad}w_{nj} d\tau \quad (II-31)$$

où w_{ni} et w_{nj} représentent les fonctions nodales de base pour les inconnues i et j.

Si l'on considère les termes S_{ij} relatifs à des inconnues du domaine fixe par exemple: S_{C3C3} , S_{C3C4} , S_{C4C4} , S_{C4B4} (cf figure II-12) ou bien des termes du domaine mobile S_{A7A7} , S_{A7A8} , S_{A8A8} l'intégration ne pose aucune difficulté. Elle sera faite, par exemple, en utilisant la méthode d'intégration de Gauss.

En revanche, pour calculer les termes croisés entre les inconnues fixes et mobiles, (S_{C3A7} , S_{C4A7}, \dots), le domaine d'intégration (noté $D_{int.}$) est changé, nous avons donc dû adapter la méthode d'intégration.

Prenons le cas du terme élémentaire S_{C4A7} , son expression est donnée par la relation:

$$S_{C4A7} = \int_{D_{int.}} \frac{1}{\mu} \mathbf{grad}w_{nC4} \cdot \mathbf{grad}w_{nA7} d\tau \quad (II-32)$$

Le domaine d'intégration sera limité dans ce cas à la zone où les deux fonctions de base sont communément non nulles. Cette zone correspond à la partie striée sur la figure II-12 soit: $D_{int.} = E_{C3c3A7a7} \cup E_{a7A7c4C4} \cup E_{C4c4A8a8}$. On notera que les trois éléments "E" $E_{C3c3A7a7}$, $E_{a7A7c4C4}$, $E_{C4c4A8a8}$ sont, bien entendu, des éléments fictifs.

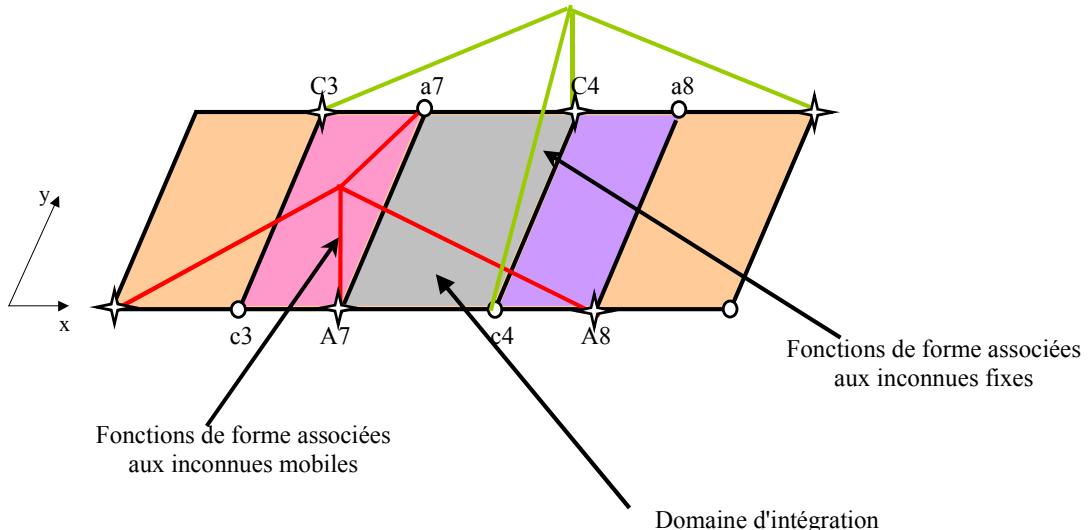


Figure II-12 Influence des fonctions de base et mise en évidence des éléments fictifs

Dans ces conditions, le calcul du terme élémentaire S_{C4A7} (équation (II-32)) sera effectué en trois intégrations soit:

$$S_{C4A7} = \int_{E_{C3c3A7a7}} \frac{1}{\mu} \mathbf{grad}w_{nC4} \cdot \mathbf{grad}w_{nA7} d\tau + \int_{E_{a7A7c4C4}} \frac{1}{\mu} \mathbf{grad}w_{nC4} \cdot \mathbf{grad}w_{nA7} d\tau + \int_{E_{C4c4A8a8}} \frac{1}{\mu} \mathbf{grad}w_{nC4} \cdot \mathbf{grad}w_{nA7} d\tau \quad (II-33)$$

On trouvera, en annexe II, la technique d'intégration de Gauss adaptée aux fonctions de formes de la méthode "Overlapping".

Si on considère maintenant, les machines tournantes, la zone de recouvrement se trouve être circulaire et engendre, comme nous l'avons vu pour les méthodes d'interpolation, une erreur lors de l'élaboration des éléments. A titre d'exemple nous avons représenté sur la figure II-13.a, la zone de recouvrement avec les nœuds réels et fictifs et deux éléments fictifs. En raisons de la forme circulaire, les éléments fictifs E₁₂₃₄ et E₅₈₆₇ se superposent avec un angle d'inclinaison. On voit donc apparaître l'erreur de discréétisation lors du calcul des termes de la matrice élémentaire sur l'élément de recouvrement E₅₂₆₄. Afin de diminuer cette erreur l'intégration sur cet élément "E₅₂₆₄" est effectuée deux fois. Comme le montre la figure II-13.b, on considère l'élément E₁₂₃₄ comme élément référence et, on calcule l'intégration (équation II-33) sur E₅₂₆₄ à partir de la contribution de fonctions de base aux nœuds "1, 2, 6, 7". Puis, on considère l'élément E₅₈₆₇ comme élément de référence, et on calcule l'intégration sur E₅₂₆₄ à partir de la contribution des fonctions de base aux même nœuds "1, 2, 6, 7". Enfin, on effectue une moyenne arithmétique.

En fait, dans la pratique, on calcule l'intégrale sur l'élément de recouvrement à partir de l'élément fictif E₁₂₃₄ puis, à partir de l'élément E₅₈₆₇. La valeur retenue correspond à la moyenne des deux intégrales calculées [25].

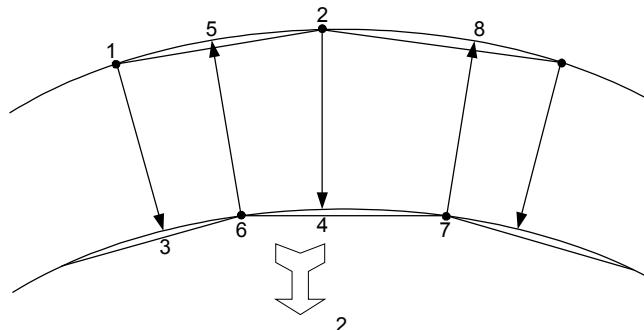


Fig. II-13 a

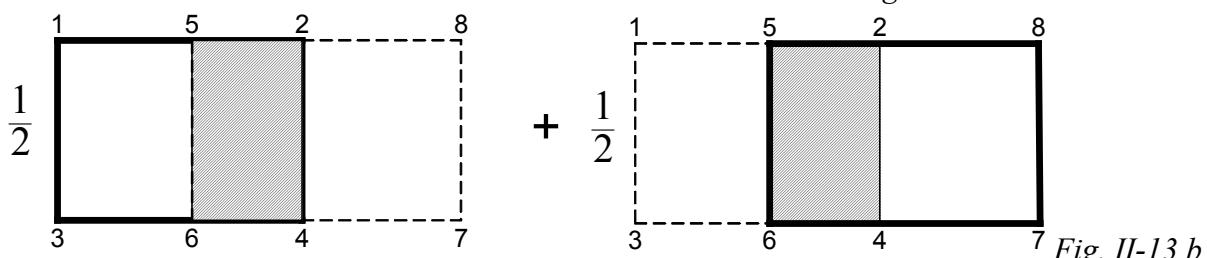


Fig. II-13 b

Figure II-13 Méthode "Overlapping" phénomène de recouvrement

On verra, dans la suite de l'étude, que les résultats de simulation avec cette méthode sont tout à fait satisfaisants. *A priori*, avec la méthode "Overlapping", il est possible de recoller deux maillages quelconques. Mais, la difficulté réside dans l'intégration sur l'élément fictif qui peut présenter une géométrie complexe. Dans cette étude, nous nous limiterons à des maillages réguliers.

II.2.3 Conclusion

Nous avons ci-dessus, présenté sept méthodes de prise en compte du mouvement applicable aux machines électriques. Certaines comme la méthode du pas bloqué et la bande de mouvement, sont couramment utilisées et sont développées depuis près de 20 ans. En revanche, la méthode Mortar est apparue beaucoup récemment [45].

Une analyse plus approfondie des méthodes d'interpolation (1^{er} et 2^{ème}) et de la méthode Mortar pourrait amener à considérer cette dernière comme une méthode d'approximation reliant l'ensemble des inconnues mobiles aux inconnues fixes.

D'un point de vue numérique, avec la méthode Mortar on introduit des "sous matrices pleines" qui relient des nœuds fixes (voir Annexe I). Ces matrices, augmentent donc d'autant les dimensions de la matrice de raideur.

II.3 Application des méthodes

Dans ce paragraphe nous allons tester et comparer les méthodes de prise en compte du mouvement. Cette étude sera faite sur deux exemples. Le premier concerne un cas test extrêmement simple ayant des conditions de calcul en 2D mais étudier en 3D. L'objectif est d'analyser, le comportement des différentes méthodes retenues, sur des grandeurs locales (\mathbf{B}_n et \mathbf{H}_t) à l'interface entre une partie fixe et une partie mobile. Le deuxième exemple est une machine synchrone à aimants permanents pour laquelle on calculera la force électromotrice et le couple électromagnétique.

Dans ce mémoire, les courbes relatives aux grandeurs calculées par la méthode des éléments finis seront tracées avec un logiciel utilisant une interpolation de type "spline cubique". Dans la suite, on verra que ce choix a peu d'influence sur l'allure des courbes lorsque le nombre de points est relativement important. En revanche, en présence d'un nombre de points limité (cas du couple de détente de la machine à aimants permanents) il permet d'obtenir une allure de courbe plus physique.

II.3.1 Etude des grandeurs locales

Comme nous l'avons indiqué dès le premier chapitre, la condition de transmission entre deux milieux ayant des propriétés magnétiques différentes, sont la conservation de la composante normale de \mathbf{B} et de la composante tangentielle de \mathbf{H} . Dans le domaine discret, en fonction de la formulation utilisée, on conserve au sens fort l'une de ces deux composantes. L'exemple que nous allons traiter, va permettre de quantifier ces propriétés.

Les calculs seront effectués avec un maillage 3D (en 2D extrudé) et des conditions aux limites qui ramène le problème à un cas 2D.

Pour tester la qualité des différentes méthodes de prise en compte du mouvement, nous considérerons un système simple en mouvement. C'est un cube de fer placé dans l'air et soumis à un champ magnétique créé par deux aimants permanents. La structure étudiée est représentée sur la figure II-14 et les dimensions sont reportées dans le tableau II-1.

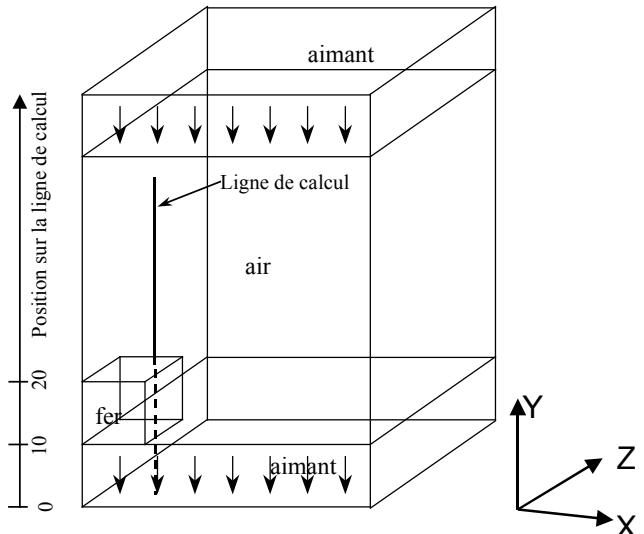


Figure II-14: Système étudié

Dimensions
Cube de fer de longueur : 10 mm
Perméabilité du fer : $\mu_r=1000$

Cube d'air de longeur: 50 mm

Aimant longueur: 50 mm
largeur: 50 mm
hauteur: 10 mm
Aimantation $B_y = -0.38T$

Tableau II-1 Caractéristiques du système

On peut remarquer, sur la figure II-14, la position du cube de fer et des aimants permanents qui créent une excitation magnétique orientée suivant l'axe y. De plus, des conditions de périodicité sont imposées sur les surfaces latérales dans le plan (y0z).

Sur la figure II-15 nous avons représenté le maillage suivant le plan x0y. Il est parfaitement régulier et composé de 85000 éléments hexaédriques. Sur cette figure, on indique les parties fixe et mobile ainsi que la surface de glissement qui se situe dans le plan x0z juste au-dessus du cube de fer. Pour les méthodes de recollement volumique, on utilisera la couche d'éléments située au dessus de la surface de glissement. On trouvera également la ligne d'observation des champs \mathbf{H} et \mathbf{B} (ligne de calcul sur la figure). Il est à noter que la zone la plus intéressante à observer se situe à l'interface entre le cube de fer et l'air dans la région où a lieu le mouvement.

Le système étudié ainsi défini, on notera que quelque soit la position de la partie mobile, la distribution du champ sur la ligne de calcul est inchangée.

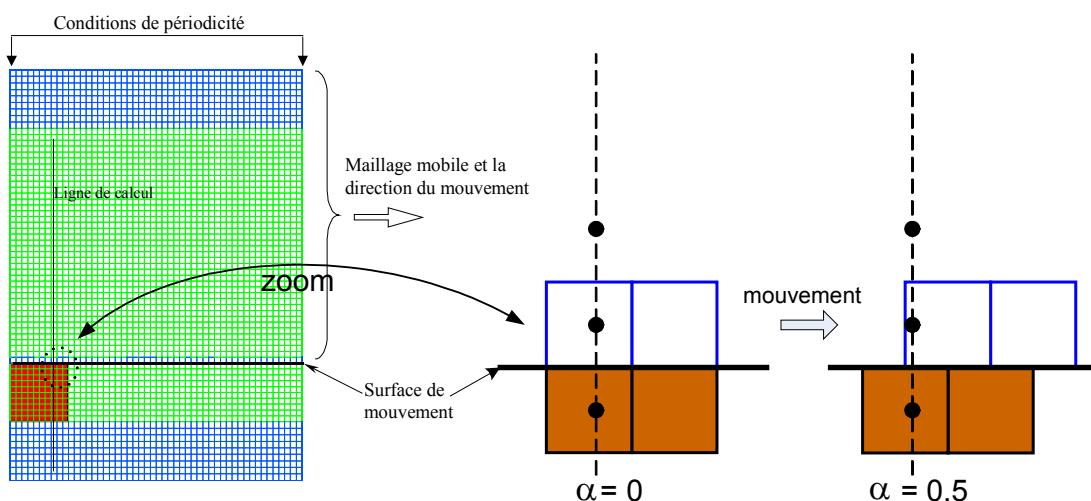


Figure II-15: Maillage du domaine d'étude

Pour la prise en compte du mouvement nous avons vu, dans le paragraphe précédent, qu'il était possible de distinguer deux familles. La première famille, avec la méthode du pas

bloqué, d'interpolation (1^{er} ordre, 2^{ème} ordre et de surface) et Mortar, nécessite une surface de glissement. La seconde famille qui s'appuie une couche d'éléments concerne la bande de mouvement et la méthode "Overlapping".

Pour la position initiale, la figure II-16 montre la distribution de l'induction magnétique, obtenue avec la formulation en potentiel scalaire, dans le plan x0y. On observe, sur cette figure un résultat classique. En fait, au voisinage de l'interface fer-air suivant le plan x0z, l'induction magnétique est orientée vers le cube de fer.

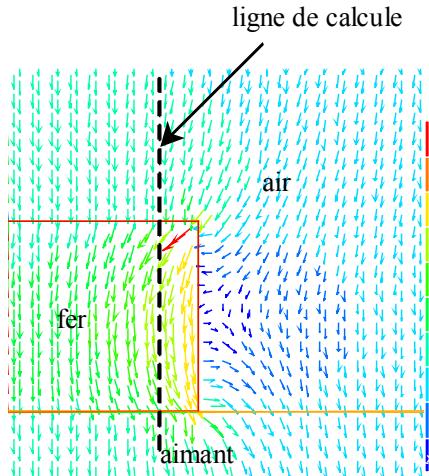


Figure II-16: Distribution de l'induction magnétique dans une section 2D

On s'intéresse maintenant au comportement de la composante tangentielle du champ magnétique H_x et de la composante normale de l'induction B_y à l'interface entre les deux milieux. Nous allons donc tracer l'évolution de ces deux composantes le long de la ligne de calcul.

Dans le cas de la formulation en potentiel scalaire et en potentiel vecteur, nous avons représenté, sur la figure II-17, l'évolution des composantes B_y et H_x en absence de mouvement, le long de la ligne de calcul.

On peut noter sur cette figure que les deux formulations conduisent à des résultats sensiblement équivalents.

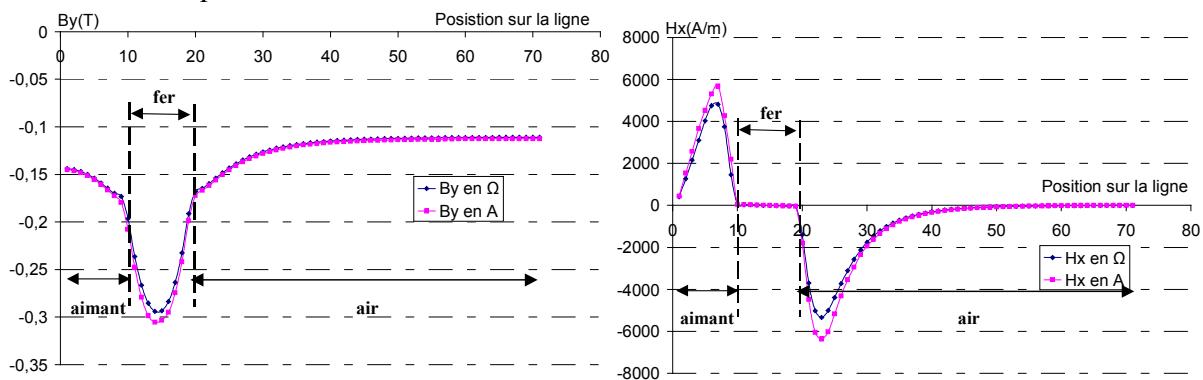


Figure II-17: Continuité de B_y et H_x entre deux milieux

L'ensemble des méthodes, ayant été développé avec la formulation en potentiel scalaire, nous nous limiterons, pour cet exemple, à cette formulation.

Afin d'effectuer la comparaison, nous avons tracé l'évolution de B_y et H_x après un déplacement égal à la moitié du pas du maillage (soit $\alpha=0,5$). On rappelle que pour la méthode du pas bloqué le pas de déplacement est imposé et égal au pas du maillage. D'autre

part compte tenu du maillage, qui est parfaitement régulier sur la surface de glissement, la méthode d'interpolation de surface est équivalente à la méthode d'interpolation du 1^{er} ordre. La figure II-18 permet d'effectuer la comparaison pour B_y et H_x . Sur cette figure nous avons également reporté le résultat obtenu pour la position initiale.

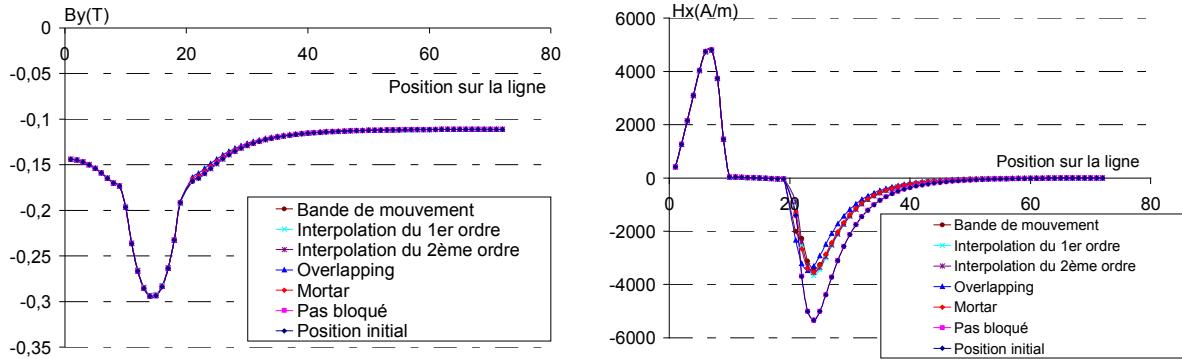


Figure II-18: Allure de B_y et H_x calculé en simulant le mouvement avec les différentes méthodes proposées; $\alpha=1$ pour le pas bloqué et 0,5 pour les autres méthodes

Au niveau des résultats on note qu'à l'interface entre l'air et le fer, les méthodes de prise en compte du mouvement, que nous avons utilisées, vérifient la continuité \mathbf{B}_n et \mathbf{H}_t . En revanche, on constate, après le déplacement, qu'il y a un écart sur l'évolution de \mathbf{H}_t par comparaison à la position initiale. Cet écart peut s'expliquer à partir de la figure II-15. En effet, on peut observer sur cette figure après un déplacement $\alpha=0,5$, que la ligne de calcul est très proche de la frontière entre deux éléments ce qui peut fausser les résultats. En outre, nous avons effectué une série de calculs avec $\alpha=0,33$. On observe alors que les résultats obtenus se trouvent entre la courbe $\alpha=0$ et $\alpha=0,5$ ce qui peut expliquer l'écart. Enfin, on note qu'à l'exception du pas bloqué, qui reste la référence, l'ensemble des méthodes proposées conduisent au même résultat.

Après notre étude sur les grandeurs locales nous allons, dans la suite, étudier et comparer deux grandeurs globales extrêmement sensibles à la qualité du maillage, la force électromotrice et le couple électromagnétique.

II.3.2 Modélisation d'une machine à aimants permanents

Nous allons maintenant appliquer les méthodes de prise en compte du mouvement pour modéliser une machine synchrone à aimants permanents. Après avoir présenté la structure et le maillage nous étudierons les grandeurs globales: le flux, la force électromotrice et le couple électromagnétique. L'étude de la machine sera faite avec les modèles 3D mais, sans tenir compte des effets d'extrémité. En fait cela revient à une étude en 2D. A partir des résultats obtenus nous pourrons qualifier les différentes méthodes de prise en compte du mouvement.

II.3.2.1 Machine étudiée

La structure que nous avons modélisée est une machine synchrone à aimants permanents. Compte tenu de sa géométrie, 18 encoches et 2 paires de pôles, nous avons réduit le domaine d'étude, comme le montre la figure II-19.a, à $\frac{1}{4}$ de la machine en 3D ($\frac{1}{2}$ dans le plan radial et $\frac{1}{2}$ dans le plan transversal). Une section dans le plan 2D, est reproduite sur la figure II-19.b et on trouvera, figure II-19.c les conditions aux limites sur la frontière du

domaine. Les dimensions et les caractéristiques de la machine sont précisées dans le tableau II-2

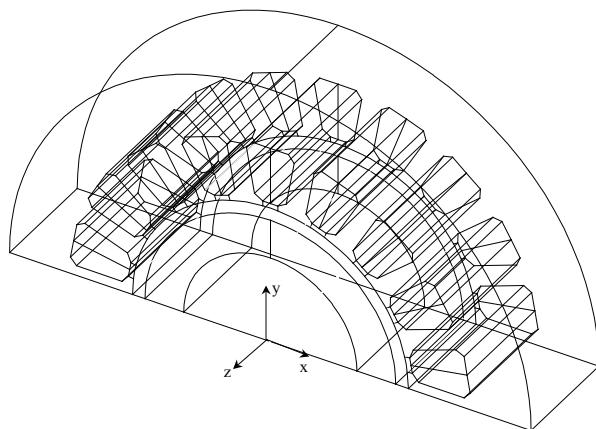


Fig. II-19.a

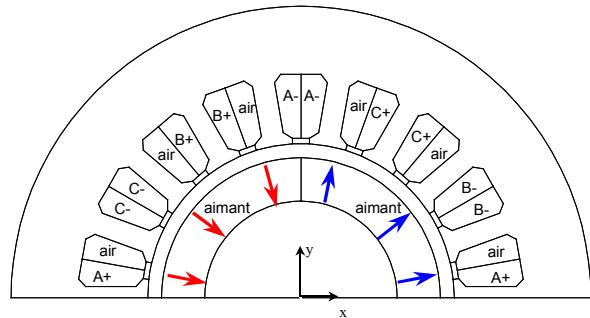


Fig. II-19.b

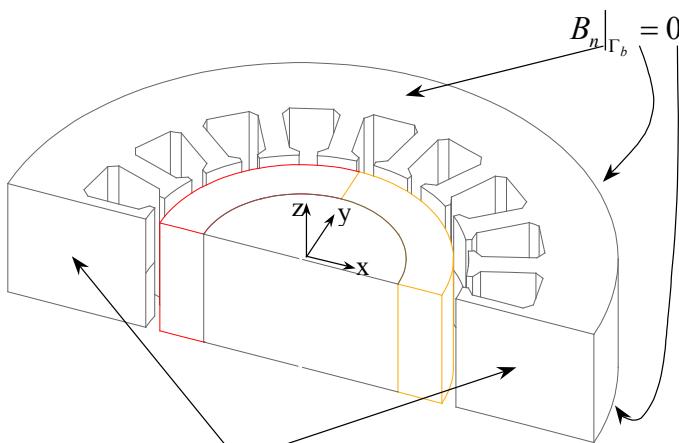


Fig. II-19.c

Figure II-19 Structure de la machine étudiée

| Dimensions (mm) | | Caractéristiques du Fer | |
|------------------------|------|-------------------------|------------------|
| Rayon rotor | 6,9 | Linéaire | $\mu_r = 3480$ |
| Rayon intérieur stator | 11,0 | Périodicité | |
| Rayon extérieur stator | 20,8 | Nombre de pôles | $2p = 4$ |
| Largeur entrefer | 1,0 | Système périodique | $p_{ang.} = \pi$ |
| Longueur de la machine | 18,0 | | |
| Epaisseur aimant | 3,1 | | |

Tableau II-2 Dimensions et caractéristiques de la machine

II.3.2.2 Présentation des maillages

Afin d'étudier cette machine, nous avons créé deux maillages. Le premier, noté M_1 est construit à partir de quatre couches identiques d'éléments prismatiques, suivant la direction axiale ($0z$). Dans l'entrefer, entre la partie fixe et la partie mobile, nous avons placé, suivant la direction radiale deux couches d'éléments. La première couche, maillé régulièrement sert à simuler le mouvement. La seconde couche d'éléments sera utilisée pour calculer le couple électromagnétique. Les deux surfaces, situées dans le plan $x0z$, voir figure II-19.c, sont maillées de façon identique et servent à imposer les conditions de périodicité. Sur les surfaces latérales de la machine, dans le plan $x0y$, des conditions de type $\mathbf{B}_n=0$ sont imposées.

Le second maillage, noté M_2 a été construit pour simuler le mouvement avec la méthode d'interpolation de surface. Il est constitué de tétraèdres. Comme pour M_1 , il y a deux couches d'éléments dans l'entrefer, une pour simuler le mouvement et l'autre pour calculer le couple. Les deux couches d'éléments sont maillées sans contrainte particulière. Les conditions aux limites sur les surfaces extérieures de la machine sont les mêmes que celles imposées pour le maillage M_1 .

Les propriétés de ces deux maillages sont reportées dans le tableau II-3

| | Type d'éléments | Nombre des nœuds | Nombre des éléments | Pas de discréétisation de l'entrefer: |
|-------|-----------------|------------------|---------------------|---------------------------------------|
| M_1 | prismes | 15635 | 24552 | $\Delta\theta_{mail} = \pi/108$ |
| M_2 | tétraèdres | 20201 | 99378 | $\Delta\theta_{mail} \approx \pi/108$ |

Tableau II-3 Propriétés des maillages M_1 et M_2

A titre d'illustration, nous avons reproduit, sur la figure II-20, un agrandissement au niveau de l'entrefer des maillages M_1 et M_2 . Comme indiqué ci-dessus, le maillage M_1 est parfaitement régulier dans l'entrefer (fig. II-20.a). En revanche, la surface de glissement du maillage M_2 est maillée de façon quelconque (fig. II-20.b)

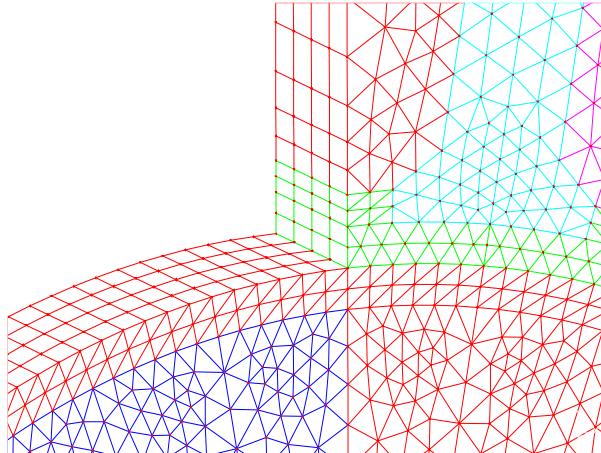


Fig. II-20.a

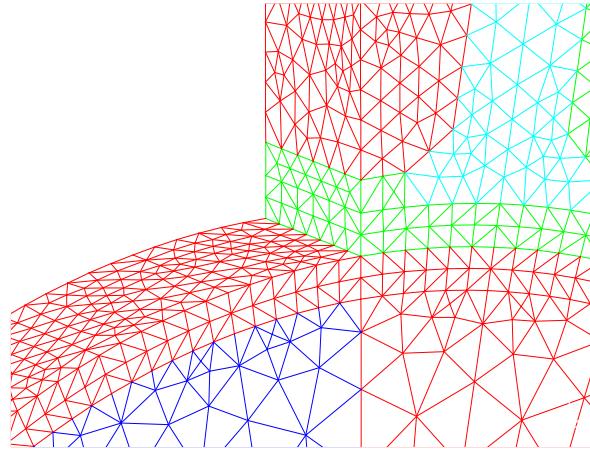


Fig. II-20.b

Figure II-20 Agrandissement des maillages de l'entrefer M_1 (a) et M_2 (b)

On trouvera sur la figure II-21, la distribution du champ magnétique à vide, pour la position initiale, calculée avec le maillage M_1 en utilisant la formulation en potentiel scalaire.

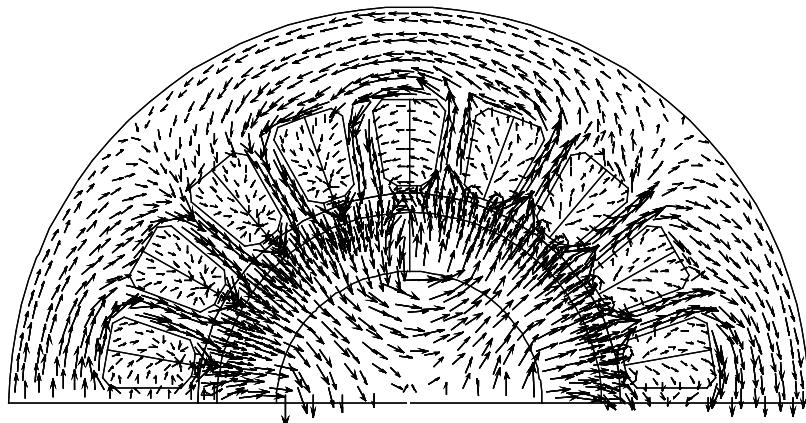


Figure II-21 Distribution du champ magnétique à vide dans une section transversale de la machine

Lorsqu'on utilise la méthode des éléments finis, la densité du maillage joue un rôle très important pour la qualité de la solution [15] et surtout pour le calcul du couple de détente [25, 37]. Il faudra donc être prudent lorsque l'on fera la comparaison entre les méthodes utilisant le maillage M_1 et la méthode d'interpolation de surface pour laquelle on aura recours au maillage M_2 .

Afin de qualifier les méthodes de prise en compte du mouvement, nous allons simuler le fonctionnement à vide de la machine à aimants permanents et calculer le flux dans les enroulements, la force électromotrice et le couple de détente. Ces deux dernières grandeurs sont couramment utilisées pour évaluer les méthodes de prise en compte du mouvement car elles sont très sensibles à la qualité du maillage. Compte tenu du fait que la machine est à aimantation radiale et qu'elle fonctionne à vide, le niveau de l'induction magnétique est relativement faible et l'on peut supposer que la machine n'est pas saturée. Dans ces conditions les calculs seront effectués en linéaire. La vitesse de la machine sera toujours imposée et égale à la valeur nominale qui est de 1500tr/mn.

Pour calculer le flux dans les enroulements nous utiliserons les expressions (I-41) et (I-42). La force électromotrice sera obtenue en faisant une dérivation numérique avec la méthode d'Euler implicite. Pour calculer le couple électromagnétique on utilisera la méthode des travaux virtuels [4, 34].

Pour la méthode du pas bloqué, le choix du pas angulaire du mouvement, que l'on note $\Delta\theta_{mvt}$, est égal au pas du maillage $\Delta\theta_{mail}$ ou à un multiple. Dans le cas du maillage M_1 , $\Delta\theta_{mvt}$ sera égal à $\pi/108$ (voir tableau II-4). En revanche, pour les autres méthodes, on prendra le pas du mouvement égale au tiers du pas de maillage soit: $\Delta\theta_{mvt}=\Delta\theta_{mail}/3$ ce qui correspond à $\alpha=1/3$. Ainsi, on se trouvera régulièrement dans des positions où les maillages sont non conformes. Enfin, pour la méthode d'interpolation de surface, le maillage n'est pas régulier de plus, nous prendrons $\Delta\theta_{mvt}=\Delta\theta_{mail}/3$. On trouvera, résumé dans le tableau II-4, pour chacune des méthodes le pas de mouvement ainsi que le pas de discréétisation temporelle correspondant à une vitesse de 1500tr/mn.

| | <i>Maillage</i> | <i>Pas de mouvement</i> | <i>Dicréétisation temporelle</i> |
|--|-----------------|--------------------------------|----------------------------------|
| <i>Méthode du pas bloqué</i> | M_1 | $\Delta\theta_{mvt} = \pi/108$ | $\Delta t = 20ms/108$ |
| <i>Bandé de mouvement</i> | M_1 | $\Delta\theta_{mvt} = \pi/324$ | $\Delta t = 20ms/324$ |
| <i>Interpolation linéaire du 1^{er} et 2^{ème} ordre</i> | M_1 | $\Delta\theta_{mvt} = \pi/324$ | $\Delta t = 20ms/324$ |
| <i>Méthode "Overlapping"</i> | M_1 | $\Delta\theta_{mvt} = \pi/324$ | $\Delta t = 20ms/324$ |
| <i>Méthode Mortar</i> | M_1 | $\Delta\theta_{mvt} = \pi/324$ | $\Delta t = 20ms/324$ |
| <i>Interpolation de surface</i> | M_2 | $\Delta\theta_{mvt} = \pi/324$ | $\Delta t = 20ms/324$ |

Tableau II-4 Récapitulatif des méthodes de prise en compte du mouvement

II.3.2.3 Comparaison des résultats

Flux dans les enroulements de la machine

Le flux a été calculé, à vide, dans les trois enroulements de la machine avec les différentes méthodes de simulation du mouvement en utilisant la formulation en potentiel scalaire. Pour la méthode du pas bloqué et la bande de mouvement les calculs ont également été effectués avec la formulation en potentiel vecteur.

Le flux dans les enroulements de la machine a été calculé avec l'ensemble des méthodes proposées. Nous avons reproduit, sur la figure II-22, les résultats obtenus sur une période électrique. On peut ainsi remarquer que ces résultats sont sensiblement équivalents à l'échelle d'une période. Afin d'affiner et d'analyser la comparaison nous avons effectué un agrandissement des courbes au voisinage de la valeur maximale.

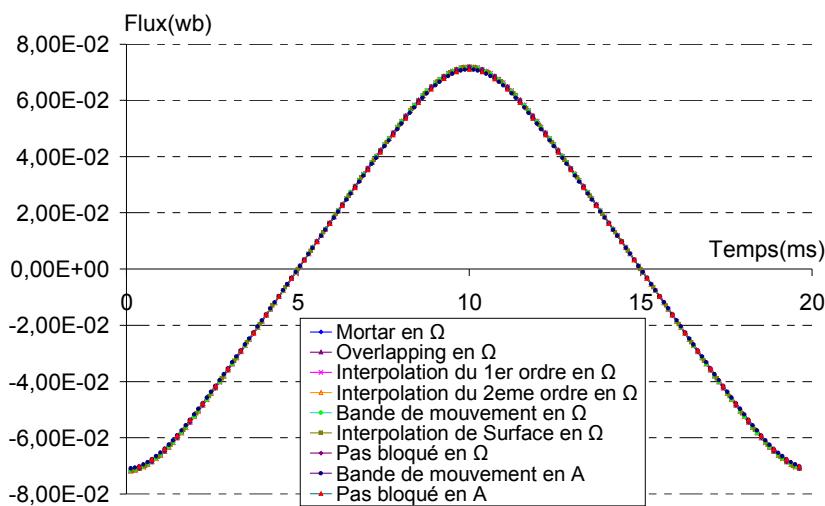


Figure II-22 Comparaison de toutes les méthodes pour l'évolution du flux sur une période

Sur la figure II-23, nous comparons les deux méthodes les plus couramment utilisées, pas bloqué et bande de mouvement, avec les formulations en potentiel scalaire et vecteur. Sur

dans cette figure, l'agrandissement met en évidence le résultat bien connu, à savoir que les deux formulations (\mathbf{A} et Ω) conduisent à deux solutions numériques bien distinctes. En revanche, au niveau des méthodes de simulation du mouvement, pour une formulation donnée, l'allure des flux obtenus semble équivalente

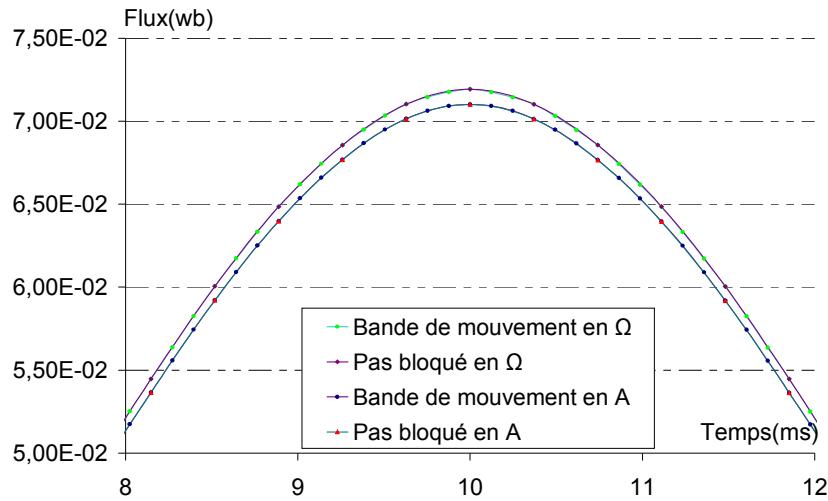


Figure II-23 Agrandissement de l'allure du flux au voisinage du maximum; comparaison de la méthode du pas bloqué et de la bande de mouvement

Les méthodes basées sur une surface de glissement (pas bloqué, 1^{er} et 2^{ème} ordre, interpolation de surface et Mortar) sont comparées sur la figure II-24. Comme dans le cas précédent, les résultats obtenus sont tout à fait équivalents. Enfin, nous comparons sur la figure II-25 les méthodes utilisant un recollement volumique avec la méthode du pas bloqué. Là encore, les résultats présentés sont équivalents.

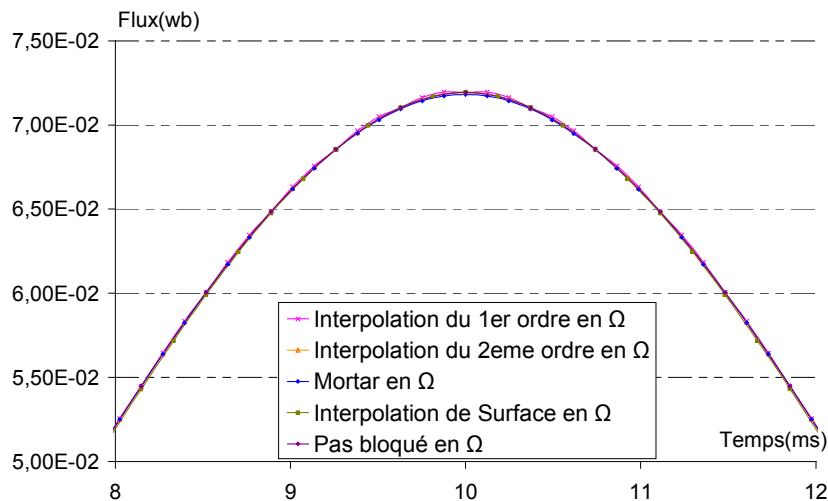


Figure II-24 Agrandissement de l'allure du flux au voisinage du maximum; comparaison des méthodes basées sur une surface de glissement

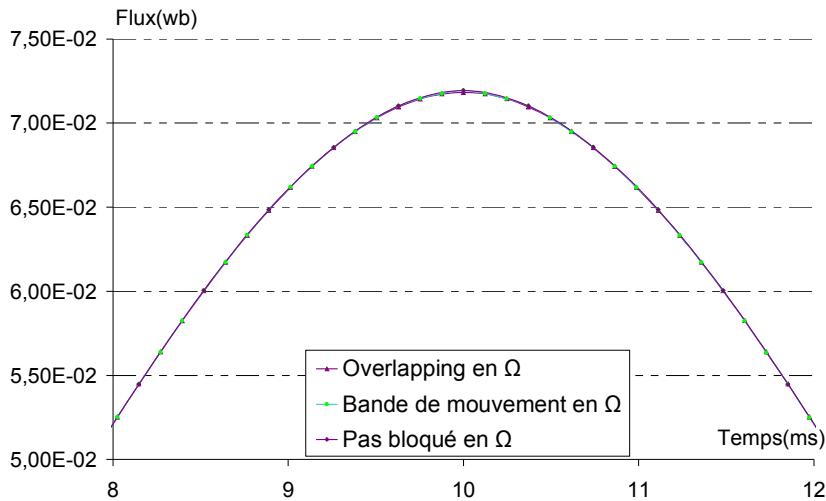


Figure II-25 Agrandissement de l'allure du flux au voisinage du maximum; comparaison des méthodes basées sur un recollement surfacique avec la méthode du pas bloqué

Forces électromotrices aux bornes des enroulements de la machine

Pour comparer les forces électromotrices on prend comme courbe de référence celles obtenues par la méthode du pas bloqué tant pour la formulation en Ω que pour la formulation en A . Avec cette méthode les résultats sont, pour un maillage donné, supposés corrects. A titre indicatif, nous présentons, sur la figure II-26, l'évolution de la force électromotrice d'une phase, sur une période électrique, obtenue avec les méthodes étudiées. On peut observer, sur cette figure, qu'à l'échelle d'une période les résultats sont sensiblement équivalents. Cependant, afin d'affiner notre analyse nous allons effectuer une comparaison plus fine.

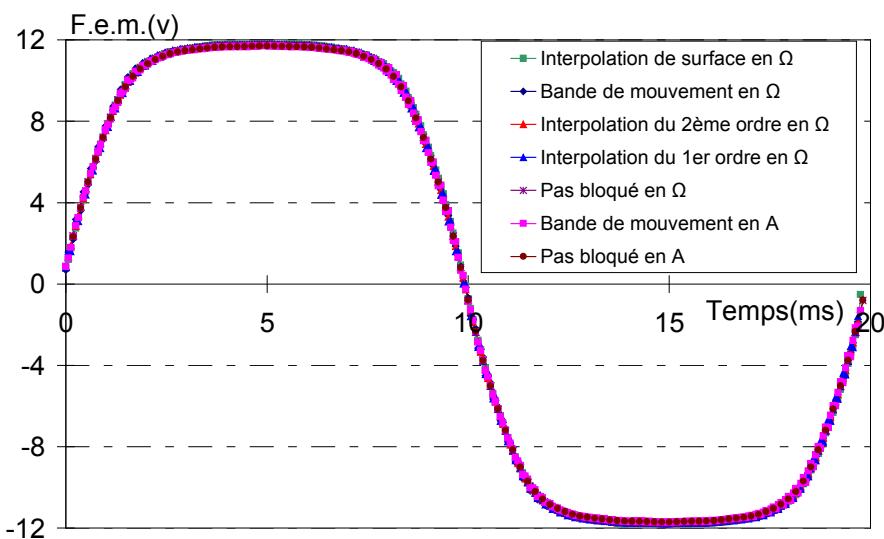


Figure II-26 Evolution sur une période de la force électromotrice de la machine à aimants permanents; comparaison de l'ensemble des résultats

Nous avons tout d'abord comparé la bande de mouvement et la méthode du pas bloqué. Les résultats obtenus, pour la forme d'onde sur une $\frac{1}{2}$ période et un agrandissement au voisinage de la valeur maximale, sont reproduits sur les figures II-27 et II-28 pour respectivement la formulation scalaire et vectorielle. Sur ces figures on retrouve, tout d'abord, la différence d'amplitude entre les formulations Ω et A (plus de 11,77v pour Ω à comparer

avec 11,71v pour la formulation en \mathbf{A}). De plus, on peut observer que la bande de mouvement introduit des oscillations numériques relativement marquées.

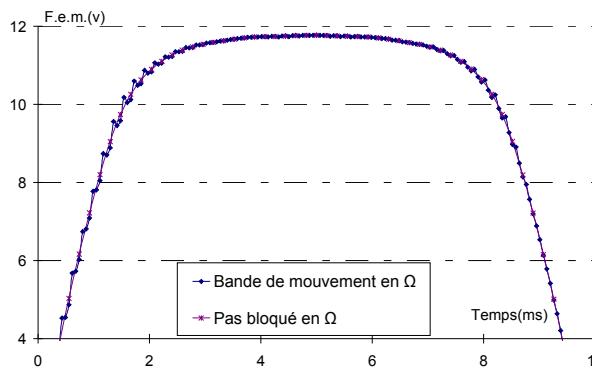


Fig. II-27.a

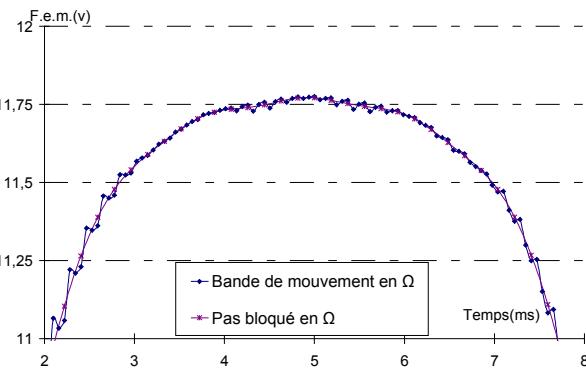


Fig. II-27.b

Figure II-27: Comparaison de la force électromotrice; méthode du pas bloqué et bande de mouvement; formulation en Ω ; agrandissement sur une $\frac{1}{2}$ période et au voisinage de la valeur maximale

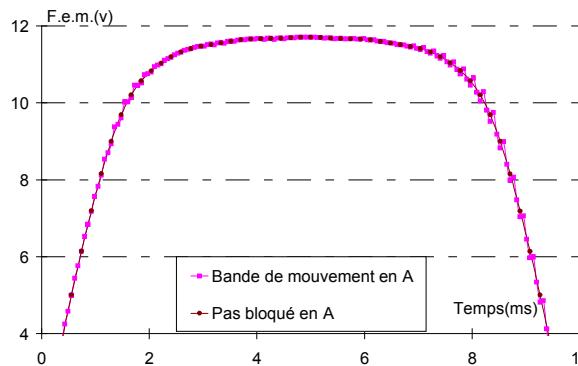


Fig. II-28.a

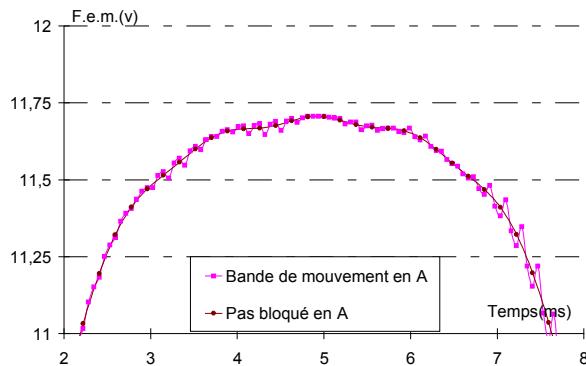


Fig. II-28.b

Figure II-28: Comparaison de la force électromotrice; méthode du pas bloqué et bande de mouvement; formulation en \mathbf{A} ; agrandissement sur une $\frac{1}{2}$ période et au voisinage de la valeur maximale

Nous avons effectué les mêmes comparaisons avec la formulation en Ω , pour les méthodes qui s'appuient sur une surface de glissement: interpolation du 1^{er} ordre, de surface, du 2^{ème} ordre et Mortar. Nous rappelons que nous utilisons le maillage M_1 à l'exception de la méthode d'interpolation de surface pour laquelle nous avons recours au maillage M_2 . Sur la figure II-29 nous comparons, à la méthode du pas bloqué, les méthodes d'interpolation du 1^{er} ordre et de surface. Nous pouvons observer, sur cette figure, que ces deux méthodes introduisent des oscillations numériques.

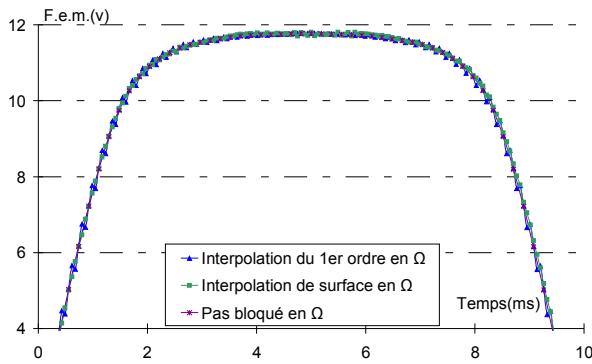


Fig. II-29.a

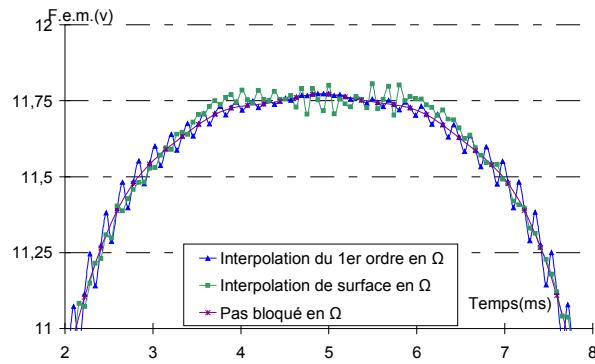


Fig. II-29.b

Figure II-29: Comparaison de la force électromotrice; méthode du pas bloqué et méthodes d'interpolation du 1^{er} ordre et de surface; agrandissement sur une ½ période et au voisinage de la valeur maximale

Sur la figure II-30 nous comparons, toujours à la méthode du pas bloqué la méthode d'interpolation du 2^{ème} ordre et la méthode Mortar. On peut remarquer sur la figure II-30.b, une légère oscillation numérique pour la méthode d'interpolation du 2^{ème} ordre. Cependant, il faut noter que pour la comparaison, l'échelle de la f.e.m. est inférieure à 1% de l'amplitude maximale. A partir de cette figure on peut donc considérer que ces deux méthodes donnent des résultats satisfaisants avec une meilleure approximation pour la méthode Mortar.

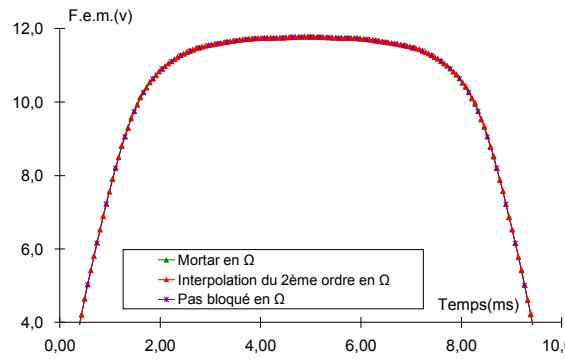


Fig. II-30.a

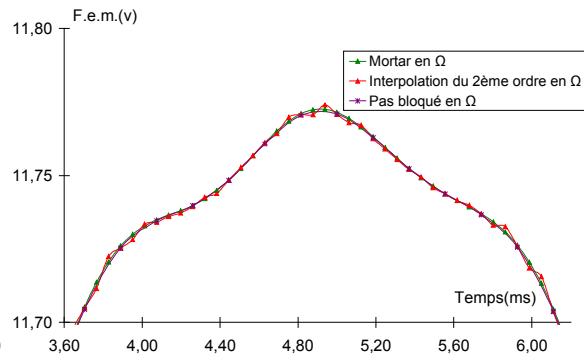


Fig. II-30.b

Figure II-30: Comparaison de la force électromotrice; méthode du pas bloqué et méthodes d'interpolation du 2^{ème} ordre et méthode Mortar; agrandissement sur une ½ période et au voisinage de la valeur maximale

Enfin, nous comparons sur la figure II-31, la méthode du pas bloqué avec la méthode "Overlapping" et également avec la méthode Mortar, puisque cette dernière donne d'excellents résultats. Sur la figure II-31.b, on peut observer les trois courbes avec un agrandissement relativement important puisque l'échelle de représentation est ramenée à une valeur inférieure à 4% de la valeur maximale de la f.e.m.. De cette figure, nous pouvons conclure que les méthodes "Overlapping" et Mortar donnent d'excellents résultats.

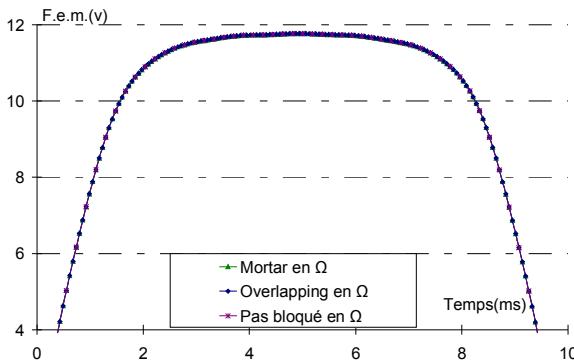


Fig. II-31.a

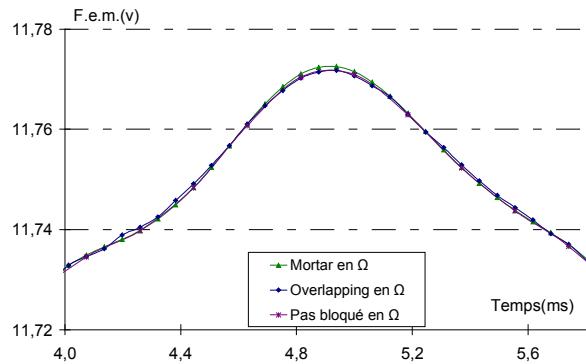


Fig. II-31.b

Figure II-31: Comparaison de la force électromotrice; méthode du pas bloqué et méthodes et "Overlapping" et Mortar; agrandissement sur une $\frac{1}{2}$ période et au voisinage de la valeur maximale

Couple de détente

Après avoir calculé et analysé le flux et la force électromotrice de la machine nous allons maintenant étudier le couple de détente. Cette grandeur est délicate à calculer car en fait la valeur est relativement faible et dépend fortement de la qualité de la solution au niveau de l'entrefer et donc du maillage. C'est donc, comme la force électromotrice un excellent critère pour comparer les différentes méthodes de prise en compte du mouvement.

Comme la machine a deux paires de pôles et dix huit encoches, la période du couple de détente est égale à $\pi/18$. Compte tenu des propriétés des maillages utilisés, le nombre de points sur une période du couple est égal à 6 pour la méthode du pas bloqué et à 19 pour les autres méthodes. Pour la méthode du pas bloqué le nombre de points peut paraître insuffisant. Néanmoins, nous conserverons cette méthode comme référence pour la comparaison du couple.

Comme indiqué précédemment, les courbes sont tracées avec un logiciel qui effectue une interpolation de type "spline cubique" ce qui explique l'allure du couple pour un nombre de points relativement faible.

Sur la figure II-32, nous comparons le couple de détente calculé avec la méthode du pas bloqué et la bande de mouvement pour la formulation en Ω et en A . A partir de cette figure nous pouvons faire deux constatations. La première concerne l'amplitude du couple qui est plus importante avec la formulation en potentiel vecteur. On retrouve les résultats sur les solutions complémentaires des deux formulations considérées. La seconde est relative aux oscillations numériques introduites par la méthode de la bande de mouvement.

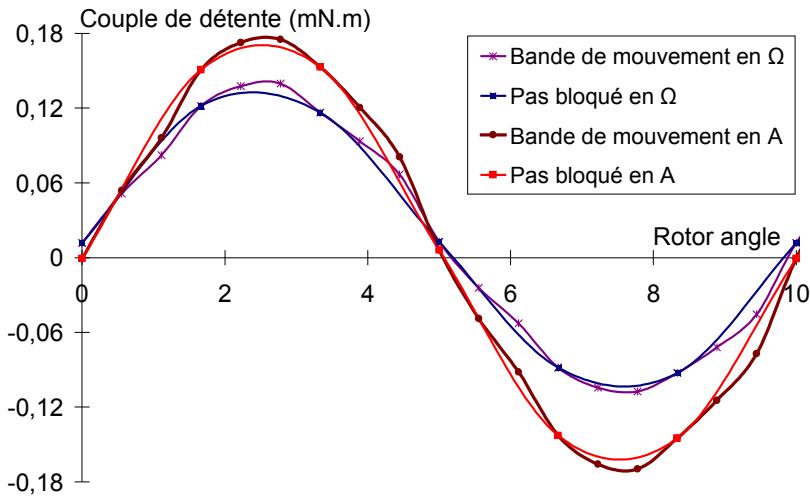


Figure II-32: Allure du couple de détente; comparaison de la méthode du pas bloqué et de la bande de mouvement dans le cas de la formulation en Ω et en A .

Pour la formulation en potentiel scalaire sur la figure II-33, nous comparons l'évolution du couple dans le cas où nous utilisons, pour simuler le mouvement, les méthodes d'interpolation du 1^{er} et du 2^{ème} ordre. Si on compare les figures II-32 et II-33 on observe que les méthodes d'interpolation donnent des résultats bien meilleurs que la bande de mouvement.

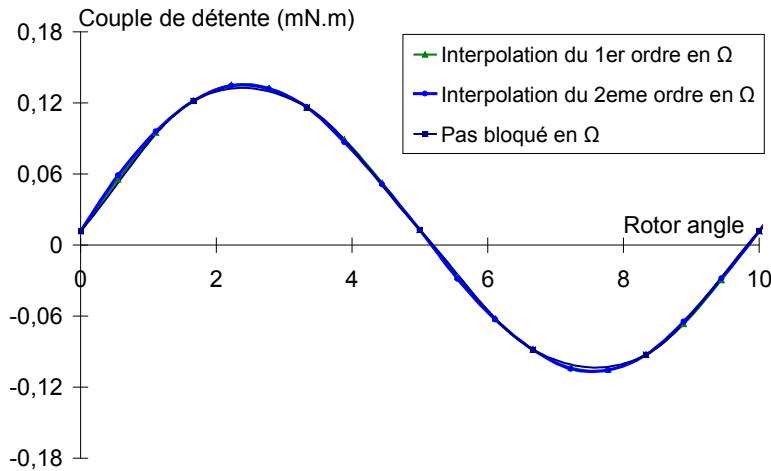


Figure II-33: Allure du couple de détente; comparaison de la méthode du pas bloqué et des méthodes d'interpolation du 1^{er} et du 2^{ème} ordre, dans le cas de la formulation en Ω .

Sur la figure II-34 la comparaison est effectuée entre la méthode du pas bloqué et la méthode d'interpolation de surface. Du fait de la différence des maillages utilisés (M_1 et M_2) deux erreurs se superposent. La première est due à la qualité des maillages et la seconde à la prise en compte du mouvement. Il est à noter cependant que pour la position initiale ($\theta=0$) le maillage M_2 est conforme. Dans ce cas il n'y a pas d'erreur sur la simulation du mouvement. Nous pouvons ainsi, pour cette position, "quantifier" l'erreur sur les maillages. Dans ces conditions, surtout pour une grandeur relativement sensible à la "qualité" du maillage, il est délicat d'extraire des conclusions. On notera cependant une différence de phase et d'amplitude du couple.

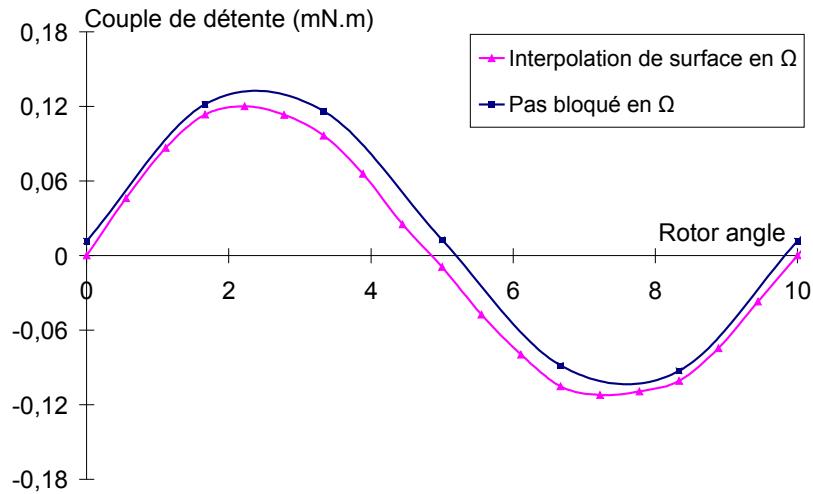


Figure II-34: Allure du couple de détente; comparaison de la méthode du pas bloqué avec la méthode d'interpolation de surface, dans le cas de la formulation en Ω .

Sur la figure II-35, nous présentons la comparaison pour la méthode Mortar. On peut noter que pour cette méthode les résultats obtenus se superposent pratiquement avec ceux de la méthode du pas bloqué. Enfin, nous comparons sur la figure II-36 la méthode "Overlapping" et la méthode du pas bloqué. Comme pour la méthode Mortar, on peut remarquer que les résultats sont en très bonne concordance.

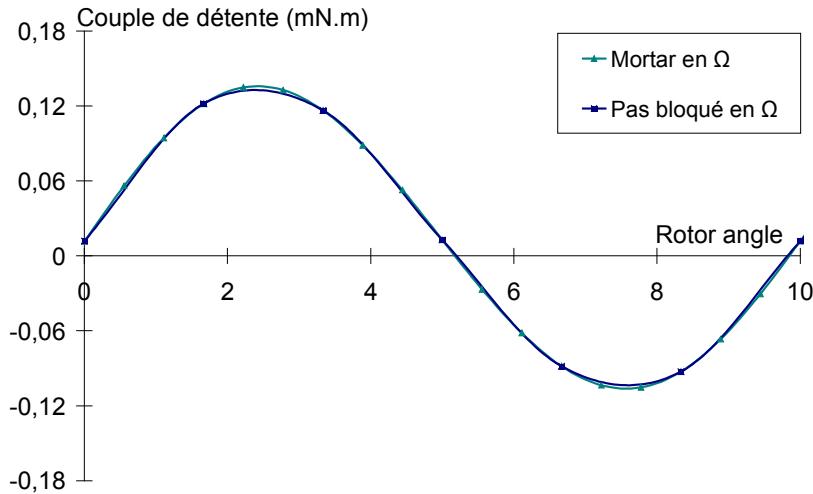


Figure II-35: Allure du couple de détente; comparaison de la méthode du pas bloqué avec la méthode Mortar, dans le cas de la formulation en Ω .

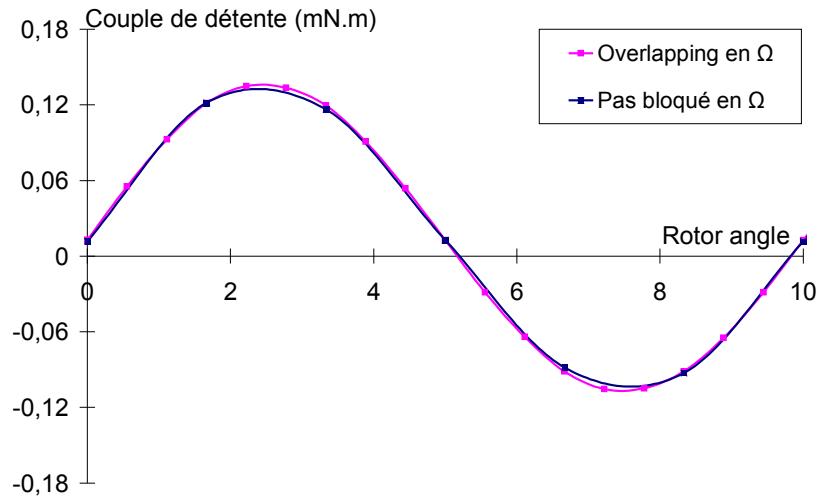


Figure II-36: Allure du couple de détente; comparaison de la méthode du pas bloqué avec la méthode "Overlapping", dans le cas de la formulation en Ω .

Essai en court-circuit

Dans le but de tester les méthodes de simulation du mouvement en présence d'une forte "réaction magnétique d'induit", nous avons étudié l'évolution du courant dans la machine ainsi que le couple électromagnétique dans le cas d'un essai en court-circuit. Pour effectuer cet essai, la machine tourne à la vitesse de 1500tr/min et à l'instant "t=0", qui correspond à la position angulaire " $\theta=0$ ", elle est connectée sur ses trois résistances de bobinage couplées en étoile. Dans ce cas, le problème éléments finis est couplé aux équations de circuit comme nous l'avons développé dans le chapitre I.

On trouvera, sur la figure II-37, l'évolution du courant dans une phase de la machine, obtenue en simulant la rotation avec les neuf approches proposées (sept en formulation Ω et deux en formulation A). Au vu des résultats présentés sur cette figure, on peut supposer que les approches proposées sont sensiblement équivalentes.

Comme nous l'avons fait précédemment, nous allons effectuer un agrandissement des courbes au voisinage de la valeur maximale du courant ($t=15\text{ms}$). Pour comparer les formes d'onde, nous prenons toujours la méthode du pas bloqué comme référence. Cependant, on notera que les résultats que nous avons obtenus pour les essais à vide montrent que la méthode Mortar et la méthode "Overlapping" fournissent une solution pratiquement équivalente que l'on pourrait prendre comme référence.

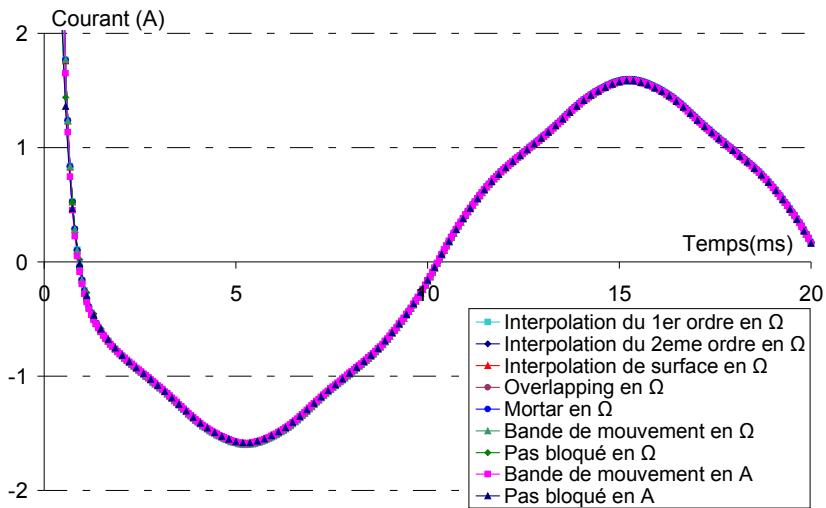


Figure II-37: Essai en court-circuit: Allure du courant dans une phase; comparaison des différentes méthodes proposées pour la simulation du mouvement.

Sur la figure II-38 nous pouvons observer l'évolution du courant dans le cas de la méthode du pas bloqué et de la méthode de la bande de mouvement pour les deux formulations en potentiel (Ω et A). A ce stade de l'étude, on retrouve les résultats des essais précédents concernant les oscillations numériques et l'écart entre les deux formulations.

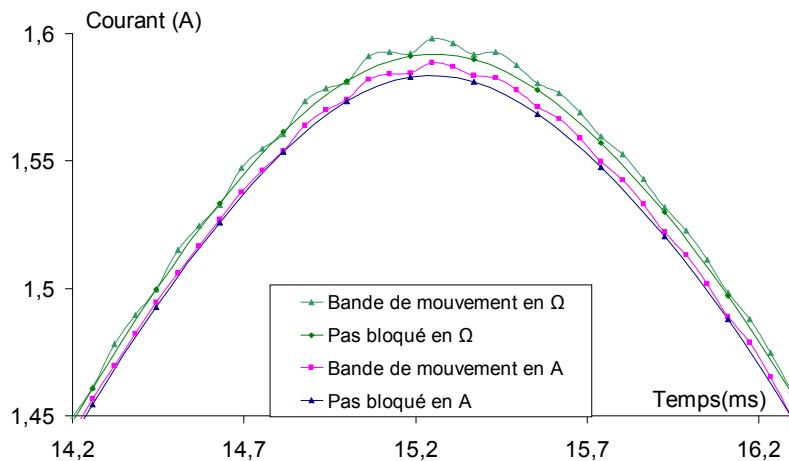


Figure II-38: Essai en court-circuit; agrandissement de l'allure du courant dans une phase; comparaison la méthode du pas bloqué et de la bande de mouvement (formulation en Ω et en A)

On compare, sur la figure II-39, la méthode du pas bloqué avec la méthode d'interpolation du 1^{er} et du 2^{ème} ordre (fig. II-39.a) et avec la méthode d'interpolation de surface (fig. II-39.b). Toujours sur la même figure, on peut observer un écart d'amplitude entre les méthodes d'interpolation ($\approx 0,3\%$) et la méthode du pas bloqué. Outre, de légères oscillations, on retrouve cet écart sur la figure II-39.b lorsque l'on compare la méthode du pas bloqué avec la méthode d'interpolation de surface. On peut rappeler que pour la méthode d'interpolation de surface on utilise le maillage M_2 .

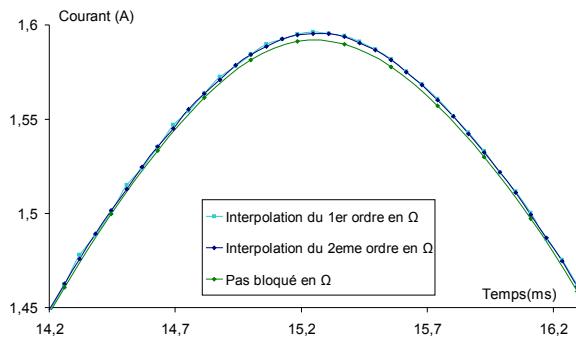


Fig. II-39.a

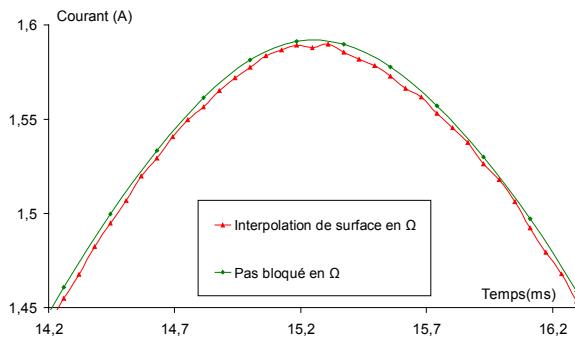


Fig. II-39.b

Figure II-39: Essai en court-circuit; agrandissement de l'allure du courant dans une phase pour comparer la méthode du pas bloqué et la méthode d'interpolation du 1^{er} et du 2^{ème} ordre (fig.II-39.a) et la méthode d'interpolation de surface (fig. II-39.b).

Sur la figure II-40, on compare les méthodes Mortar et "Overlapping" avec la méthode du pas bloqué. Comme pour les méthodes d'interpolation on observe un écart de l'ordre de 0,3% sur les amplitudes.

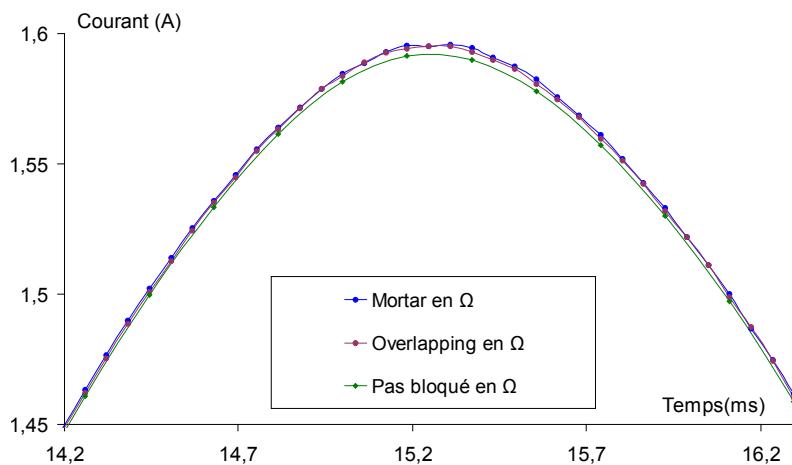


Figure II-40: Essai en court-circuit; agrandissement de l'allure du courant dans une phase pour comparer la méthode du pas bloqué avec la méthode Mortar et la méthode "Overlapping".

Le couple électromagnétique de la machine a été également calculé lors de l'essai en court-circuit. Sur la figure II-41, nous comparons la méthode du pas bloqué et la bande de mouvement pour les formulations en Ω et en \mathbf{A} (fig. II-41.a) et les méthodes d'interpolation du 1^{er} et du 2^{ème} ordre (fig. II-41.b). On observe, comme précédemment, les différences dues aux formulations. En revanche, la forme d'onde du couple électromagnétique est sensiblement identique.

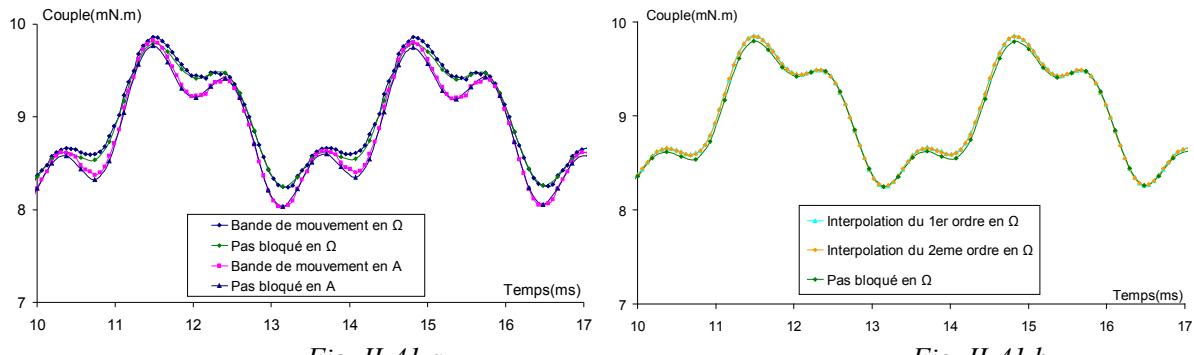


Fig. II-41.a

Fig. II-41.b

Figure II-41: Essai en court-circuit; agrandissement de l'allure du couple pour comparer la méthode du pas bloqué et de la bande de mouvement formulation en Ω et en A (fig. II-41.a) et la méthode d'interpolation du 1^{er} et du 2^{ème} ordre formulation Ω (fig. II-41.b).

Sur la figure II-42, on compare la méthode d'interpolation de surface (fig. II-42.a) et les méthodes Mortar et "Overlapping" (fig. II-42.b). En ce qui concerne la méthode d'interpolation de surface les résultats sont relativement proche de la méthode du pas bloqué. Il en est de même pour les méthodes Mortar et "Overlapping". En revanche, pour ces dernières, il est extrêmement difficile de les comparer. Nous avons donc effectué un agrandissement, reproduit figure II-43. On alors, observe que les résultats sont, pour le couple électromagnétique, pratiquement identiques.

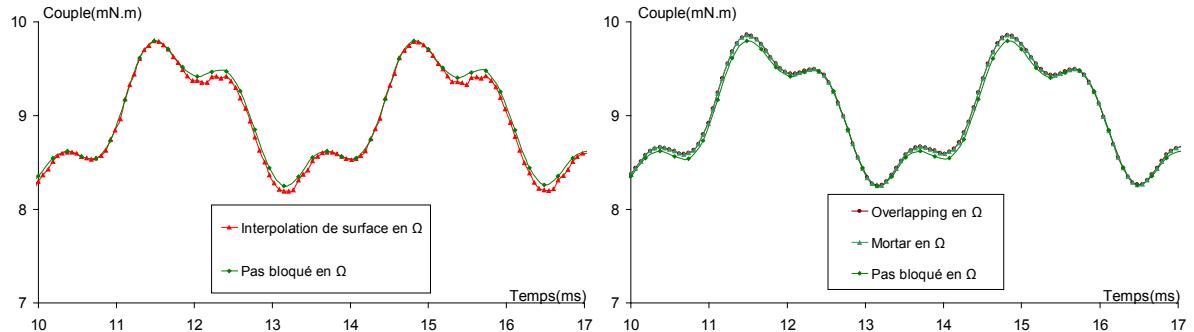


Fig. II-42.a

Fig. II-42.b

Figure II-42: Essai en court-circuit; agrandissement de l'allure du couple pour comparer la méthode du pas bloqué la méthode d'interpolation de surface (fig. II-42.a) et avec la méthode Mortar et la méthode "Overlapping" (fig. II-42.b).

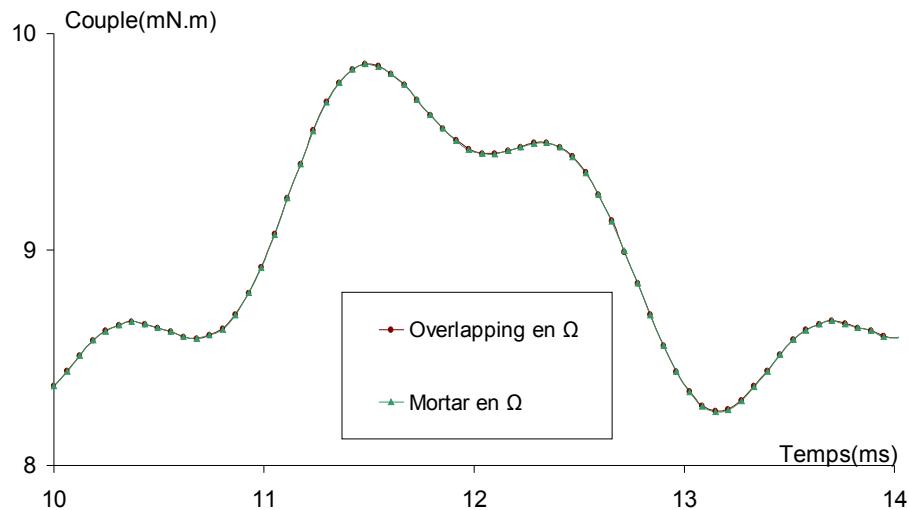


Figure II-43: Essai en court-circuit; agrandissement de l'allure du couple pour comparer les méthodes Mortar et "Overlapping".

II.3.3 Comportement numérique

Une comparaison du comportement numérique des différentes méthodes de prise en compte du mouvement est présentée dans les tableaux II-5 et II-6 pour respectivement, la formulation en potentiel scalaire et vecteur. Le calculateur utilisé est un PC serveur Intel Xeon 2.8 GHz, sous Linux Serveur. Dans ces tableaux nous comparons, pour une résolution, les temps de calcul, le nombre d'itérations du gradient conjugué et le nombre de termes non nuls pour le stockage de la matrice de raideur. On indique également, pour les temps de calcul et le nombre de termes stockés, le rapport en prenant comme base la méthode du pas bloqué. Tous les calculs ont été effectués avec le maillage M_1 à l'exception de la méthode d'interpolation de surface qui utilise le maillage M_2 .

Pour la formulation en potentiel scalaire (tableau II-5), avec la méthode du pas bloqué, la permutation des inconnues est la seule opération ajoutée pour la prise en compte du mouvement. Le temps de calcul est donc le plus faible. En revanche, le remaillage local avec la bande de mouvement et le recollement du maillage pour la méthode d'interpolation du 1^{er} ordre, augmente légèrement les temps de calcul. Pour la méthode d'interpolation du 2^{ème} ordre, en raison d'une connectivité plus importante entre les inconnues fixes, le stockage de la matrice de raideur accroît les temps de calcul. Pour la méthode "Overlapping", on peut remarquer que le temps de calcul est plus faible (rapport 1,31) que pour les méthodes d'interpolation (1^{er} et 2^{ème} ordre) et le stockage est équivalent à celui de la méthode du premier ordre.

Dans le cas de la méthode d'interpolation de surface, la comparaison est plus délicate car on n'utilise pas le même maillage. Cependant, par comparaison à une résolution sans mouvement, on observe une augmentation de la matrice de raideur de l'ordre de 4%.

En ce qui concerne la méthode Mortar, on peut observer que le stockage de la matrice de raideur augmente d'un rapport de 1,56 à cause de la matrice $([C]^{-1}[D])$ qui relie toutes les inconnues fixes appartenant à une ligne d'intégration de la frontière Γ_{f-m} (voir annexe I). Sur le tableau on peut observer que pour cet exemple le temps de résolution est multiplié par 2,21 par rapport à la méthode du pas bloqué.

| Méthodes | Temps CPU | | Nombre du GC | Stockage du système | |
|---|-----------|---------|--------------|---------------------|---------|
| | Temps s | Rapport | | Nbre de termes | Rapport |
| Pas bloqué | 0,86 s | 1,00 | 150 | 46224 | 1,00 |
| Bande de mouvement | 0,97 s | 1,13 | 150 | 46224 | 1,00 |
| Interpolation du 1 ^{er} ordre | 1,18 s | 1,37 | 151 | 47088 | 1,02 |
| Interpolation du 2 ^{ème} ordre | 1,19 s | 1,38 | 151 | 47952 | 1,04 |
| Méthode "Overlapping" | 1,13 s | 1,31 | 151 | 47088 | 1,02 |
| Interpolation de surface M_2 | 2,9 s | — | 220 | 159092 | — |
| Méthode Mortar | 1,9 s | 2,21 | 157 | 71928 | 1,56 |

Tableau II-5 Formulation en potentiel scalaire; comparaison des méthodes

Enfin, pour la formulation en potentiel vecteur les résultats, présentés dans le tableau II-6, montrent que la méthode de la bande de mouvement augmente légèrement le temps de résolution du système.

| Méthodes | Temps de CPU | Nombre de GC | Stockage du système |
|--------------------|--------------|--------------|---------------------|
| Pas bloqué | 1,27 s | 137 | 12096 |
| Bande de mouvement | 1,54 s | 137 | 12096 |

Tableau II-6 Formulation en potentiel vecteur; comparaison des méthodes

II.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié et développé sept méthodes de prise en compte du mouvement. Ces méthodes ont été classées en deux familles.

Pour la première famille, qui utilise une surface de glissement, nous avons mis en œuvre la méthode du pas bloqué, les méthodes d'interpolation du 1^{er}, du 2^{ème} ordre, l'interpolation de surface et la méthode Mortar. Dans le cas de la deuxième famille qui utilise une bande de recouvrement nous avons développé la bande de mouvement et la méthode "Overlapping".

L'ensemble de ces méthodes a été programmé avec la formulation en potentiel scalaire magnétique. En revanche, la formulation en potentiel vecteur a été utilisée uniquement pour la méthode du pas bloqué et la bande de mouvement.

Afin de qualifier les méthodes, nous avons proposé un cas test pour analyser les grandeurs locales à l'interface entre deux milieux. Cela nous a permis d'évaluer la conservation de \mathbf{B}_n et de \mathbf{H}_t non seulement dans une position initiale avec un maillage conforme, mais aussi après un pas du mouvement simulé par les différentes méthodes. Les résultats sont sensiblement équivalents les différentes méthodes proposées.

Ensuite, nous avons simulé, avec les diverses techniques de prise en compte du mouvement, une machine à aimants permanents. Nous avons comparé les grandeurs globales que sont le flux, la force électromotrice et le couple de détente. Au niveau de la f.e.m., nous avons pu mettre en évidence des erreurs numériques. On notera, que parmi l'ensemble des méthodes proposées les méthodes Mortar et "Overlapping" sont les plus performantes. Au niveau du couple de détente, la bande de mouvement dans sa version d'origine, introduit des résultats avec une légère ondulation numérique. En revanche, la méthode d'interpolation de surface donne une courbe avec un écart notable par rapport à la référence. Cependant, il est difficile de quantifier l'erreur due au modèle compte tenu du fait que nous avons utilisé deux maillages distincts.

Enfin, nous avons simulé un court-circuit de la machine à aimants permanents et observé la forme d'onde du courant et du couple électromagnétique. Les résultats montrent que l'ensemble des méthodes conduit à une solution tout à fait acceptable. On peut noter, par comparaison, un écart inférieur à 1% sur le courant et le couple.

Dans le chapitre suivant, nous allons modéliser un turboalternateur avec les méthodes de simulation du mouvement que nous avons implantées dans le code de calcul.

CHAPITRE III MODELISATION D'UN TURBOALTERNATEUR

III.1 Machine étudiée

III.1.1 Dimensions et caractéristiques du turboalternateur

Dans le tableau III-1, nous présentons les dimensions et les caractéristiques de la machine. Il s'agit, d'un turboalternateur d'une puissance de 1485 MW qui tourne à la vitesse de 1500 tr/min. Nous avons normaliser les dimensions par rapport à la largeur de l'entrefer. On peut remarquer que l'entrefer est relativement grand devant le diamètre d'alésage.

| Dimensions | | Caractéristiques générales | |
|--|------------|---|----------|
| <i>Rayon extérieur</i> | 10,15 p.u. | <i>Puissance</i> | 1485 MW |
| <i>Rayon alésage stator</i> | 16,9 p.u. | <i>Facteur de puissance</i> | 0,9 |
| <i>Rayon extérieur stator</i> | 21,6 p.u. | <i>Tension</i> | 20 kV |
| <i>Largeur d'entrefer</i> | 1 p.u. | <i>Masses</i> | 755 T |
| <i>Caractéristiques Fer</i> | | <i>Périodicité</i> | |
| <i>Perméabilité en saturé courbe $B(H)$</i> | | <i>Nombre de pôles</i> | $2P = 4$ |
| <i>Caractéristique des encoches</i> | | | |
| <i>Stator</i> | | <i>Rotor</i> | |
| <i>Nombre des encoches</i> | 84 | <i>Nombre des encoches bobinées</i> | 48 |
| <i>Nombre de phase</i> | 3 | <i>Nombre des encoches non bobinées</i> | 12 |
| <i>Type du bobinage</i> | imbriqué | <i>Nombre des spires par pôle</i> | 41 |
| <i>Nombre de barres par encoche</i> | 2 | | |

Tableau III-1 Dimensions et caractéristiques du turboalternateur étudié

III.1.2 Distribution du bobinage

Le stator est constitué de 84 encoches qui accueillent un bobinage triphasé à pas raccourci formant deux paires de pôles. Le bobinage imbriqué est présenté sur la figure III-1. La bobine du rotor est constituée de 82 spires distribuées dans les 48 encoches.

La connectivité du bobinage est présentée sur la figure III-2. On peut noter qu'une phase du stator est constituée de quatre voies en parallèles. De plus, les trois phases sont connectées en étoile.

Enfin, les inducteurs du rotor, montés en série, sont alimentés par le courant d'excitation continu.

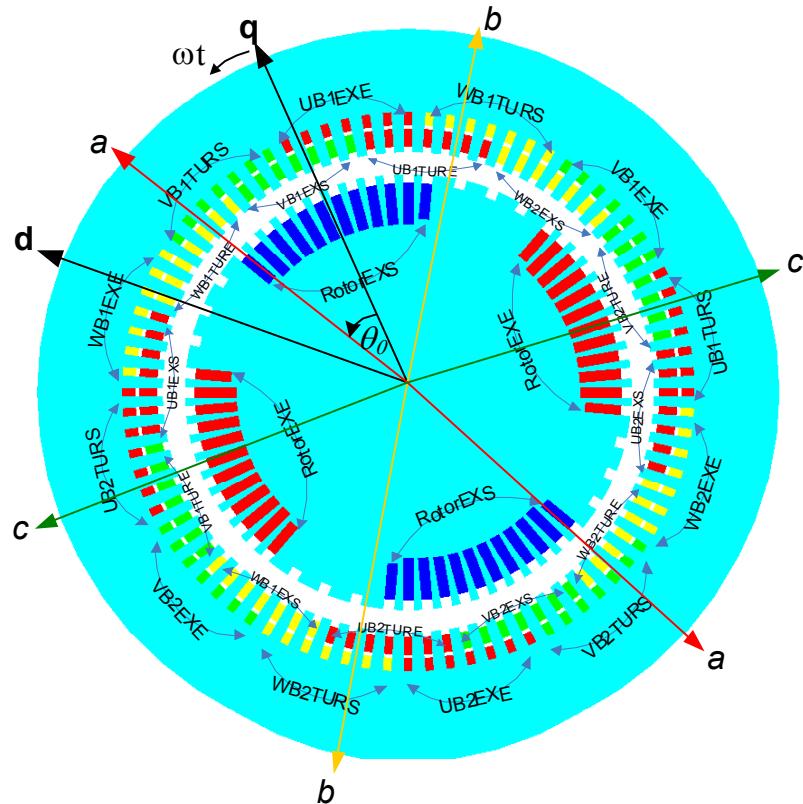


Figure III-1 Bobinage du stator et du rotor

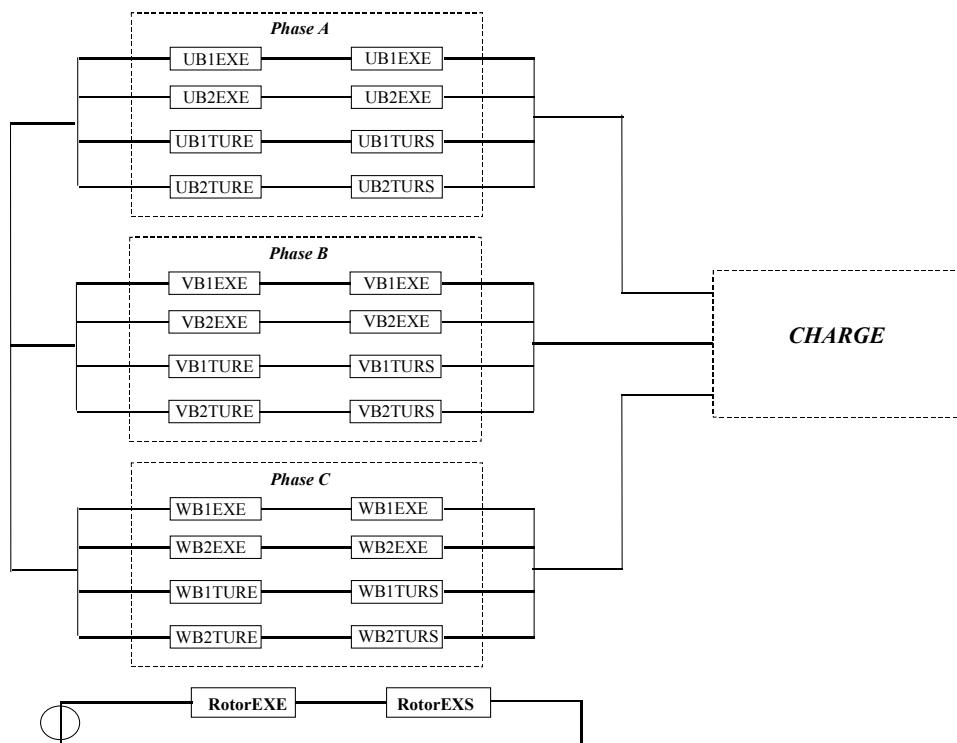


Figure III-2 Connexion des bobinages du stator et du rotor

III.1.3 Caractéristique des matériaux.

Afin de prendre en compte la non linéarité des matériaux magnétiques, dans le code de calcul CARMEL, nous utilisons une courbe de type Marrocco qui a pour expression:

$$H = \frac{B}{\mu_0} \left[\frac{B^{2\alpha}}{B^{2\alpha} + \tau} (c - \varepsilon) + \varepsilon \right] \quad (\text{III-1})$$

où ε , c , α et τ sont des coefficients calculés à partir de la caractéristique magnétique fournie par la société EDF. On trouvera, sur la figure III-3, les caractéristiques $B(H)$ mesurées et simulées pour le stator et le rotor.

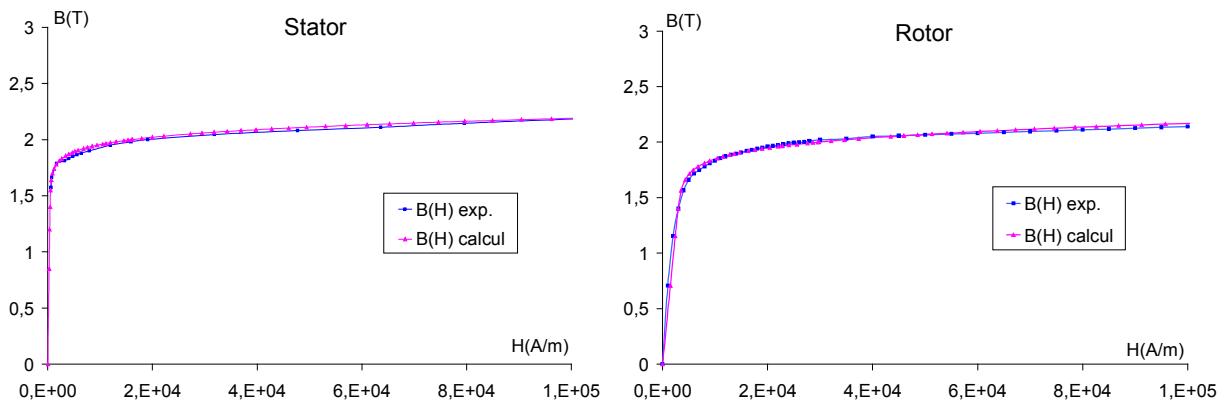


Fig. III-3.a

Fig. III-3.b

Figure III-3: Caractéristique mesurée et simulée des matériaux, du rotor (Fig. III-3.a) et du stator (Fig. III-3.b)

Dans cette étude, nous considérerons uniquement le cas d'un fonctionnement en régime permanent. Par conséquent, nous serons amenés à résoudre un problème de type magnétostatique. Il n'est donc pas nécessaire d'introduire dans le modèle la conductivité des matériaux. De plus, aux fréquences de fonctionnement, les densités du courant dans les enroulements pourront être considérées uniformes.

Pour résoudre le système d'équations avec la caractéristique non-linéaire des matériaux magnétiques, nous avons eu recours à une procédure itérative. Deux algorithmes, substitution et Newton-Raphson ont été utilisés respectivement dans la formulation en potentiel scalaire et dans la formulation en potentiel vecteur.

III.2 Modélisation de l'alternateur sans effets d'extrémités

De la même façon que pour la machine à aimants permanents, nous avons modélisé le turboalternateur sans tenir compte des effets d'extrémités. Dans ce cas il est possible de modéliser la structure en utilisant un maillage 2D. Cependant, afin de tester les algorithmes des modèles sur un maillage 3D, nous avons utilisé un maillage 3D obtenu par extrusion d'un maillage 2D.

III.2.1 Présentation de la géométrie et des maillages

Nous avons représenté, sur la figure III-4 la géométrie du turboalternateur en 3D lorsqu'une partie du stator est enlevé. On peut remarquer, sur cette figure, la présence de trois petites encoches sur chaque pôle du rotor qui servent à accueillir les amortisseurs. On rappelle

que l'étude étant limitée à des régimes permanents, les amortisseurs ne sont pas pris en compte dans la simulation.

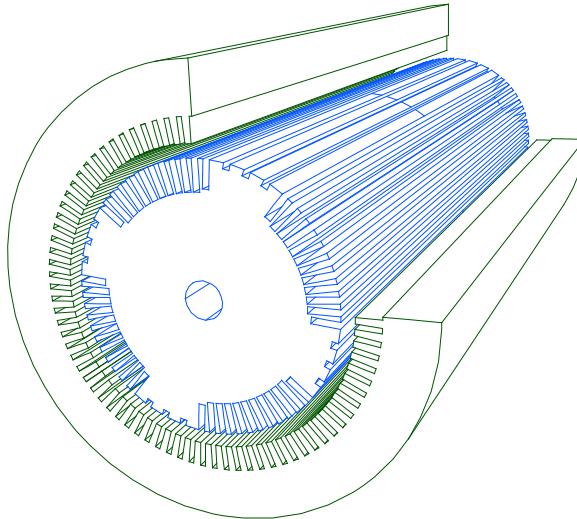


Figure III-4 Structure 3D du turboalternateur

Afin d'étudier cette machine nous avons créé deux maillages. Le premier, noté M_1 est construit à partir d'éléments prismatiques. Le second, M_2 est constitué de tétraèdres.

Le maillage M_1 est réalisé par la juxtaposition de couches identiques d'éléments (maillage 2D extrudé). Il est donc invariant suivant l'axe longitudinal de la machine. Compte tenu des propriétés du maillage, principalement dans la zone de l'entrefer, nous avons pu utiliser la méthode du pas bloqué, la bande de mouvement, les méthodes d'interpolation, et les méthodes Mortar et "Overlapping". En revanche, le maillage M_2 constitué de tétraèdres est maillé, au niveau de l'entrefer, sans aucune contrainte (maillage irrégulier). Il a été utilisé pour tester la méthode d'interpolation de surface. Les propriétés de ces deux maillages sont reportées dans le tableau III-2.

| | Type d'éléments | Nombre de noeuds | Nombre d'éléments | Pas de discrétisation de l'entrefer: $\Delta\theta_{mail}$ |
|-------|-----------------|------------------|-------------------|--|
| M_1 | Prismes | 55605 | 88688 | $2\pi/320$ |
| M_2 | Tétraèdres | 33660 | 158276 | $2\pi/320$ |

Tableau III-2 Propriétés des maillages M_1 et M_2

A titre d'illustration, nous avons reproduit, sur la figure III-5 un agrandissement de la zone de l'entrefer des maillages M_1 figure III-5.a et M_2 figure III-5.b. Sur cette dernière figure, on peut observer la "non régularité" du maillage dans la zone entrefer.

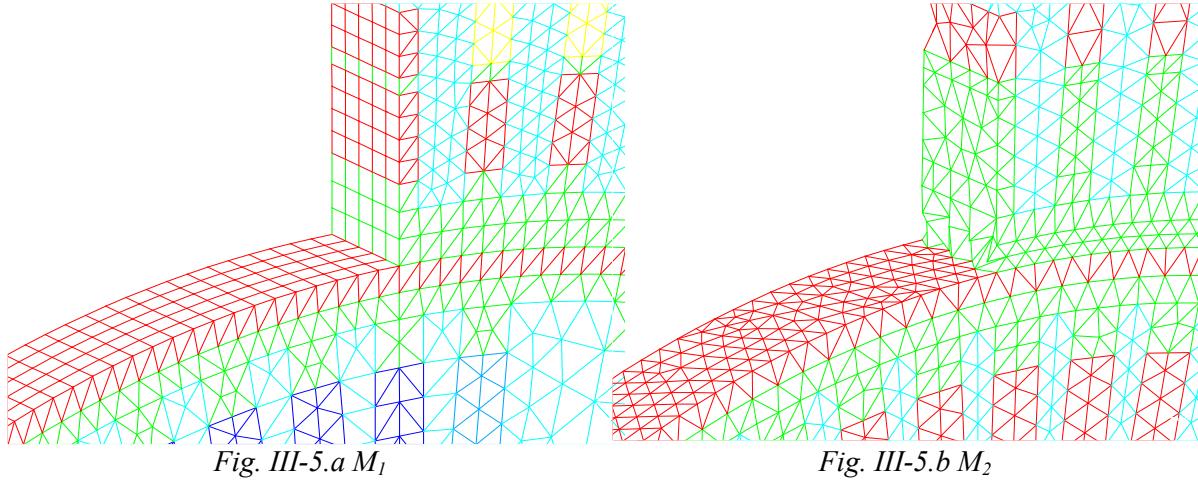
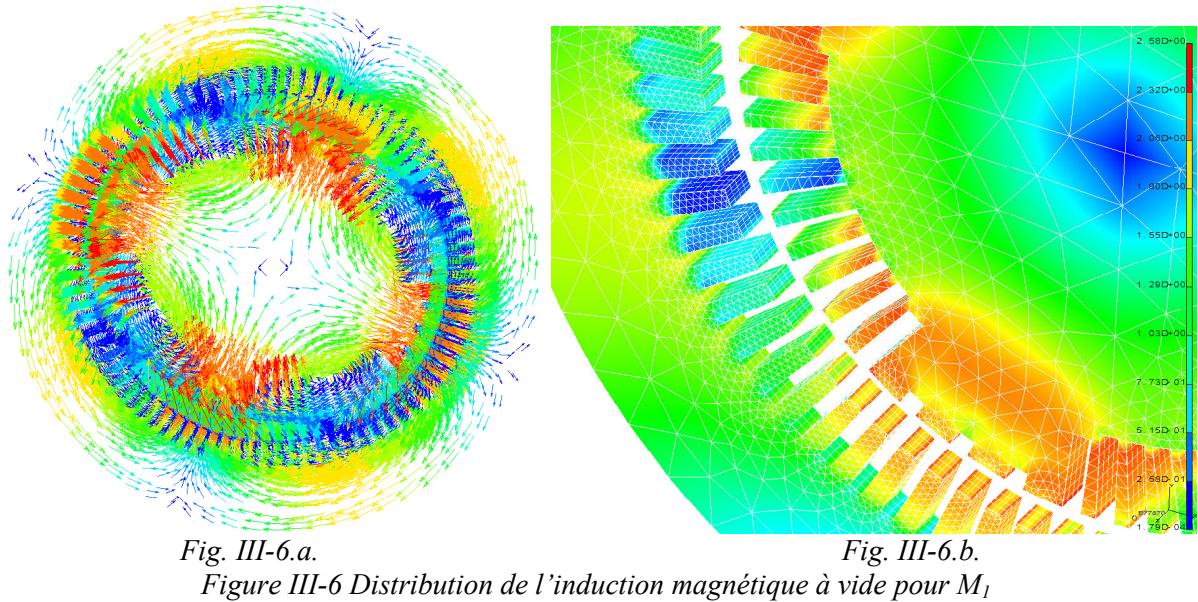


Figure III-5 Agrandissement de la zone de l'entrefer des maillages M_1 et M_2

Comme on peut le constater dans le tableau III-2, le pas de discréétisation $\Delta\theta_{\text{mail}}$ est identique pour les deux maillages. Nous avons effectué ce choix, afin de pouvoir comparer, de façon cohérente, les résultats issues des différentes méthodes. En revanche, on notera que le nombre de tétraèdres est beaucoup plus important que le nombre de prismes.

Nous avons représenté, sur la figure III-6, la distribution de l'induction magnétique à vide dans une section transversale de la machine (fig. III-6.a), et un agrandissement de la répartition de module de l'induction (fig. III-6.b). Les calculs ont été effectués avec le maillage M_1 , pour une valeur du courant d'excitation égale à 3000A.



III.2.2 Conditions de calculs

III.2.2.1 Simulation de l'essai à vide

Pour vérifier la caractéristique à vide du turboalternateur, nous allons calculer, à vitesse constante et en tenant compte de la non linéarité des matériaux magnétiques, la f.e.m. à vide pour différentes valeurs de courant d'excitation. La f.e.m. obtenue, entre deux phases, sera comparée aux données expérimentales fournies par la société EDF. Pour calculer le flux dans les bobinages nous utilisons les expression (I-41) et (I-42).

III.2.2.2 Prise en compte du mouvement

Avec la méthode du pas bloqué, il est nécessaire, d'une part d'avoir un maillage régulier et d'autre part, de prendre le pas de simulation du mouvement $\Delta\theta_{mvt}$ égal au pas du maillage " $\Delta\theta_{mail}$ " ou à un multiple. Cette dernière contrainte impose, comme nous l'avons vu précédemment, le pas de discréétisation temporel Δt

En prenant un pas de discréétisation temporel $\Delta t = 20ms/160$, on a pour une vitesse de 1500tr/mn $\Delta\theta_{mvt} = \Delta\theta_{mail}$. Dans ces conditions, les grandeurs calculées sont représentées, sur une période, avec 160 pas de calcul.

Pour les autres méthodes de prise en compte du mouvement (bande de mouvement, méthodes "Overlapping", Mortar, interpolation linéaire et surfacique) nous avons pris $\Delta t = 20ms/50$. Dans ce cas on aura un maillage non conforme (car $\Delta\theta_{mvt} \neq k\Delta\theta_{mail}$ avec, "k" un entier supérieur à zéro) et un nombre de pas de calcul divisé par 3,2 par rapport à la surface de glissement. On trouvera, dans le tableau III-3, un récapitulatif des différentes méthodes utilisées pour la prise en compte du mouvement avec le maillage correspondant et le pas de discréétisation temporelle associé.

| | <i>Maillage</i> | <i>Pas du mouvement</i> |
|--|-----------------|-------------------------|
| <i>Pas bloqué</i> | M_1 | $\Delta t = 20ms/160$ |
| <i>Bande de mouvement</i> | M_1 | $\Delta t = 20ms/50$ |
| <i>Interpolation linéaire du 1^{er} et 2^{ème} ordre</i> | M_1 | $\Delta t = 20ms/50$ |
| <i>Méthode Overlapping</i> | M_1 | $\Delta t = 20ms/50$ |
| <i>Interpolation de surface</i> | M_2 | $\Delta t = 20ms/50$ |
| <i>Méthode Mortar</i> | M_1 | $\Delta t = 20ms/50$ |

Tableau III-3 Récapitulatif des méthodes de prise en compte du mouvement

III.2.3 Simulation avec courants imposés

Ces simulations concernent des points de fonctionnement en charge. Dans ce cas, nous nous intéressons au calcul du couple électromagnétique, qui est déterminé par la méthode des travaux virtuels. Les simulations sont faites à la vitesse de 1500 tr/min pour les cinq points de fonctionnement fournis par la société EDF.

A partir d'un point de fonctionnement, si on utilise une représentation spatio-temporelle, nous pouvons tracer sur une même diagramme, les axes "d", "q" et de la phase "a", la valeur efficace de la tension V aux bornes d'un enroulement, de la force électromotrice E et du courant I . Comme le montre la figure III-7 on associe à ces trois grandeurs complexes les angles " δ " et " φ " qui représentent, respectivement, le déphasage par rapport à la tension de la f.e.m. et du courant.

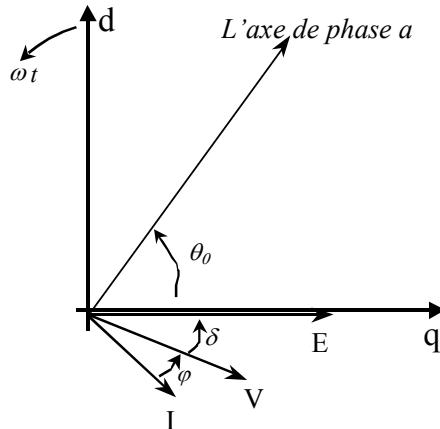


Figure III-7 Représentation spatio-temporelle avec V , E et I

Sur la base de nos notations, la f.e.m. à vide dans l'enroulement de la phase "a", peut s'exprimer sous la forme suivante:

$$e_a(t) = E \sqrt{2} \cos(\omega t - \theta_0) \quad (\text{III-2})$$

où, θ_0 représente le déphasage entre l'axe de la bobine de la phase "a" et l'axe "q" du rotor et ω la pulsation des grandeurs du stator.

Si l'on connaît l'évolution de la f.e.m. de la phase a, (cf figure III-8) il est relativement aisé de déterminer l'angle θ_0 .

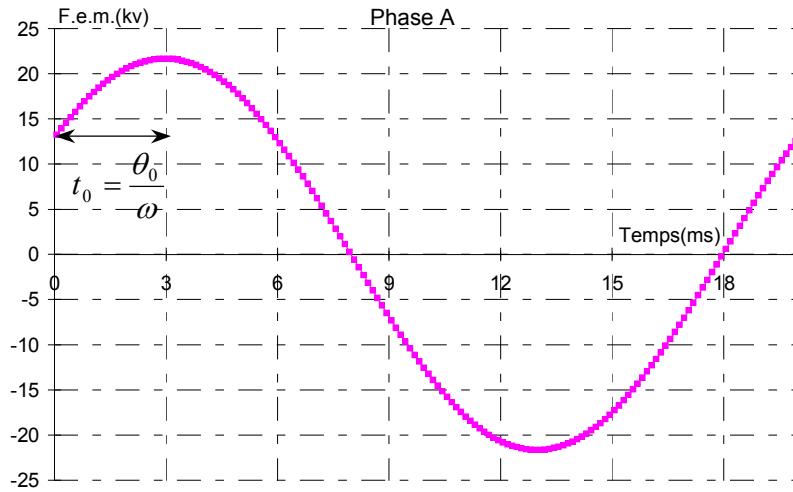


Figure III-8 Détermination du déphasage de la f.e.m. par rapport à l'origine

Compte tenu des déphasages " δ " et " φ ", les valeurs instantanées du courant dans les enroulements du stator, peuvent s'exprimer de la façon suivante:

$$i_a(t) = I \sqrt{2} \cos(\omega t - \theta_0 - (\delta + \varphi)) \quad (\text{III-3.a})$$

$$i_b(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \theta_0 - (\delta + \varphi) - \frac{2\pi}{3}) \quad (\text{III-3.b})$$

$$i_c(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \theta_0 - (\delta + \varphi) - \frac{4\pi}{3}) \quad (\text{III-3.c})$$

III.2.4 Simulation avec le couplage circuit

Cette simulation permet de vérifier les points de fonctionnement en tenant compte de la charge de l'alternateur définie par la puissance active P , la puissance réactive Q et la valeur efficace de la tension à ses bornes. Dans le cas du couplage des équations magnétiques et électriques, cette charge peut être simulée en utilisant deux approches.

La première, qui ne peut être utilisée que dans le cas d'un fonctionnement en régime sinusoïdal, consiste à imposer aux bornes de la machine les trois tensions triphasées avec le déphasage " δ " par rapport à la force électromotrice. Soit, pour la phase "a":

$$v_a(t) = V\sqrt{2} \cos(\omega t - \theta_0 - \delta) \quad (\text{III-4})$$

Dans ce cas, on se trouve dans une configuration où l'on l'impose aux bornes de la machine trois différences de potentiel avec le déphasage, par rapport à la f.e.m. correspondant au point de fonctionnement en régime permanent. En fait, on force l'obtention du régime permanent. Cependant, la valeur de la résistance interne de la machine impose un transitoire "numérique" extrêmement élevé qui rend inutilisable une telle démarche.

La deuxième approche consiste à déterminer la charge équivalente que nous représenterons par un circuit R-L ou R-C selon que la puissance réactive est positive ou négative.

Pour la détermination des paramètres de la charge équivalente on utilise les formules classiques suivantes :

$$R_c = \frac{P}{3I^2} \quad (\text{III-5.a})$$

$$\text{pour } Q > 0 \quad L_c = \frac{Q}{3\omega I^2} \quad \text{et pour } Q < 0 \quad C_c = -\frac{3I^2}{\omega Q} \quad (\text{III-5.b})$$

dans ces expressions, R_c représente la résistance de charge équivalente, L_c l'inductance et C_c la capacité.

Pour une valeur de puissance réactive positive, cas d'un circuit R-L, la figure III-8 nous montre le schéma électrique étudié où les résistances et les inductances de charge sont couplées avec la méthode des éléments finis.

On peut remarquer sur cette figure, la résistance notée R_N qui permet d'avoir une relation supplémentaire. En prenant pour R_N une valeur très grande, devant les autres résistances et réactances du circuit, on impose le courant de neutre égal à zéro.

Pour chaque voie d'enroulement de l'alternateur, nous pouvons écrire l'équation de la tension. Soit, pour la $k^{\text{ème}}$ voie (k pouvant prendre les valeurs 1, 2, 3 ou 4) de la phase "a":

$$-\frac{d\phi_k(t)}{dt} = (R_b + R_c)i_a(t) + L_c \frac{di_a(t)}{dt} + i_N(t)R_N \quad (\text{III-6})$$

où R_b représente la résistance d'une voie d'enroulement. Sur la figure III-8 on observe que douze courants sont ainsi définis. Le système d'équations, relatif à l'équation (III-6), peut alors se mettre sous la forme matricielle (III-7). Ce système d'équations a été introduit dans le code de calcul. Afin de prendre en compte les termes sources relatifs aux courants dans les enroulements nous avons utilisé douze champs de vecteurs "K" (voir équations (I-38), (I-39) et (I-50)).

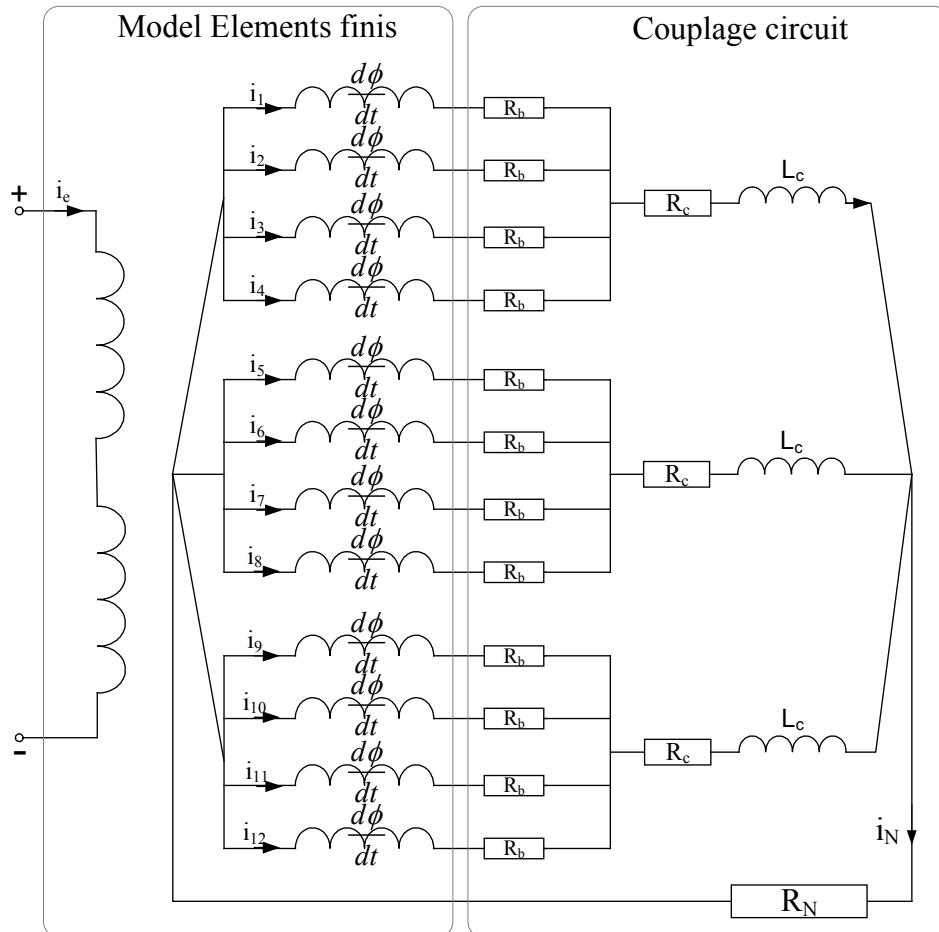


Figure III-8 Schéma électrique du couplage éléments finis équations de circuit

Pour la simulation des points de fonctionnement en charge, nous allons utiliser la méthode du pas bloqué qui est la technique de référence. Dans le but, de réduire les temps de calcul, on prendra le pas de mouvement égal à 5 fois le pas de discréttisation du maillage (soit: $\Delta\theta_{\text{mv}}=5\Delta\theta_{\text{mail}}$).

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{c} \frac{d\phi_1}{dt} \\ \frac{d\phi_2}{dt} \\ \frac{d\phi_3}{dt} \\ \frac{d\phi_4}{dt} \\ \frac{d\phi_5}{dt} \\ \frac{d\phi_6}{dt} \\ \frac{d\phi_7}{dt} \\ \frac{d\phi_8}{dt} \\ \frac{d\phi_9}{dt} \\ \frac{d\phi_{10}}{dt} \\ \frac{d\phi_{11}}{dt} \\ \frac{d\phi_{12}}{dt} \end{array} \right) \\
 - & = \left(\begin{array}{ccccccccc} R_b & & & & & 0 & \left(\begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \\ i_{11} \\ i_{12} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} R_c & R_c & R_c & R_c \\ R_c & R_c & R_c & R_c \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \\ i_{11} \\ i_{12} \end{array} \right) \end{array} \right) \\
 + & \left(\begin{array}{ccccccccc} R_N & & & & & 0 & \left(\begin{array}{c} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \\ \frac{di_3}{dt} \\ \frac{di_4}{dt} \\ \frac{di_5}{dt} \\ \frac{di_6}{dt} \\ \frac{di_7}{dt} \\ \frac{di_8}{dt} \\ \frac{di_9}{dt} \\ \frac{di_{10}}{dt} \\ \frac{di_{11}}{dt} \\ \frac{di_{12}}{dt} \end{array} \right) \\ R_N & & & & & \left(\begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \\ i_{11} \\ i_{12} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} L_c & L_c & L_c & L_c \\ L_c & L_c & L_c & L_c \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \\ \frac{di_3}{dt} \\ \frac{di_4}{dt} \\ \frac{di_5}{dt} \\ \frac{di_6}{dt} \\ \frac{di_7}{dt} \\ \frac{di_8}{dt} \\ \frac{di_9}{dt} \\ \frac{di_{10}}{dt} \\ \frac{di_{11}}{dt} \\ \frac{di_{12}}{dt} \end{array} \right) \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

(III-7)

III.3 Résultats de la modélisation

III.3.1 Comparaison du flux et de la f.e.m.

Comme indiqué précédemment, la méthode du pas bloqué sera toujours prise comme référence. On rappelle que c'est dû au fait que l'on a toujours un maillage conforme sur la surface de glissement.

Le flux engendré dans les phases de la machine a été calculé avec la formulation en potentiel scalaire en simulant le mouvement avec les différentes méthodes proposées. Comme dans le chapitre précédent pour la machine à aimants permanents, nous avons également effectué des calculs avec la formulation en potentiel vecteur dans le cas de la méthode du pas bloqué et de la bande de mouvement. Pour la méthode d'interpolation de surface c'est le maillage M_2 qui a été utilisé. En revanche, pour les autres méthodes, nous avons utilisé le maillage M_1 .

Pour une vitesse de 1500tr/mn et une valeur du courant d'excitation de 3000A nous avons calculé le flux dans les trois phases en simulant la machine avec les neuf approches dont nous disposons (7 en formulation Ω et 2 en A). Pour l'ensemble de ces approches, nous avons reproduit, sur la figure III-9, l'évolution du flux en fonction du temps dans la phase "a". Sur la figure III-9.a nous avons représenté une période électrique. En revanche, afin de mieux observer la différence entre les résultats obtenus un agrandissement des courbes est présenté sur la figure III-9.b.

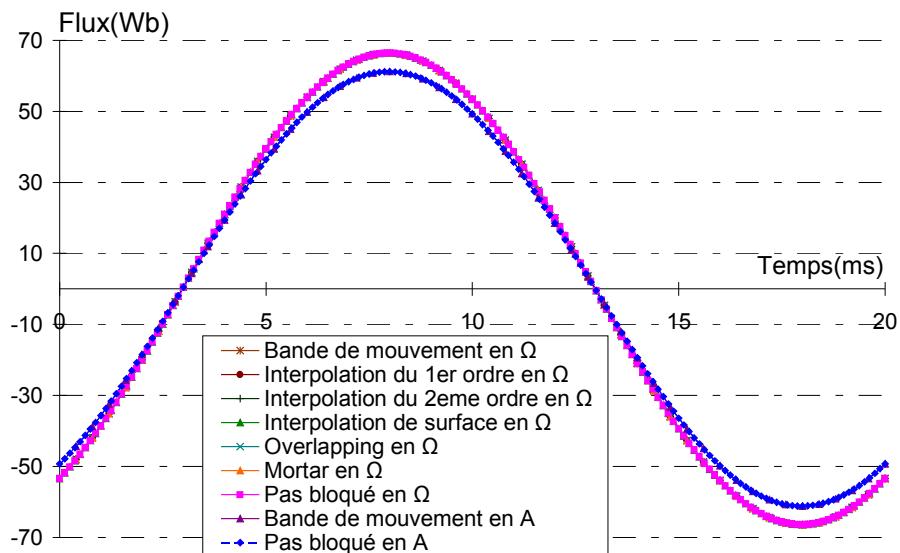


Fig. III-9.a

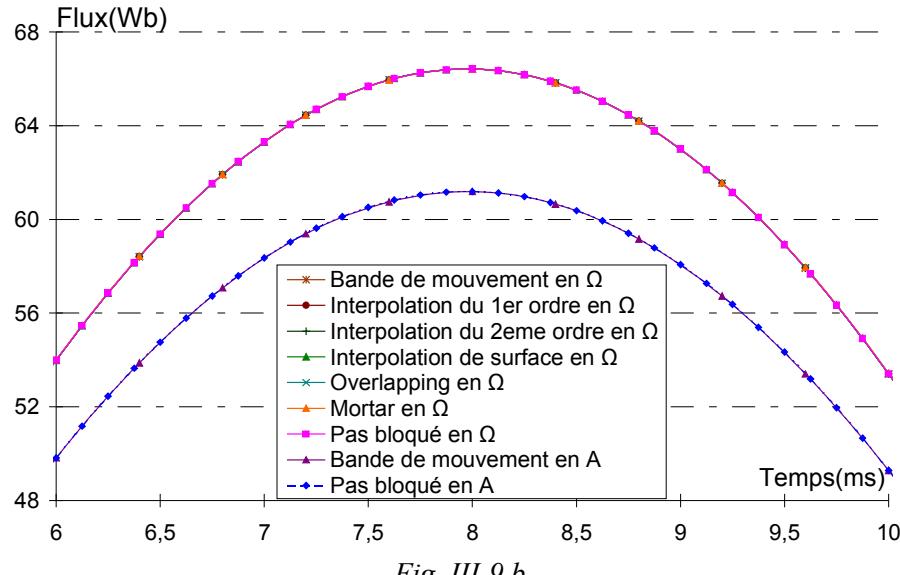


Fig. III-9.b

Figure III-9 Evolution, en fonction du temps, du flux dans la phase "a" ($I_e=3000A$)

Sur ces figures on peut noter que, dans le cas de la formulation en potentiel vecteur \mathbf{A} , les résultats sont plus faibles. C'est un résultat, bien connu, lié à l'encadrement de la solution et déjà commenté dans le chapitre II. Si l'on désire améliorer la qualité de la solution il faudrait affiner le maillage et donc, augmenter le nombre d'inconnues du problème. En ce qui concerne les méthodes de simulation du mouvement on observe que, pour une formulation donnée, elles conduisent à un résultat tout à fait équivalent pour le flux.

Les forces électromotrices ont été calculées, à partir des valeurs du flux, en utilisant la méthode d'Euler implicite. Toujours pour une valeur du courant d'excitation $I_e=3000A$, sur la figure III-10, nous avons reproduit les résultats obtenus avec l'ensemble des méthodes de prise en compte du mouvement. Comme pour le flux un agrandissement est représenté sur les figures III-11.a et III-11.b, les formulations en potentiel vecteur et scalaire d'une part et les méthodes d'interpolation du premier et deuxième ordre d'autre part. On trouvera également sur la figure III-12, un agrandissement de l'évolution de la f.e.m. obtenue avec les méthodes Mortar et "Overlapping" (fig. III-12.a) et la méthode d'interpolation de surface (fig. III-12.b). Ces agrandissements permettent d'évaluer les écarts entre les différentes méthodes de simulation du mouvement.

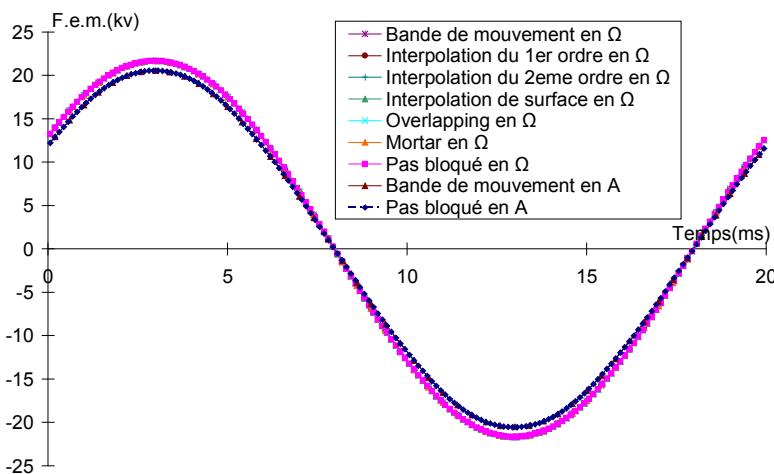


Figure III-10: Pour l'ensemble des méthodes évolution en fonction du temps de la f.e.m. de la phase "a"

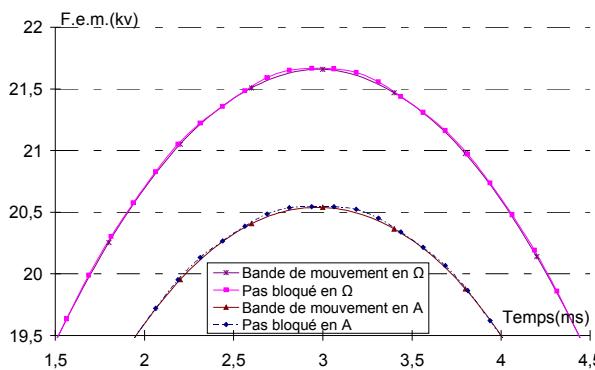


Fig. III-11.a formulation en Ω

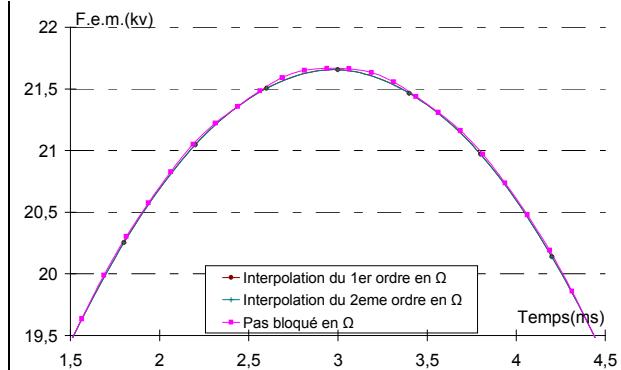


Fig. III-11.b formulation en A

Figure III-11: Evolution, en fonction du temps, de la f.e.m. dans la phase "a"

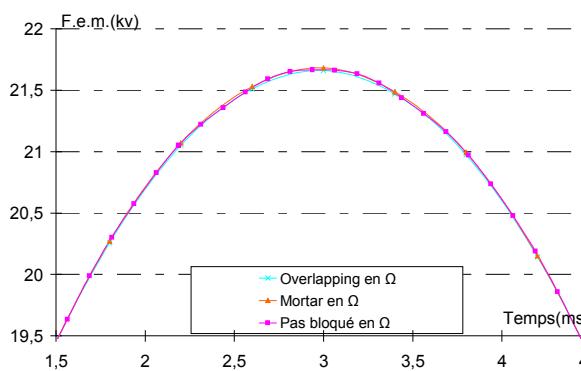


Figure III-12: Evolution, en fonction du temps, de la f.e.m. dans la phase "a"

Sur ces figures, les résultats font apparaître, de légères oscillations numériques, pour la méthode d'interpolation de surface. En revanche, les autres méthodes (bande de mouvement, interpolation 1^{er} 2^{ème} ordre, Mortar et "Overlapping") présentent des résultats en parfaite concordance.

III.3.2 Caractéristique à vide

Nous avons déterminé la caractéristique représentant la f.e.m. entre deux phases à vide en fonction du courant d'excitation pour une vitesse de rotation de 1500tr/mn. Les calculs ont été effectués en utilisant la formulation en potentiel scalaire et, quand cela était possible, la formulation en potentiel vecteur. Comme indiqué au paragraphe précédent les résultats obtenus avec les différentes méthodes de simulation du mouvement sont tout à fait identiques. Dans ces conditions, nous avons reproduit, sur la figure III-13, les résultats de la simulation avec la méthode du pas bloqué que l'on peut comparer aux mesures expérimentales fournies par la société EDF.

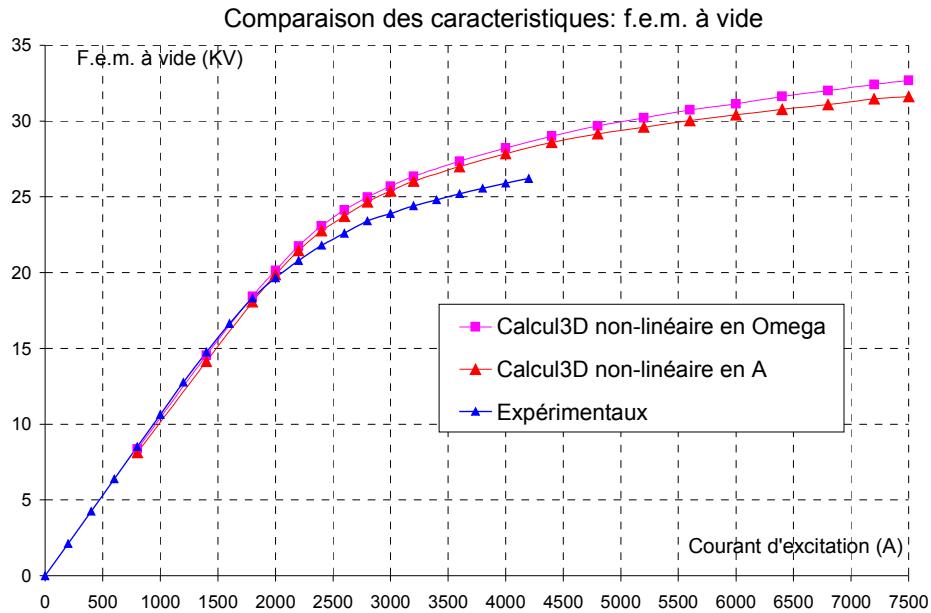


Figure III-13: Comparaison de la caractéristique à vide entre deux phases.

A partir de cette figure, on notera une bonne correspondance entre les calculs et l'expérience quand le courant d'excitation est inférieur à 2000A (partie linéaire de la caractéristique). En revanche, quand le courant d'excitation augmente, nous constatons un écart entre les calculs et les mesures qui peut atteindre 10% pour un courant de 4000A.

Sur cette figure, on remarque également que les résultats pour la formulation en potentiel scalaire sont légèrement supérieurs aux résultats de la formulation en potentiel vecteur. Cela est dû à la différence sur les flux déjà observée dans le paragraphe précédent.

III.3.3 Points de fonctionnement en charge

Afin de vérifier les différentes méthodes de prise en compte du mouvement en présence d'une réaction magnétique de l'induit, nous avons simulé les cinq points de fonctionnement en charge.

A partir des données expérimentales (voir tableau III-4) nous avons déterminé l'expression temporelle du courant dans les trois phases de la machine (équations (III-3)). Connaissant la vitesse de rotation (1500tr/mn) ainsi que le courant d'excitation, nous avons pu effectuer les simulations en régime permanent. Dans un premier temps, les calculs ont été effectués en utilisant, pour simuler le mouvement, la méthode du pas bloqué avec $\Delta t=20\text{ms}/160$. Les résultats obtenus, pour la valeur moyenne du couple électromagnétique avec les deux formulations (\mathbf{A} et Ω), sont reportés dans le tableau III-4. On note que les résultats issus de la formulation en potentiel scalaire sont légèrement supérieurs à ceux obtenus par la formulation en potentiel vecteur. Autrement, la comparaison avec les mesures fait apparaître un écart plus important lorsque le courant d'excitation est plus élevé. Nous retrouvons donc le même phénomène que celui observé pour la caractéristique à vide de la machine.

| Points de fonctionnement (fourni par EDF) | | | | | | | Résultats calcul | | en A |
|---|-----------|------------|----------------------|--------------------|----------|-----------|------------------|-------------------|-----------------|
| | | | | | | | | | en Ω |
| U (KV) | P (MW) | Q (MVA) | I _{abc} (A) | I _e (A) | δ | φ | Couple (MN.M) | Puissance (MW) | $\varepsilon\%$ |
| 20 | 1485 | 719,2 | 47631 | 7466 | 41 | 25,84 | 9,78 | 1536,2 | 3,4 |
| | | | | | | | 10,3 | 1618,1 | 8,9 |
| 20 | 1485 | -577 | 45990,5 | 4883 | 79,6 | -21,23 | 9,52 | 1495,4 | 0,7 |
| | | | | | | | 9,85 | 1547,4 | 4,2 |
| 19 | 1390 | -310 | 43275,4 | 4900 | 72,5 | -12,57 | 8,84 | 1388,8 | -0,1 |
| | | | | | | | 9,13 | 1434,1 | 3,2 |
| 20,75 | 1371 | 483 | 40444,9 | 6177 | 42,4 | 19,41 | 8,86 | 1391,7 | 1,5 |
| | | | | | | | 9,17 | 1440,4 | 5,1 |
| 21,45 | 1378 | 654 | 41055,7 | 6796 | 37,1 | 25,39 | 9,03 | 1418,4 | 2,9 |
| | | | | | | | 9,45 | 1484,4 | 7,7 |

Tableau III-4 Vérification des points de fonctionnement

La méthodologie de simulation ayant été validée pour la méthode du pas bloqué, nous avons testé ensuite, les autres méthodes de prise en compte du mouvement et comparé la forme d'onde du couple électromagnétique sur une période en régime permanent.

Pour le 1^{er} point de fonctionnement, défini dans le tableau III-4, nous avons testé les sept méthodes proposées avec la formulation en potentiel scalaire. Pour la méthode du pas bloqué (qui sert de référence) le pas de discréétisation temporelle est toujours égal à 20ms/160. Pour les autres méthodes, nous avons pris $\Delta t=20\text{ms}/50$. Les résultats obtenus pour le couple électromagnétique sur une période de 20ms sont présentés sur la figure III-14.a.

Pour mettre en évidence les écarts entre les différentes techniques nous présentons, sur la figure III-14.b, l'évolution du couple en fonction du temps sans sa valeur moyenne. Sur cette figure, on notera que l'ensemble des méthodes donne des résultats tout à fait équivalents. On peut cependant remarquer une légère oscillation pour la méthode d'interpolation de surface. Il est à noter que pour cette dernière, c'est le maillage M_2 qui est utilisé alors que pour les autres méthodes on a eu recours au maillage M_1 .

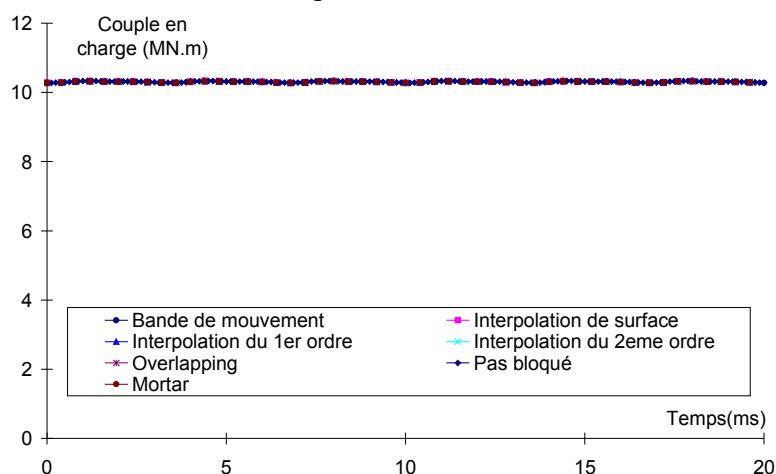


Fig. III-14.a

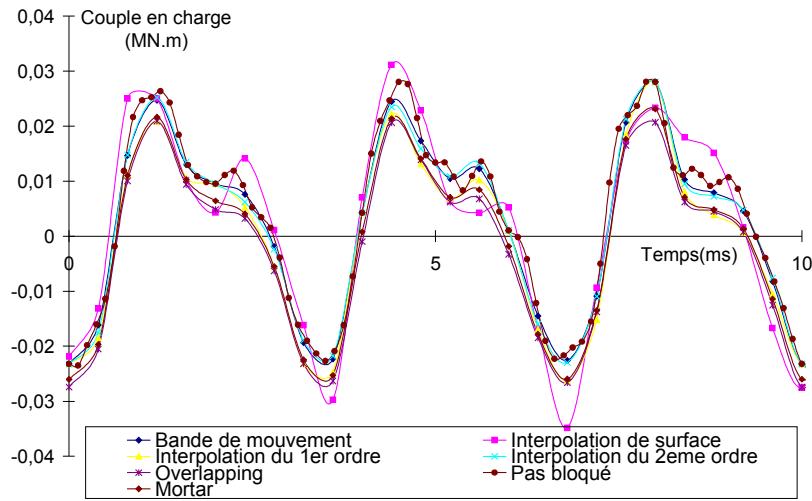


Fig. III-14.b

Figure III-14 Formulation en potentiel scalaire, évolution du couple en charge fig. III-14.a et comparaison des ondulations du couple électromagnétique fig. III-14.b

Nous avons également simulé le point de fonctionnement n°1 avec la formulation en potentiel vecteur. Nous rappelons que pour cette dernière nous avons développé que la technique du pas bloqué et la bande de mouvement. Les résultats obtenus, sur une période, pour le couple électromagnétique sont présentés sur la figure III-15.a. On remarque, sur la figure III-15.b qui représente l'évolution du couple sans sa valeur moyenne, des oscillations avec la méthode du pas bloqué.

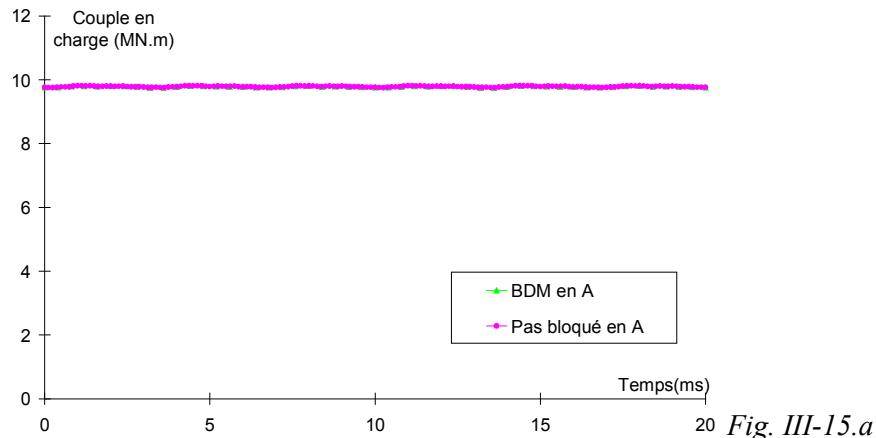


Fig. III-15.a

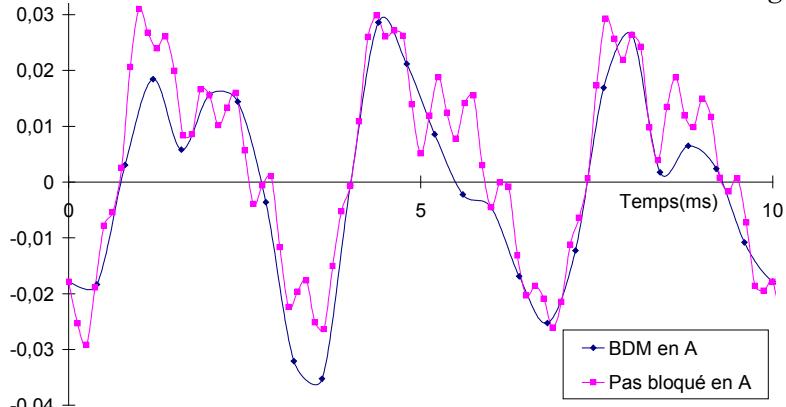


Fig. III-15.b

Figure III-15: Formulation en potentiel vecteur, évolution du couple en charge

III.3.4 Fonctionnement en couplage circuit

Dans cette partie nous allons introduire le couplage avec les équations du circuit électrique (équation III-6). Dans ces conditions, nous avons déterminé, pour les cinq points de fonctionnement, la résistance R_c et suivant le signe de la puissance réactive Lc ou Cc , qui représentent la charge équivalente en régime permanent. Les valeurs que nous avons calculées sont reportées dans le tableau III-5.

Les calculs ont été effectués uniquement avec la méthode du pas bloqué. Afin de limiter les temps de calcul nous avons pris une valeur de $\Delta\theta_{mvt}=5\Delta\theta_{mail}$. Pour les points de fonctionnement 1 et 2 nous avons représenté, sur la figure III-16, l'évolution du couple électromagnétique en fonction du temps. On peut observer, sur cette figure, un régime transitoire numérique. Après deux périodes, la solution tend vers le point de fonctionnement en régime permanent. On trouvera, sur la figure III-17 l'évolution du courant dans les trois phases dans le cas du point de fonctionnement n°1. On retrouve, comme pour le couple électromagnétique, le transitoire numérique sur une durée de deux périodes.

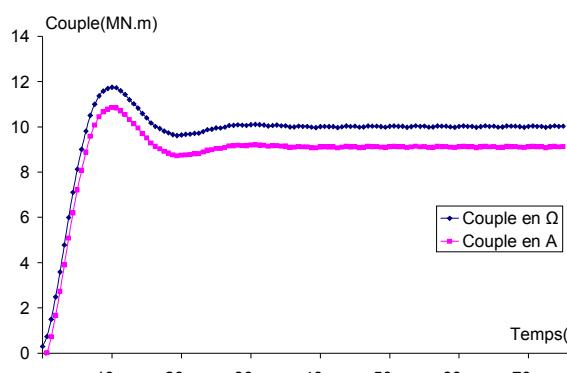


Fig. III-6.a. Point 1

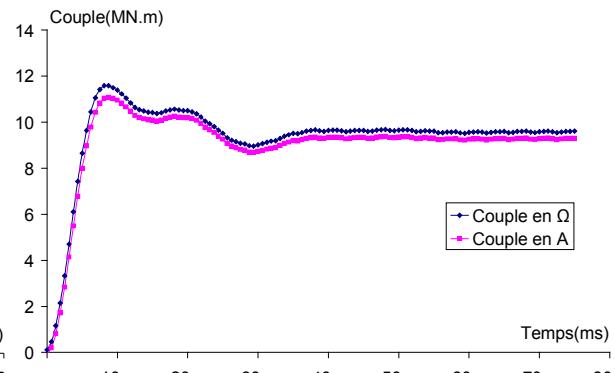


Fig. III-6.b. Point 2

Figure III-16 Couplage circuit: évolution du couple pour les points de fonctionnement 1 et 2.

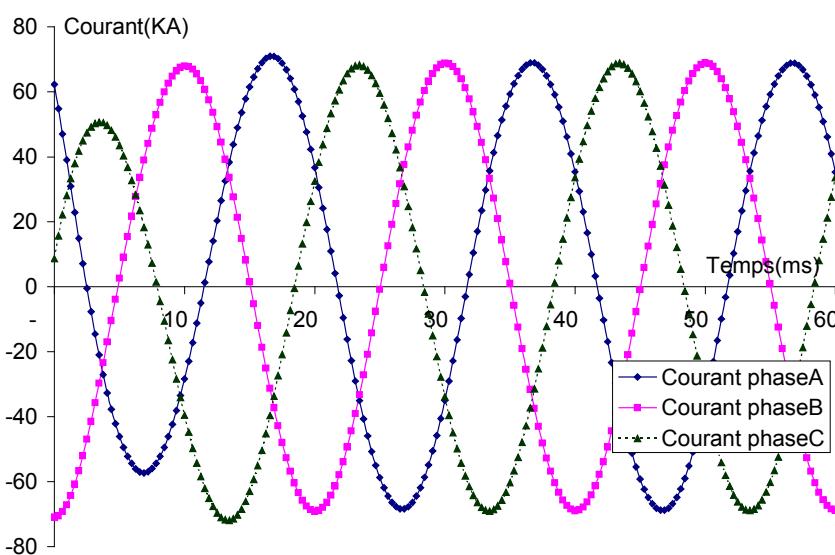


Figure III-17: Couplage circuit: évolution du courant dans les trois phases de la machine pour le point de fonctionnement n°1

Nous avons ainsi simulé les cinq points de fonctionnement avec la méthode du pas bloqué en tenant compte du couplage circuit toujours avec $\Delta\theta_{mvt}=5\Delta\theta_{mail}$. Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau III-5 dans lequel nous faisons apparaître les écarts en % entre les mesures et les simulations pour le courant et la puissance. Dans ce tableau on peut remarquer que les résultats numériques encadrent les mesures fournies par EDF. Ces résultats sont étonnantes car malgré l'introduction d'inconnues supplémentaires la simulation et les mesures sont plus proches que dans le cas où les courants sont imposés. On trouvera dans l'annexe IV, les résultats plus conformes à ceux obtenus dans le tableau III-4 en prenant $\Delta\theta_{mvt}=\Delta\theta_{mail}$. On constate également que plus le courant d'excitation est élevé, plus les écarts entre les simulations et les résultats expérimentaux sont importants.

| Points de fonctionnement (fourni par EDF) | | | | | | | Résultats calcul | | | en \mathbf{A} |
|---|-----------|------------|---------------|-----------|-------|--------|------------------|-----------------|-------------------|-----------------|
| | | | | | | | | | | en Ω |
| U (KV) | P (MW) | Q (MVA) | I_{abc} (A) | I_e (A) | R_c | X_c | I_{abc} (A) | $\varepsilon\%$ | Puissance (MW) | $\varepsilon\%$ |
| 20 | 1485 | 719,2 | 47631 | 7466 | 0,218 | 0,106 | 47637,9 | 0,01 | 1429,4 | -3,74 |
| | | | | | | | 48164,1 | 1,10 | 1570,8 | 5,78 |
| 20 | 1485 | -577 | 45990,5 | 4883 | 0,234 | -0,091 | 44099,0 | -4,13 | 1457,7 | -1,84 |
| | | | | | | | 44531,8 | -3,19 | 1504,8 | 1,33 |
| 19 | 1390 | -310 | 43275,4 | 4900 | 0,247 | -0,055 | 41934,9 | -3,11 | 1333,6 | -4,06 |
| | | | | | | | 41934,4 | -3,09 | 1393,3 | 0,24 |
| 20,75 | 1371 | 483 | 40444,9 | 6177 | 0,279 | 0,098 | 39541,7 | -2,25 | 1269,2 | -7,42 |
| | | | | | | | 40073,6 | -0,93 | 1396,4 | 1,86 |
| 21,45 | 1378 | 654 | 41055,7 | 6796 | 0,273 | 0,129 | 40353,6 | -1,72 | 1283,3 | -6,87 |
| | | | | | | | 40845,8 | -0,53 | 1421,6 | 3,16 |

Tableau III-5: Vérification des points de fonctionnement en couplage circuit, au niveau des résultats la première ligne correspond à la formulation \mathbf{A} et la deuxième ligne à la formulation en Ω

III.3.5 Conclusion

Dans cette partie, nous avons modélisé la géométrie d'un turboalternateur, sans les têtes de bobines, avec les différentes méthodes de prise en compte du mouvement. Dans ces conditions, on peut considérer le problème comme un cas 2D. Nous avons comparé le flux et la f.e.m. obtenus par toutes les méthodes proposées.

Afin de comparer les différentes techniques de prise en compte du mouvement, nous avons regroupé les indicateurs de calcul dans les tableaux III-6 et III-7 pour respectivement les formulations en Ω et \mathbf{A} . A partir du tableau III-6 on peut remarquer que l'augmentation du stockage de la matrice est relativement important pour la méthode Mortar ce qui augmente très nettement les temps de calcul. En revanche les autres méthodes ont un comportement numérique sensiblement équivalent avec une augmentation des temps de calcul de l'ordre de 30%. Les résultats reproduits sur le tableau III-7 montrent que, comme pour le cas de la formulation en potentiel scalaire, la bande de mouvement conduit à une légère augmentation des temps de calcul.

| Temps CPU (en secondes) Pour un pas du mouvement (linéaire) | Formulation en potentiel scalaire | | | | |
|---|-----------------------------------|---------|-----------------|---------------------|---------|
| | Temps CPU | | Nombre du GC | Stockage du système | |
| | Temps (s) | Rapport | | Nbre de termes | Rapport |
| Pas bloqué | 17 s | 1,00 | 611 | 182765 | 1,00 |
| Bandé de mouvement | 18,5 s | 1,09 | 612 | 182765 | 1,00 |
| Interpolation du 1 ^{er} ordre | 21,8 s | 1,28 | 623 | 186423 | 1,02 |
| Interpolation du 2 ^{ème} ordre | 22,6 s | 1,33 | 623 | 190917 | 1,04 |
| Méthode "Overlapping" | 20,9 s | 1,23 | 615 | 186783 | 1,02 |
| Interpolation de surface (M_2) | 117 s | - | 497 | 296369 | - |
| Méthode Mortar | 59 s | 3,47 | 635 | 274347 | 1,50 |

Tableau III-6 Formulation en potentiel scalaire; comparaison des méthodes

| Formulation en potentiel vecteur (temps CPU pour un pas de mouvement (linéaire)) | | | |
|--|------------------|--------------|---------------------|
| Méthodes | Temps de CPU (s) | Nombre de GC | Stockage du système |
| Pas bloqué | 6,2(s) | 228 | 46315 |
| Bandé de mouvement | 6,9(s) | 228 | 46315 |

Tableau III-7 Formulation en potentiel scalaire; comparaison des méthodes

Pour valider le modèle, nous avons étudié les cinq points de fonctionnement en charge fournis par la société EDF. Les calculs ont été effectués en régime permanent avec le courant imposé d'une part et dans le cas d'un couplage circuit sur une charge équivalente d'autre part. L'analyse de la forme d'onde du couple électromagnétique montre que les différentes méthodes proposées conduisent à des résultats sensiblement équivalents.

III.4 Modélisation du turboalternateur avec les têtes de bobines

Dans cette partie, nous allons modéliser le turboalternateur avec les têtes de bobines. Du fait des conditions de symétrie, nous avons étudié uniquement la moitié de la machine avec une boîte d'air autour des têtes de bobines. La condition aux limites Γ_b ($\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}=0$) est imposée sur la surface extérieure du domaine d'étude.

III.4.1 Présentation des maillages

Le maillage est composé de deux parties. Une première partie extrudée relative à la zone active de la machine et une "boîte d'air" correspondant aux têtes de bobines du stator et du rotor. Sur la figure III-18.a, nous présentons, sur un agrandissement, sept têtes de bobines du stator. Il est à noter que le bobinage est de type pas raccourci. Afin de bien respecter la forme réelle, chacune des têtes de bobine est composée de onze volumes. Comme la figure III-18.b le montre, les têtes de bobines du rotor sont concentriques et ont, par conséquent, une géométrie beaucoup plus simple.

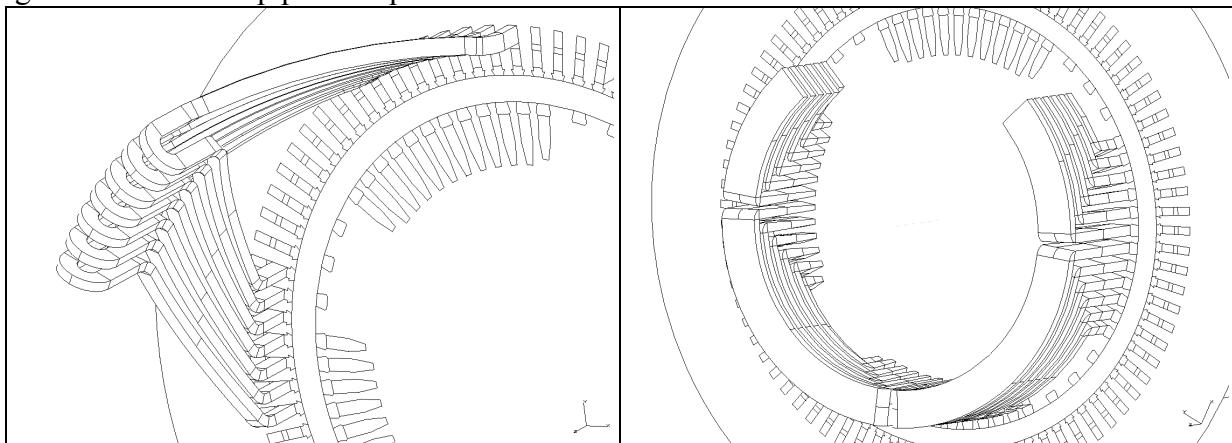


Fig.III-18.a

Fig.III-18.b

Figure III-18: Représentation des têtes des bobines du stator et du rotor

Pour réaliser le maillage, nous avons utilisé des triangles sur la surface frontale de l'alternateur (figure III-19). Ce maillage 2D ressemble à celui utilisé pour la modélisation sans les têtes bobines (cf paragraphe III-3). Dans l'entrefer une couche d'éléments est maillée régulièrement avec, pour limiter leur nombre, une discréétisation plus grossière ($\Delta\theta_{mail}=2\pi/240$) que précédemment.

Ensuite, le maillage de la zone active est réalisé par extrusion du maillage 2D en huit couches de prismes. Ces huit couches sont réparties d'une façon non régulière afin de prendre en compte les effets de proximité au voisinage des têtes de bobines. On peut remarquer sur la figure III-19.a, que les prismes situés près de la partie frontale ont une longueur plus petite que ceux placés près du centre de la machine. Cette concentration du maillage au voisinage des têtes de bobine permet d'améliorer la précision pour le phénomène 3D.

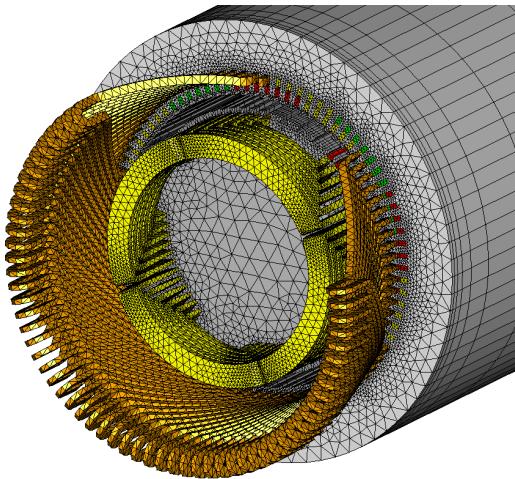


Fig. III-19.a

Figure III-19: Maillage des têtes de bobines du stator et du rotor

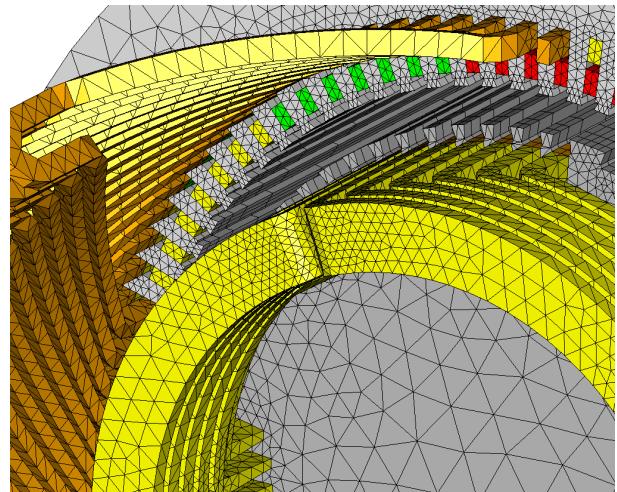


Fig. III-19.b

Le maillage de la partie frontale, comprenant les têtes de bobines ainsi que la boite d'air, est constitué d'éléments tétraédriques.

III.4.2 Prise en compte du mouvement avec les têtes de bobines

Afin de prendre en compte le mouvement dans la partie frontale, la surface de glissement cylindrique, située initialement dans l'entrefer, est prolongée suivant l'axe de la machine jusqu'à la frontière extérieure. Cette surface de glissement, placée entre les têtes de bobines du stator et du rotor, a été maillée de deux façons générant ainsi les maillages que l'on notera M_3 et M_4 . Pour M_3 , maillage irrégulier, aucune contrainte n'a été imposée. En revanche pour M_4 , la surface de glissement est constituée de triangles réguliers. Nous présentons, sur la figure III-20, les deux maillages de la surface de glissement.

Pour la prise en compte du mouvement avec le maillage M_3 , nous proposons une méthode hybride. Dans la partie entrefer le mouvement est modélisé à l'aide de la méthode d'interpolation du 2^{ème} ordre et, dans la boîte d'air (au niveau des têtes de bobines) nous utilisons la méthode d'interpolation de surface. La combinaison de ces deux techniques permet d'associer les avantages de chacune d'entre elles avec une simplicité de la mise en œuvre.

Dans le chapitre II on a montré que les méthodes Mortar et "Overlapping" donnent les meilleurs résultats. Cependant, nous n'avons pas retenu la méthode Mortar afin de limiter le stockage de la matrice et par conséquent les temps de calcul. Sur un autre plan, la méthode "Overlapping" est très difficile à mettre en œuvre avec un maillage irrégulier. De plus, comme elle s'applique sur un volume et non sur une surface de glissement, il est extrêmement délicat de la combiner avec la méthode d'interpolation de surface qui est bien adaptée à un maillage non régulier.

Sur la surface de glissement, formée d'éléments réguliers, nous pouvons facilement appliquer l'interpolation linéaire du 2^{ème} ordre pour recoller les inconnues fixes et mobiles. Par exemple, comme on peut l'observer sur la figure III-21, l'inconnue $I_{5'}$ peut être exprimée à partir des inconnues I_5 , I_8 et I_{11} . De même, l'inconnue $I_{21'}$ sera exprimée à partir de I_{21} , I_{22} et I_{23} . Par ailleurs, sur la surface de glissement, discrétisée par des triangles irréguliers, les inconnues mobiles peuvent être exprimées à partir des inconnues fixes avec des fonctions d'approximation de surface. A titre d'exemple, $I_{2'}$ pourra être exprimée en fonction I_2 , I_5 , I_6 et

I_6 en fonction de I_6, I_9, I_{10} . De ce fait, nous pouvons exprimer toutes les inconnues de la partie mobiles de la surface de glissement en fonction des inconnues fixes.

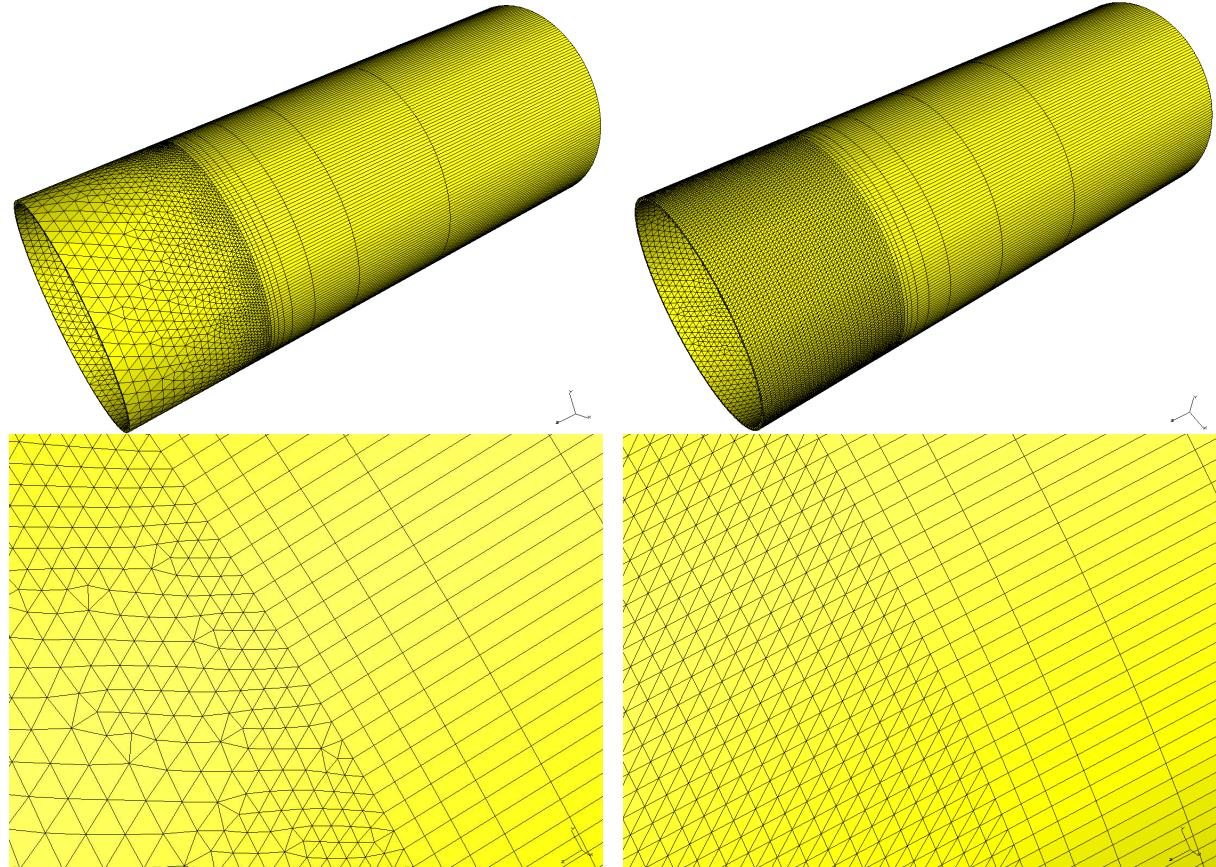


Fig.III-20.a Maillage M_3

Fig. III-20.b Maillage M_4

Figure III-20: Présentation des deux maillages de la surface de glissement

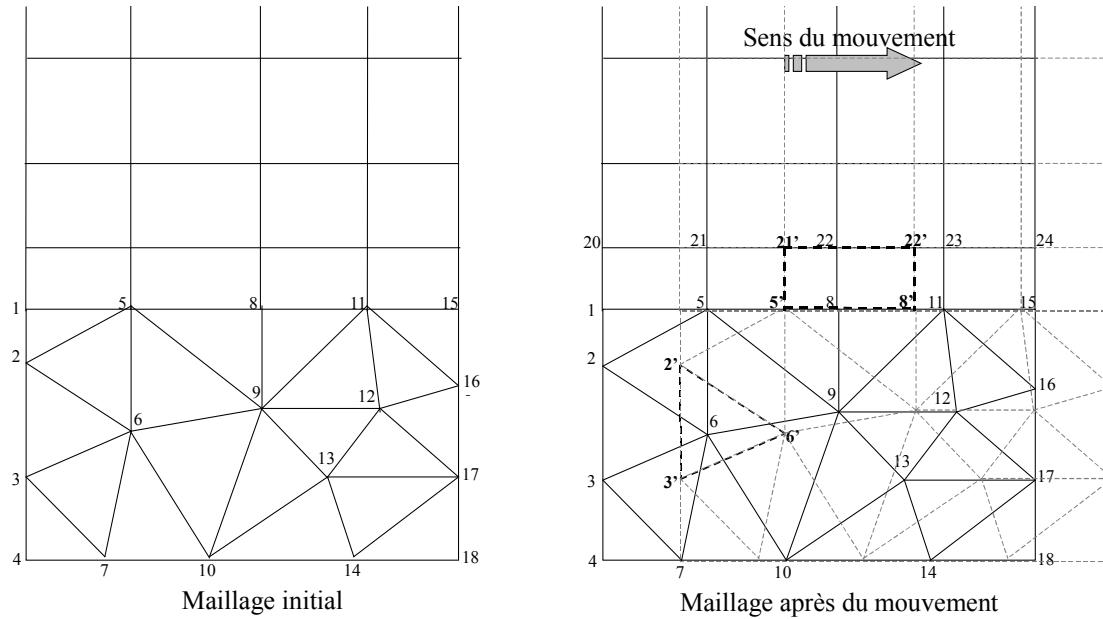


Figure III-21: Modélisation du mouvement avec un maillage irrégulier

Pour le maillage M_4 , la méthode du pas bloqué peut être utilisée. De ce fait, nous aurons une solution de référence pour vérifier les résultats obtenus avec le maillage M_3 .

Nous avons reporté, dans le tableau III-7, les principales caractéristiques des deux maillages. Nous pouvons remarquer que le fait d'imposer une contrainte, sur la surface de glissement, engendre plus de cent mille éléments supplémentaires au maillage et donc d'inconnues. Ce premier résultat nous conforte dans le choix d'associer les méthodes d'interpolation de surface et du 2^{ème} ordre

| | Type d'éléments | Nombre de nœuds | Nombre d'éléments | Discrétisation de l'entrefer: $\Delta\theta_{mail}$ |
|-------|----------------------|-----------------|-------------------|---|
| M_3 | Tétrraèdres +Prismes | 134898 | 500995 | $2\pi/240$ |
| M_4 | tétrraèdres | 154996 | 609989 | $2\pi/240$ |

Tableau III-7 Propriétés des maillages M_3 et M_4

III.4.3 Conditions de simulations

Par rapport au modèle extrudé (sans têtes de bobines) une boîte d'air, comprenant les têtes de bobines, a été ajoutée. Comme indiqué au début de ce paragraphe, nous avons imposé une condition au limite de type $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}=0$ sur toutes les surfaces extérieures du domaine d'étude (cf figure III-22).

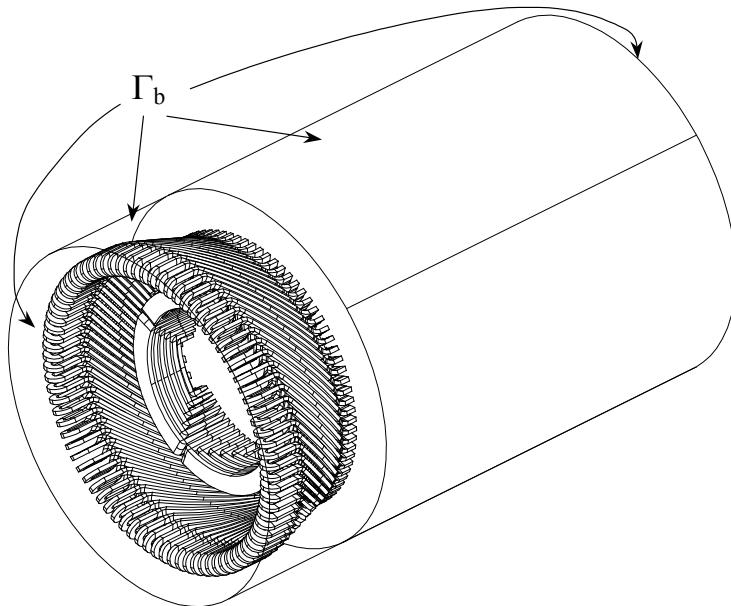


Figure III-22: Conditions aux limites sur la frontière du domaine

Dans la partie entrefer des maillages M_3 et M_4 , nous aurons $\Delta\theta_{mail}=2\pi/240$. Pour la suite nous prendrons le pas de calcul $\Delta\theta_{mvt}=\Delta\theta_{mail}$. La caractéristique non linéaire des matériaux ferromagnétiques reste, bien entendu, la même.

Comme nous utilisons des méthodes d'interpolation pour simuler le mouvement les équations de la magnétostatique seront résolues avec la formulation en potentiel scalaire.

Pour valider nos modèles, nous allons déterminer la caractéristique à vide de la machine et vérifier les points de fonctionnement en charge dans le cas où les courants sont imposés.

III.4.4 Résultats de la simulation

III.4.4.1 Essai à vide

Afin d'illustrer l'influence des têtes de bobines, nous présentons plusieurs résultats obtenus à vide sur le maillage M3 avec un courant d'excitation de 3000A

Sur la figure III-23, nous présentons la distribution de l'induction magnétique au milieu de l'entrefer du turboalternateur. Nous pouvons remarquer sur cette figure la présence des 4 pôles magnétiques ainsi que les fuites du champ magnétiques dues à la prise en compte des têtes de bobines.

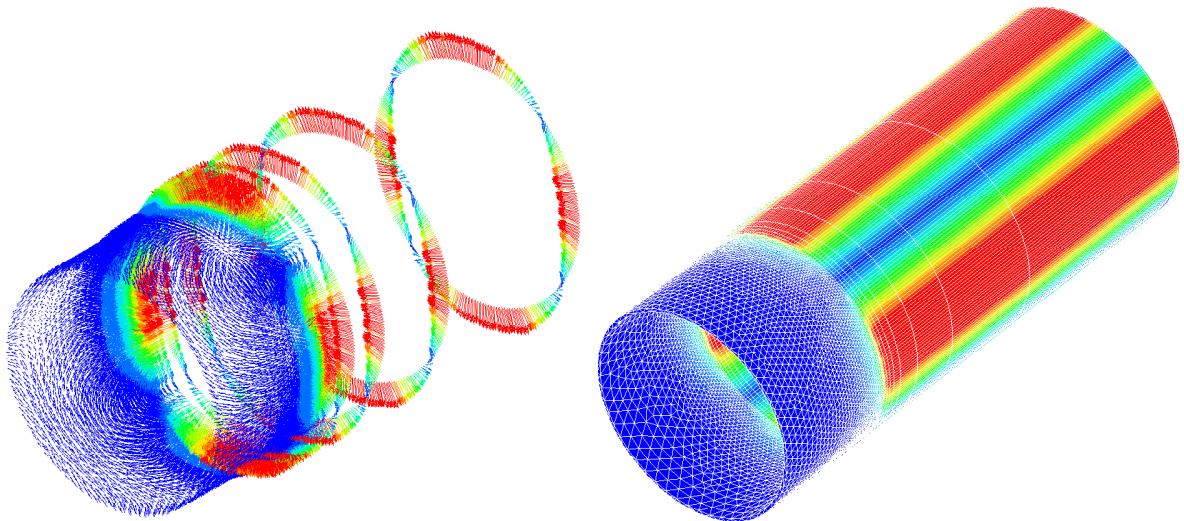


Figure III-23: Distribution de l'induction magnétique dans le milieu d'entrefer

Afin d'observer l'influence des têtes de bobines, sur la figure III-24, nous comparons les distributions du champ magnétique obtenues sur la partie frontale (fig. III-24.a) et sur la surface au milieu de la machine (fig. III-24.b). Nous pouvons noter une différence entre les deux distributions sur la valeur de l'induction au niveau des pieds d'encoches.

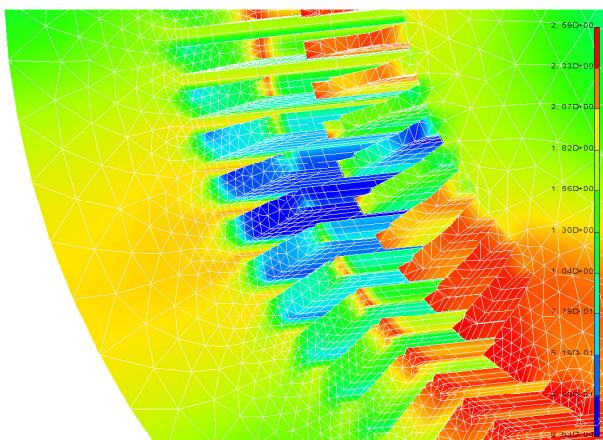


Fig. III-24. a

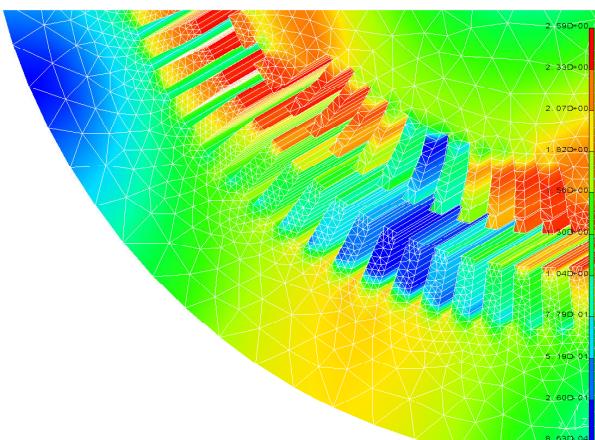


Fig. III-24. b

Figure III-24: Comparaison la répartition de l'induction magnétique sur la surface frontale et la surface au milieu de la machine.

Sur la figure III-25, nous représentons la distribution des fuites magnétiques autour des têtes de bobines dans un plan longitudinal. Dans ce cas (à vide), les fuites sont principales dues au courant inducteur (3000 A).

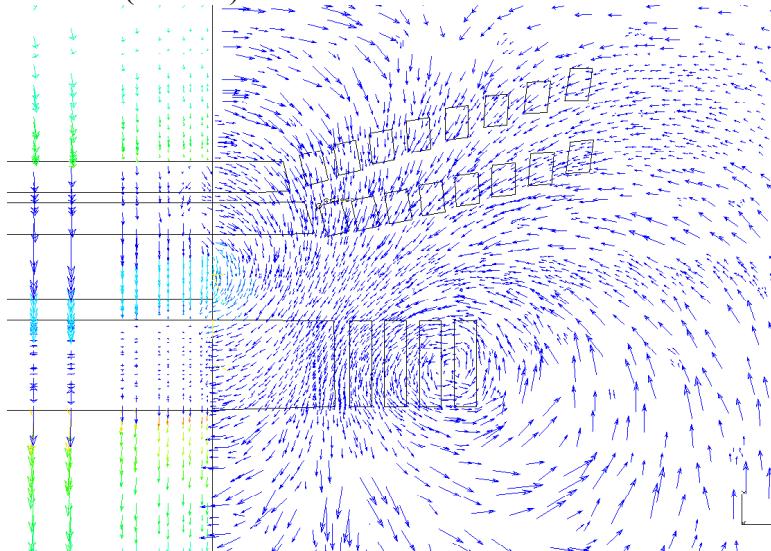


Figure III-25: Distribution de l'induction magnétique autour des têtes de bobines

Nous avons calculé la f.e.m. à vide avec la méthode hybride (maillage M₃) et la méthode du pas bloqué (maillage M₄). Sur la figure III-26, pour une valeur du courant d'excitation de 3000A, nous présentons l'évolution de la f.e.m., obtenue avec ces deux méthodes, au voisinage du maximum sur un intervalle de temps de 4ms.

Sur cette figure, on peut noter que les résultats obtenus avec la méthode hybride (méthode d'interpolation de surface associée à la méthode d'interpolation du 2^{ème} ordre) sont satisfaisants. De plus, l'écart entre les deux courbes, issues des deux maillages, est inférieur à 0,2%. Puisque les maillages M₃ et M₄ sont identiques dans la partie extrudée ainsi qu'au niveau des têtes de bobines du stator et du rotor, la différence réside uniquement dans la zone liée à la surface de glissement de la boîte d'air. Dans ces conditions, à partir de la bonne concordance des deux courbes, nous pouvons vérifier la validité de la méthode hybride de simulation du mouvement.

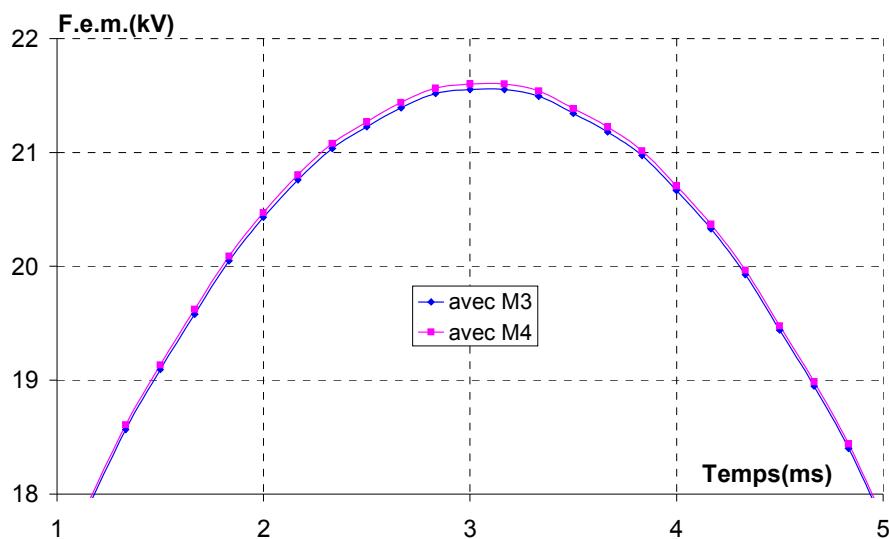


Figure III-26: Comparaison de la f.e.m. de la phase "a" obtenue avec la méthode hybride (maillage M₃) et la méthode du pas bloqué (maillage M₄), I_e=3000A

Avec les maillages M_3 et M_4 nous avons déterminé la force électromotrice de la machine pour différentes valeurs du courant d'excitation. Les résultats obtenus sont pratiquement équivalents comme nous l'avons vu sur la figure III-26.

Afin d'effectuer une comparaison nous avons tracé la caractéristique à vide (fig. III-27) obtenue avec le maillage M_1 (2D extrudé), le maillage M_3 et expérimentalement. A partir de la figure on note que l'amplitude de la f.e.m. à vide en tenant compte des têtes de bobines, est légèrement supérieure (entre 2% et 3%) à celle sans têtes de bobines.

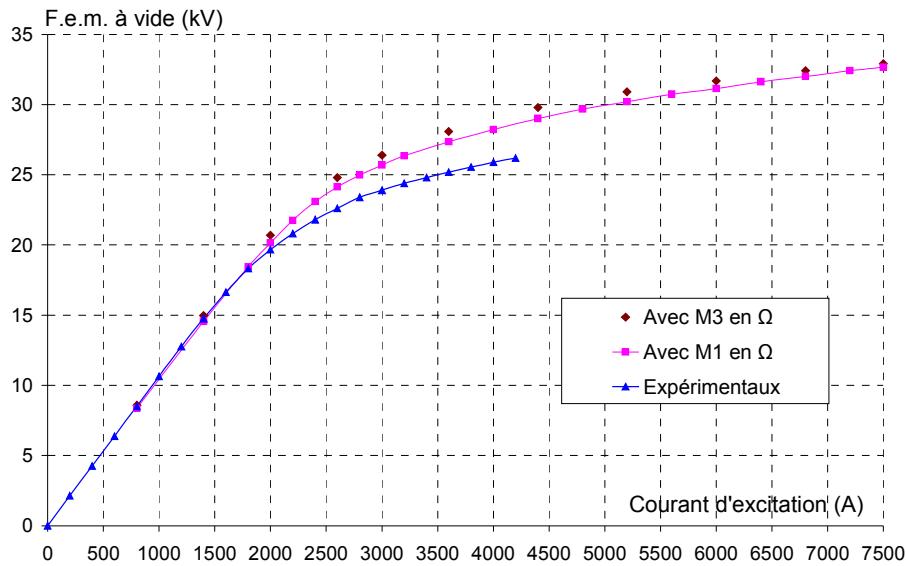


Figure III-27: Comparaison la caractéristique à vide entre deux phases

III.4.4.2 Résultats en courants imposés

Nous représentons sur la figure III-28 les fuites magnétiques dans un plan longitudinal pour l'essai en charge du 1^{er} point de fonctionnement. Contrairement, à la distribution de l'induction magnétique représentée sur la figure III-25, nous pouvons remarquer l'influence du courant dans les bobines statoriques qui a pour effet de concentrer le flux entre les têtes de bobines statoriques et rotoriques.

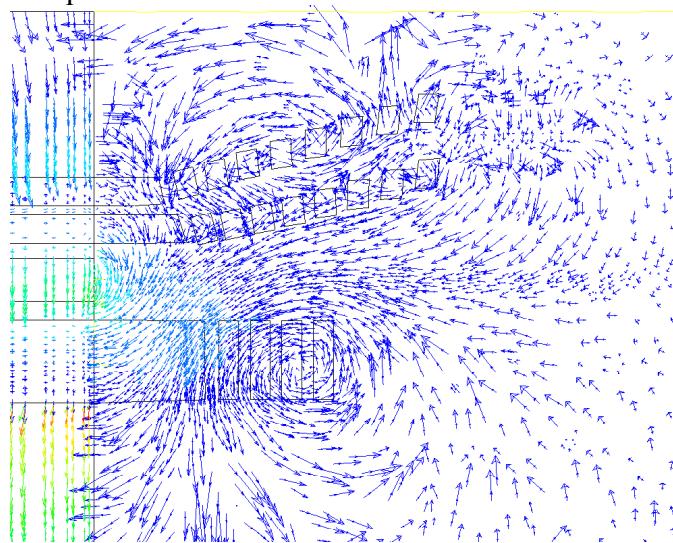


Figure III-28: Distribution de l'induction magnétique autour des têtes de bobines

Le tableau III-8 présente les résultats obtenus pour les cinq points de fonctionnement lorsque le courant dans les enroulements du stator sont imposés. Dans ce tableau on peut noter que les résultats du calcul, comparés avec l'expérience, sont légèrement supérieurs par rapport au cas extrudé présenté dans le tableau III-5.

| Points de fonctionnement (fourni par EDF) | | | | | | Résultats calcul | | en Ω | |
|---|-----------|------------|---------------|-----------|----------|------------------|------------------|-------------------|-----------------|
| U (KV) | P (MW) | Q (MVA) | I_{abc} (A) | I_e (A) | δ | φ | Couple (MN.M) | Puissance (MW) | $\varepsilon\%$ |
| 20 | 1485 | 719,2 | 47631 | 7466 | 41 | 25,84 | 10,4 | 1639,1 | 10,4 |
| 20 | 1485 | -577 | 45990,5 | 4883 | 79,6 | -21,23 | 10,0 | 1570,8 | 5,8 |
| 19 | 1390 | -310 | 43275,4 | 4900 | 72,5 | -12,57 | 9,3 | 1460,8 | 5,1 |
| 20,75 | 1371 | 483 | 40444,9 | 6177 | 42,4 | 19,41 | 9,27 | 1456,1 | 6,2 |
| 21,45 | 1378 | 654 | 41055,7 | 6796 | 37,1 | 25,39 | 9,6 | 1508,0 | 9,4 |

Tableau III-8 Vérification des points de fonctionnement avec les têtes de bobines

Nous avons simulé, le point de fonctionnement n°1, avec les deux méthodes, hybrides et pas bloqué. Pour les maillages M_3 et M_4 nous présentons sur la figure III-29 l'évolution du couple en fonction du temps, en absence de valeur moyenne. On note qu'il y a une bonne concordance entre les deux courbes. Dans ces conditions, on peut vérifier, pour un fonctionnement en charge, la validité de l'approche hybride pour la prise en compte du mouvement.

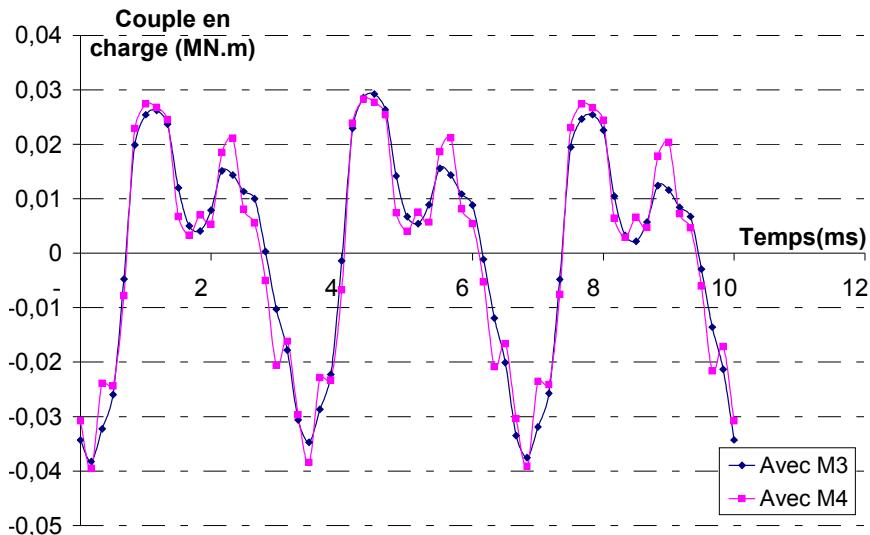


Figure III-29 Comparaison des oscillations du couple en charge avec la méthode hybride (maillage M_3) et méthode du pas bloqué (maillage M_4)

III.4.5 Conclusion

Pour la modélisation de la machine avec les têtes de bobines, deux maillages ont été utilisés. Le premier, M_3 que l'on peut réaliser sans trop de contraintes conduit à un maillage irrégulier pour la surface de glissement située dans la zone des têtes de bobines. Le second, M_4 est un maillage avec une contrainte sur toute la surface de glissement ce qui implique un plus grand nombre d'éléments et d'inconnues. Pour M_3 nous avons proposé, pour la prise en

compte du mouvement, une méthode hybride. En revanche, le maillage M₄, associé à la méthode du pas bloqué, sert de référence.

Les résultats obtenus, à vide et pour cinq points de fonctionnement montrent que la méthode hybride donne des résultats tout à fait satisfaisants.

De plus, une analyse des temps de calcul (cf. Tab. III-9) montre que pour une inversion du système matriciel les temps de calcul "de l'approche hybride" sont de 20% inférieurs à la méthode du pas bloqué.

| <i>Formulation en potentiel scalaire (temps CPU pour un pas de mouvement)</i> | | | | |
|---|---------------------------------------|--|---------------------|----------------------------|
| <i>Méthodes</i> | <i>Temps de CPU (s)</i> | | <i>Nombre de GC</i> | <i>Stockage du système</i> |
| | <i>Un pas de mouvement (linéaire)</i> | <i>Nombre itérations de la non-linéarité</i> | | |
| <i>Hybride avec M3</i> | 8,2(min) | 50 | 622 | 1402835 |
| <i>Pas ploqué avec M4</i> | 10,2(min) | 76 | 450 | 1407623 |

Tableau III-9 Comparaison des temps de calcul avec les têtes de bobines

CONCLUSION GENERALE

Dans ce mémoire, pour la simulation du mouvement nous avons étudié et analysé sept méthodes. La méthode du pas bloqué, qui est la plus utilisée, a été prise comme référence cas, quelle que soit la position de la partie mobile par rapport à la partie fixe, elle conduit à un maillage conforme. Cet avantage majeur impose une contrainte pénalisante au niveau du maillage qui doit être régulier sur la surface de glissement. Cette méthode a été développée avec les formulations en potentiel scalaire et vecteur.

La méthode d'interpolation du 1^{er} ordre est relativement simple à mettre en œuvre. En fait, on exprime un nœud mobile en fonction des deux nœuds fixes les plus proches. D'un point de vue numérique, on modifie uniquement les matrices élémentaires. Cette méthode ne nécessite pas un maillage régulier de l'entrefer. Néanmoins nous l'avons développé dans le cas où le maillage est de type 2D extrudé. Nous avons proposé une extension au 2^{ème} ordre en associant au nœud mobile les trois nœuds fixes les plus proches. Les résultats obtenus, principalement dans le cas de la machine à aimants permanents montrent que cette approche au 2^{ème} ordre améliore notablement les résultats. Afin de s'affranchir d'un maillage extrudé, nous avons proposé la méthode d'interpolation de surface qui permet d'exprimer chaque nœud mobile en fonction des nœuds de l'élément fixe dans lequel il se trouve. Cette méthode a été mise au point et les résultats obtenus sont tout à fait acceptables. Ces différentes méthodes d'interpolation étant basées sur les valeurs nodales nous les avons naturellement développées autour de la formulation en potentiel scalaire.

La méthode Mortar, dans le cadre de notre étude, a consisté à imposer au sens faible, l'égalité du potentiel scalaire entre les parties fixe et mobile. Dans le cadre de ce travail, la méthode a été développée pour un maillage 2D extrudé. Il en résulte que pour la simulation d'un mouvement de rotation un nœud du maillage mobile se trouve lié à tous les nœuds fixes situés sur le même rayon. On a vu au niveau numérique qu'une telle contrainte pénalise la méthode. Néanmoins on retiendra que les résultats numériques obtenus sont tout à fait excellents comme l'ont montré les applications. En fait, on peut considérer la méthode Mortar comme une généralisation de la méthode d'interpolation.

La bande de mouvement, qui nécessite la définition d'une zone de recouvrement, a été développée dans le cas des formulations en potentiel scalaire et vecteur. D'un point de vue numérique cette approche est relativement attrayante. Cependant, la déformation du maillage conduit à des oscillations numériques.

La méthode "Overlapping" s'appuie, comme la bande de mouvement, sur une zone de recouvrement. En fait, on reconstruit un nouveau maillage en fonction de la configuration relative à la position de la partie fixe par rapport à la partie mobile. Les performances du

traitement numérique de cette méthode , tel que nous avons utilisées, sont tout à fait excellentes. De plus, les résultats obtenus sont semblables à ceux de la méthode Mortar. Cependant, nous ne l'avons développée que dans le cas de la formulation en potentiel scalaire et pour un maillage extrudé.

L'analyse de ces techniques de simulation du mouvement a mis en exergue la difficulté du problème si l'on désire avoir la méthode la plus performante quelle que soit la formulation utilisée et quel que soit le type d'éléments (tétraèdres, hexaèdres ou prismes). Néanmoins, si l'on s'intéresse à la qualité de la solution, dans le cas d'un maillage extrudé, les méthodes Mortar et "Overlapping" sont les plus performantes.

En revanche, comme nous l'avons montré dans l'exemple du turboalternateur simulé avec les têtes de bobines, la solution consistant à coupler la méthode d'interpolation du 2^{ème} ordre avec la méthode d'interpolation de surface est parfaitement envisageable. Elle a donné d'excellents résultats tant du point de vue du traitement numérique que de la qualité de la solution.

Comme perspectives de ce travail, il serait intéressant d'approfondir les possibilités de la méthode "Overlapping" au cas des éléments d'arêtes afin de développer la formulation en potentiel vecteur. De plus, comme cette méthode est précise et utilise une zone de recouvrement, il serait envisageable de prendre en compte des problèmes excentricités. Il serait aussi intéressant d'analyser les possibilités de cette méthode pour la connexion de deux maillages quelconques (non réguliers) à travers la zone de recouvrement.

ANNEXES

Annexe I: Méthode Mortar calcul des matrices

Dans cette annexe, nous présentons le détail du calcul des matrices de passage [C] et [D] pour la méthode "Mortar". Afin de ne pas alourdir les développements, nous prendrons un exemple simple soit: un maillage régulier avec seize éléments hexaédriques et des conditions de périodicité.

Dans un premier temps, on considérera un cas 2D, dont le côté des quadrangles est égal à 1. Nous développerons alors les calculs des matrices [C] et [D] sur une ligne d'intégration. Dans un deuxième temps, nous aborderons le cas 3D sur la base du maillage 2D extrudé par une couche d'éléments. Nous calculerons alors les matrices que nous noterons [C'] et [D'].

A-I-1 Cas 2D, intégration sur une ligne

Nous présentons, sur les figures A-I-1 et A-I-2 le maillage d'étude pour la position initiale et après un déplacement " α ", inférieur à un pas du maillage. Il est à noter que nous considérons un maillage constitué de quadrangle régulier ce qui sera le cas dans toute notre étude.

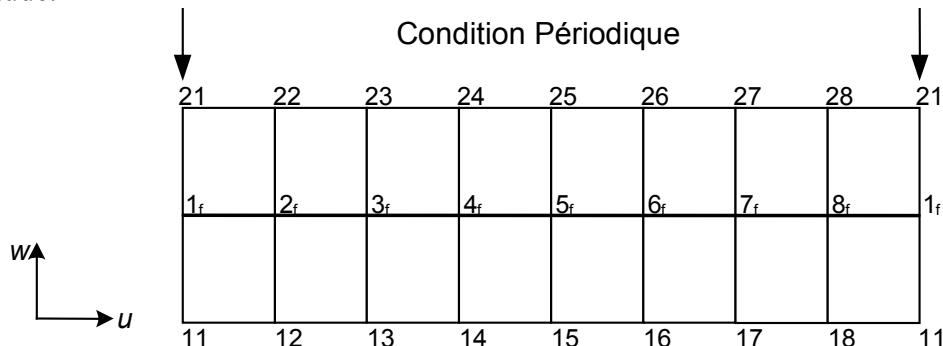


Figure A-I-1: Exemple étudié; position initiale

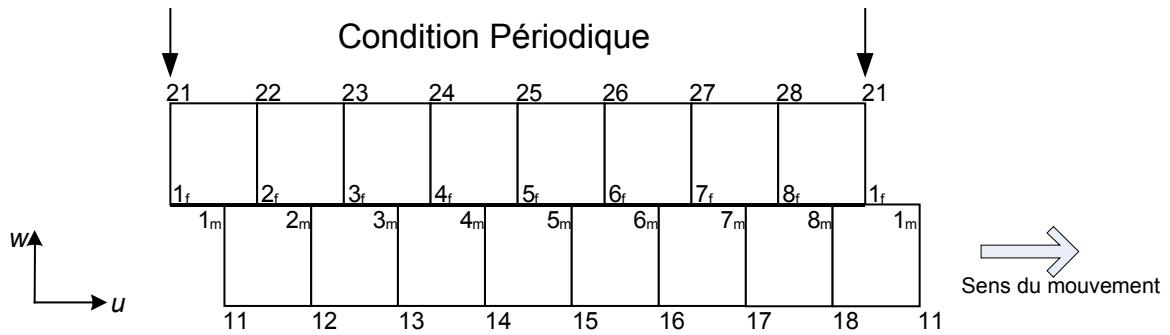


Figure A-I-2: Exemple étudié; position après mouvement

Les développements étant effectués pour la formulation en potentiel scalaire, on note Ω les inconnues. On rappelle que l'on a pour les inconnues fixes et mobiles les vecteurs notés respectivement $[\Omega_f]$ et $[\Omega_m]$ définis, dans le cas étudié, par les termes donnés par les expressions suivantes:

$$[\Omega_f] = [\Omega_{1_f} \quad \Omega_{2_f} \quad \dots \quad \Omega_{8_f}]^T \quad (\text{A-I-1})$$

$$[\Omega_m] = [\Omega_{1_m} \quad \Omega_{2_m} \quad \dots \quad \Omega_{8_m}]^T \quad (\text{A-I-2})$$

Si on reprend l'équation (II-27), on a dans notre cas:

$$[C]_{8 \times 8} [\Omega_{m\Gamma}]_8 = [D]_{8 \times 8} [\Omega_{f\Gamma}]_8 \quad (\text{A-I-3})$$

où, les termes en indice de chaque matrice indiquent les dimensions.

On considère, un déplacement " α " de la partie fixe par rapport à la partie mobile que l'on défini, dans notre cas, pour la relation:

$$\alpha = \frac{l_{1f,1m}}{l_{1f,2f}} \quad (\text{A-I-4})$$

on aura alors: $0 \leq \alpha \leq 1$. Dans ces conditions, nous avons représenté sur la figure A-I-3, la configuration des nœuds et des fonctions d'approximation correspondantes en faisant apparaître la fonction d'approximation w_{1m} décalées de " α ".

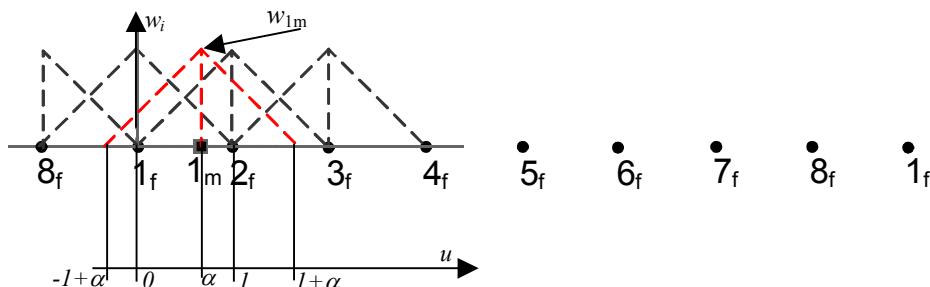


Figure A-I-3: Configuration des fonctions d'approximation pour un déplacement, $0 \leq \alpha \leq 1$.

On observe, sur cette figure que, sur l'intervalle $(-1+\alpha, 1+\alpha)$ qui correspond à la valeur non nulle de la fonction w_{1m} , les fonctions d'approximation w_{1f}, w_{2f}, w_{3f} et w_{8f} sont différentes

de zéro. Nous allons maintenant calculer les termes de la matrice [D] en rappelant que le terme élémentaire a pour expression:

$$d(i, k) = \int_{\Gamma_{f-m}} w_{i_m} w_{k_f} du \quad (A-I-5)$$

où, w_{i_m} représente la fonction de base aux nœuds mobiles et w_{i_f} aux nœuds fixes.

Pour le calcul de la première ligne de la matrice [D], on utilise les propriétés de la fonction w_{1m} . Nous avons donc représenté, dans le tableau A-I-1, pour les quatre intervalles que l'on observe sur la figure A-I-3, les expressions des différentes fonctions.

| | $\alpha - 1 \leq u \leq 0$ | $0 \leq u \leq \alpha$ | $\alpha \leq u \leq 1$ | $1 \leq u \leq 1 + \alpha$ |
|----------|----------------------------|------------------------|------------------------|----------------------------|
| w_{1m} | $1 - \alpha + u$ | $1 - \alpha + u$ | $1 + \alpha - u$ | $1 + \alpha - u$ |
| w_{1f} | $1 + u$ | $1 - u$ | $1 - u$ | 0 |
| w_{2f} | 0 | u | u | $2-u$ |
| w_{3f} | 0 | 0 | 0 | $-1+u$ |
| w_{kf} | 0 | 0 | 0 | 0 |
| w_{8f} | $-u$ | 0 | 0 | 0 |

Tableau A-I-1: Expression des fonctions d'approximation sur l'intervalle $\{-1+\alpha; 1+\alpha\}$

Le calcul des différentes intégrales conduit au résultat suivant:

| $k_f =$ | 1_f | 2_f | 3_f | 4_f | 5_f | 6_f | 7_f | 8_f |
|---------------|---|---|----------------------|-------|-------|-------|-------|--------------------------|
| $D(1_m, k_f)$ | $\frac{\alpha^3}{2} - \alpha^2 + \frac{2}{3}$ | $\frac{(1-\alpha)^3}{2} - (1-\alpha)^2 + \frac{2}{3}$ | $\frac{\alpha^3}{6}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{(1-\alpha)^3}{6}$ |

Tableau A-I-2 : Expression de la première ligne de [D]

On peut montrer que la deuxième ligne de la matrice pour être exprimée à partir de la première par une permutation circulaire et ainsi de suite pour les autres lignes. On obtient ainsi la matrice [D].

Pour calculer la matrice [C] il suffit de faire " $\alpha=0$ " dans l'expression de la matrice [D]. De plus, cette matrice concernant les termes en mouvement entre eux, cela revient à calculer des termes de matrices élémentaires classiques. En faisant $\alpha=0$ dans le tableau A-I-1, on obtient les termes de la première ligne de la matrice [C] soit:

| $k_m =$ | 1_m | 2_m | 3_m | 4_m | 5_m | 6_m | 7_m | 8_m |
|---------------|---------------|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|
| $c(1_m, k_m)$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{6}$ |

Tableau A-I-3 : Expression de la première ligne de [C]

Comme pour la matrice [D], les autres lignes sont obtenues par une permutation circulaire.

Finalement, par inversion de la matrice [C], nous pouvons obtenir, à partir de l'expression (A-I-3) les valeurs nodales du potentiel scalaire aux nœuds mobiles en fonction

des valeurs aux nœuds fixes. On notera également que pour $\alpha=0$ le produit matriciel $[C]^{-1}[D]=[1]$. Inversement pour $0<\alpha<1$, la matrice $[C]^{-1}[D]$ est pleine. Ce résultat explique pourquoi, avec la méthode Mortar, le stockage du système éléments finis à résoudre augmente notablement.

A-I-2 Cas 3D, intégration sur une surface

A la différence du 2D, en 3D l'interface Γ_{f-m} , sur laquelle on va effectuer l'intégration, est une surface. On reprend l'exemple précédent, toujours avec seize éléments (des hexaèdres en 3D) et des conditions de périodicité. Nous avons représenté, sur la figure A-I-4, le "maillage" étudié dans la position initiale et sur la figure A-I-5 le maillage lorsqu'on a effectué un déplacement " α ".

Si on considère maintenant les expressions (A-I-1), (A-I-2) et (A-I-3), elles s'écrivent sous la forme suivante, en tenant compte que l'interface est constituée de seize nœuds:

$$[\Omega'_f] = [\Omega'_{1f}, \Omega'_{2f} \dots \dots \Omega'_{8f} \Omega'_{81f} \Omega'_{82f} \dots \dots \Omega'_{16f}]^T \quad (\text{A-I-6})$$

$$[\Omega'_m] = [\Omega'_{1m}, \Omega'_{2m} \dots \dots \Omega'_{8m} \Omega'_{81m} \Omega'_{82m} \dots \dots \Omega'_{16m}]^T \quad (\text{A-I-7})$$

$$[C']_{6x16} [\Omega'_{m\Gamma}]_6 = [D']_{6x16} [\Omega'_{f\Gamma}]_6 \quad (\text{A-I-8})$$

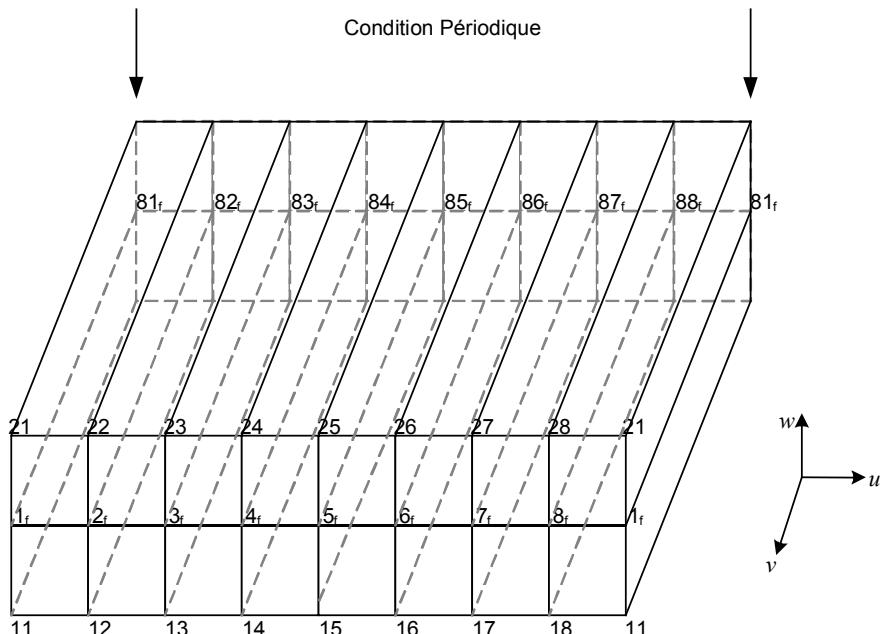


Figure A-I-4: Maillage étudié dans la position initiale

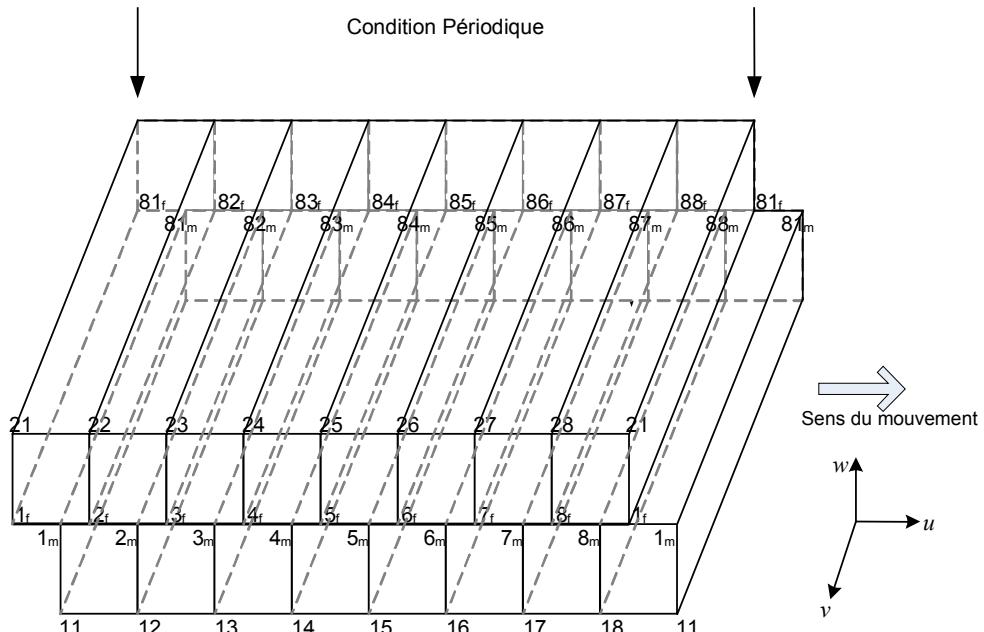


Figure A-I-5: Maillage étudié après un déplacement " α ".

On trouvera, sur la figure A-I-6, une partie des fonctions d'approximation et nous définissons également deux groupes de nœuds, notés A et B. De plus, on prend comme origine le nœud "81_f" et on note la distance entre les deux nœuds $L_{81f-1f} = h$. On observe, sur cette figure que, comme dans le cas 2D, sur l'intervalle $\{-1+\alpha, 1+\alpha\}$ avec $0 \leq v \leq h$ qui correspond à la valeur non nulle de la fonction w_{1m} , les fonctions d'approximation w_{1f}, w_{2f}, w_{3f} et w_{8f} du groupe A, sont différentes de zéro ainsi que $w_{81f}, w_{82f}, w_{83f}$ et w_{88f} appartenant au groupe B. Sur le même intervalle, pour la fonction d'approximation du groupe B w_{81m} non nulle, les fonctions d'approximation w_{1f}, w_{2f}, w_{3f} et w_{8f} du groupe A et $w_{81f}, w_{82f}, w_{83f}$ et w_{88f} du groupe B, sont également différentes de zéro.

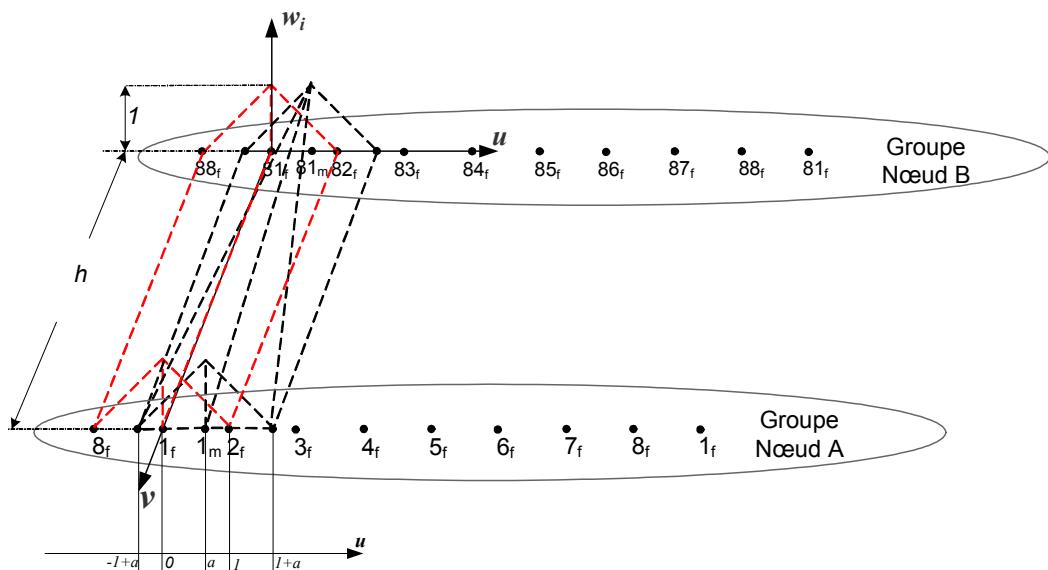


Figure A-I-6: Allure des fonctions d'approximation nodale et définition des groupes de nœuds

Nous avons donc représenté, dans le tableau A-I-4, pour les quatre intervalles que l'on observe sur la figure A-I-6, les expressions des fonctions d'approximation des nœuds fixes du groupe A référencées par rapport au nœud "1 mobile".

On trouvera de la même façon, dans le tableau A-I-5, les expressions des fonctions d'approximation des nœuds fixes du groupe B référencées par rapport au nœud "81 mobile".

| | $\alpha - 1 \leq u \leq 0$ $0 \leq v \leq h$ | $0 \leq u \leq \alpha$ $0 \leq v \leq h$ | $\alpha \leq u \leq 1$ $0 \leq v \leq h$ | $1 \leq u \leq 1 + \alpha$ $0 \leq v \leq h$ |
|----------|---|---|---|---|
| w_{1m} | $(1-\alpha+u)\left(\frac{v}{h}\right)$ | $(1-\alpha+u)\left(\frac{v}{h}\right)$ | $(1+\alpha-u)\left(\frac{v}{h}\right)$ | $(1+\alpha-u)\left(\frac{v}{h}\right)$ |
| w_{1f} | $(1+u)\left(\frac{v}{h}\right)$ | $(1-u)\left(\frac{v}{h}\right)$ | $(1-u)\left(\frac{v}{h}\right)$ | 0 |
| w_{2f} | 0 | $u\left(\frac{v}{h}\right)$ | $u\left(\frac{v}{h}\right)$ | $(2-u)\left(\frac{v}{h}\right)$ |
| w_{3f} | 0 | 0 | 0 | $(-1+u)\left(\frac{v}{h}\right)$ |
| w_{kf} | 0 | 0 | 0 | 0 |
| w_{8f} | $-u\left(\frac{v}{h}\right)$ | 0 | 0 | 0 |

Tableau A-I-4: Expression des fonctions d'approximation du groupe A sur l'intervalle $\{-1+\alpha; 1+\alpha\}$

| | $\alpha - 1 \leq u \leq 0$ $0 \leq v \leq h$ | $0 \leq u \leq \alpha$ $0 \leq v \leq h$ | $\alpha \leq u \leq 1$ $0 \leq v \leq h$ | $1 \leq u \leq 1 + \alpha$ $0 \leq v \leq h$ |
|-----------|---|---|---|---|
| w_{81m} | $(1-\alpha+u)\left(1-\frac{v}{h}\right)$ | $(1-\alpha+u)\left(1-\frac{v}{h}\right)$ | $(1+\alpha-u)\left(1-\frac{v}{h}\right)$ | $(1+\alpha-u)\left(1-\frac{v}{h}\right)$ |
| w_{81f} | $(1+u)\left(1-\frac{v}{h}\right)$ | $(1-u)\left(1-\frac{v}{h}\right)$ | $(1-u)\left(1-\frac{v}{h}\right)$ | 0 |
| w_{82f} | 0 | $u\left(1-\frac{v}{h}\right)$ | $u\left(1-\frac{v}{h}\right)$ | $(2-u)\left(1-\frac{v}{h}\right)$ |
| w_{83f} | 0 | 0 | 0 | $(-1+u)\left(1-\frac{v}{h}\right)$ |
| w_{kf} | 0 | 0 | 0 | 0 |
| w_{88f} | $-u\left(1-\frac{v}{h}\right)$ | 0 | 0 | 0 |

Tableau A-I-5: Expression des fonctions d'approximation du groupe B sur l'intervalle $\{-1+\alpha; 1+\alpha\}$

Nous allons maintenant calculer la matrice [D'] en rappelant que le terme élémentaire a pour expression:

$$d(i,k) = \iint_{\Gamma_{f-m}} w_{i_m} w_{k_f} du dv \quad (A-1-9)$$

où, w_{i_m} représente la fonction de base aux nœuds mobiles et w_{i_f} aux nœuds fixes.

Pour simplifier les développements, nous allons utiliser les propriétés des deux groupes des nœuds A et B définis sur la figure A-I-6. On peut ainsi réécrire les équations (A-I-6), (A-I-7) de la façon suivante:

$$[\Omega'_f] = \begin{bmatrix} [\Omega_f^A]_{8 \times 1} \\ [\Omega_f^B]_{8 \times 1} \end{bmatrix} \quad (A-I-10)$$

$$[\Omega'_m] = \begin{bmatrix} [\Omega_m^A]_{8 \times 1} \\ [\Omega_m^B]_{8 \times 1} \end{bmatrix} \quad (A-I-11)$$

où les termes des vecteurs correspondent aux valeurs nodales définies par:

$$[\Omega_f^A]_{8 \times 1} = [\Omega_{1_f} \quad \Omega_{2_f} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \Omega_{8_f}]^T \quad (A-I-12)$$

$$[\Omega_f^B]_{8 \times 1} = [\Omega_{81_f} \quad \Omega_{82_f} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \Omega_{88_f}]^T \quad (A-I-13)$$

$$[\Omega_m^A]_{8 \times 1} = [\Omega_{1_m} \quad \Omega_{2_m} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \Omega_{8_m}]^T \quad (A-I-14)$$

$$[\Omega_m^B]_{8 \times 1} = [\Omega_{81_m} \quad \Omega_{82_m} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \Omega_{88_m}]^T \quad (A-I-15)$$

Si on considère la décomposition par blocs la matrice $[D']$, définies par l'équation (A-I-8), peut s'écrire sous la forme:

$$[D']_{16 \times 16} = \begin{bmatrix} [D'_{AA}]_{8 \times 8} & [D'_{AB}]_{8 \times 8} \\ [D'_{BA}]_{8 \times 8} & [D'_{BB}]_{8 \times 8} \end{bmatrix} \quad (A-I-16)$$

où, les termes de la sous matrice $[D'_{AA}]_{8 \times 8}$ sont obtenus par l'intégration des fonctions de base des nœuds de groupe A. Il en est de même pour les termes de $[D'_{BB}]_{8 \times 8}$ obtenus par l'intégration des fonctions de base des nœuds de groupe B. Enfin, on applique le même raisonnement pour calculer les sous matrices $[D'_{AB}]_{8 \times 8}$, $[D'_{BA}]_{8 \times 8}$, qui l'on obtiendra en intégrant les fonctions de base des nœuds entre les groupes A et B.

Pour le calcul de la première ligne des matrices $[D'_{AA}]_{8 \times 8}$, $[D'_{BB}]_{8 \times 8}$, $[D'_{AB}]_{8 \times 8}$, $[D'_{BA}]_{8 \times 8}$, on utilise les propriétés de la fonction w_{1m} . A partir des expressions données dans les tableaux A-I-4 et A-I-5, en faisant l'intégration sur les intervalles correspondants, on obtient pour les premières lignes des sous matrices $[D'_{AA}]_{8 \times 8}$, $[D'_{BB}]_{8 \times 8}$, $[D'_{AB}]_{8 \times 8}$, $[D'_{BA}]_{8 \times 8}$, les

termes fonctions de "a" reproduits respectivement dans les tableaux A-I-6, A-I-7, A-I-8 et A-I-9.

| $k_f =$ | 1_f | 2_f | 3_f | 4_f | 5_f | 6_f | 7_f | 8_f |
|---------------|--|--|---|-------|-------|-------|-------|---|
| $d(1_m, k_f)$ | $\frac{h}{3} \left(\frac{\alpha^3}{2} - \alpha^2 + \frac{2}{3} \right)$ | $\frac{h}{3} \left(\frac{(1-\alpha)^3}{2} - (1-\alpha)^2 + \frac{2}{3} \right)$ | $\frac{h}{3} \left(\frac{\alpha^3}{6} \right)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{h}{3} \left(\frac{(1-\alpha)^3}{6} \right)$ |

Tableau A-I-6 : Expression de la première ligne de a sous matrice $[D'_{AA}]_{8 \times 8}$

| $k_f =$ | 81_f | 82_f | 83_f | 84_f | 85_f | 86_f | 87_f | 88_f |
|---------------|--|--|---|--------|--------|--------|--------|---|
| $d(1_m, k_f)$ | $\frac{h}{6} \left(\frac{\alpha^3}{2} - \alpha^2 + \frac{2}{3} \right)$ | $\frac{h}{6} \left(\frac{(1-\alpha)^3}{2} - (1-\alpha)^2 + \frac{2}{3} \right)$ | $\frac{h}{6} \left(\frac{\alpha^3}{6} \right)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{h}{6} \left(\frac{(1-\alpha)^3}{6} \right)$ |

Tableau A-I-7 : Expression de la première ligne de la sous matrice $[D'_{AB}]_{8 \times 8}$

| $k_f =$ | 1_f | 2_f | 3_f | 4_f | 5_f | 6_f | 7_f | 8_f |
|----------------|--|--|---|-------|-------|-------|-------|---|
| $d(81_m, k_f)$ | $\frac{h}{6} \left(\frac{\alpha^3}{2} - \alpha^2 + \frac{2}{3} \right)$ | $\frac{h}{6} \left(\frac{(1-\alpha)^3}{2} - (1-\alpha)^2 + \frac{2}{3} \right)$ | $\frac{h}{6} \left(\frac{\alpha^3}{6} \right)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{h}{6} \left(\frac{(1-\alpha)^3}{6} \right)$ |

Tableau A-I-8: Expression de la première ligne de la sous matrice $[D'_{BA}]_{8 \times 8}$

| $k_f =$ | 81_f | 82_f | 83_f | 84_f | 85_f | 86_f | 87_f | 88_f |
|----------------|--|--|---|--------|--------|--------|--------|---|
| $d(81_m, k_f)$ | $\frac{h}{3} \left(\frac{\alpha^3}{2} - \alpha^2 + \frac{2}{3} \right)$ | $\frac{h}{3} \left(\frac{(1-\alpha)^3}{2} - (1-\alpha)^2 + \frac{2}{3} \right)$ | $\frac{h}{3} \left(\frac{\alpha^3}{6} \right)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{h}{3} \left(\frac{(1-\alpha)^3}{6} \right)$ |

Tableau A-I-9: Expression de la première ligne de la sous matrice $[D'_{BB}]_{8 \times 8}$

Afin de déterminer les autres lignes des sous matrices on effectue, comme en 2D pour la matrice [D], une permutation circulaire.

En outre, on peut remarquer qu'il existe une propriété entre les sous matrices $[D'_{AA}]_{8 \times 8}$, $[D'_{BB}]_{8 \times 8}$, $[D'_{AB}]_{8 \times 8}$, $[D'_{BA}]_{8 \times 8}$ et la matrice $[D]_{8 \times 8}$. En fait on a:

$$[D'_{AA}]_{8 \times 8} = [D'_{BB}]_{8 \times 8} = \frac{h}{3} [D]_{8 \times 8} \quad (\text{A-I-17.a})$$

$$[D'_{AB}]_{8 \times 8} = [D'_{BA}]_{8 \times 8} = \frac{h}{6} [D]_{8 \times 8} \quad (\text{A-I-17.b})$$

Cette propriété est due au fait que le maillage hexaédrique que nous utilisons est régulier.

Finalement, la matrice [D'] pour être réécrite sous la forme suivante:

$$[D']_{16 \times 16} = \begin{bmatrix} \frac{h}{3} [D]_{8 \times 8} & \frac{h}{6} [D]_{8 \times 8} \\ \frac{h}{6} [D]_{8 \times 8} & \frac{h}{3} [D]_{8 \times 8} \end{bmatrix} \quad (\text{A-I-18})$$

Pour calculer la matrice [C'] il suffit de faire comme précédemment " $\alpha=0$ " dans l'expression de la matrice [D']. De plus, en reprenant les résultats de l'équation A-I-18, on a:

$$[C']_{16 \times 16} = \begin{bmatrix} \frac{h}{3}[C]_{8 \times 8} & \frac{h}{6}[C]_{8 \times 8} \\ \frac{h}{6}[C]_{8 \times 8} & \frac{h}{3}[C]_{8 \times 8} \end{bmatrix} \quad (\text{A-I-19})$$

Dans ces conditions, nous pouvons réécrire l'équation A-I-8 à l'aide des relations (A-I-10), (A-I-11), (A-I-18) et (A-I-19) soit :

$$\begin{bmatrix} \frac{h}{3}[C]_{8 \times 8} & \frac{h}{6}[C]_{8 \times 8} \\ \frac{h}{6}[C]_{8 \times 8} & \frac{h}{3}[C]_{8 \times 8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Omega_m^A]_{8 \times 1} \\ [\Omega_m^B]_{8 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h}{3}[D]_{8 \times 8} & \frac{h}{6}[D]_{8 \times 8} \\ \frac{h}{6}[D]_{8 \times 8} & \frac{h}{3}[D]_{8 \times 8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Omega_f^A]_{8 \times 1} \\ [\Omega_f^B]_{8 \times 1} \end{bmatrix} \quad (\text{A-I-20})$$

L'expression (A-I-20) peut être simplifiée en multipliant à gauche et à droite par $3/h$. En introduisant l'inverse de la matrice $[C']$ on a:

$$\begin{bmatrix} [\Omega_m^A]_{8 \times 1} \\ [\Omega_m^B]_{8 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C]_{8 \times 8} & \frac{1}{2}[C]_{8 \times 8} \\ \frac{1}{2}[C]_{8 \times 8} & [C]_{8 \times 8} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [D]_{8 \times 8} & \frac{1}{2}[D]_{8 \times 8} \\ \frac{1}{2}[D]_{8 \times 8} & [D]_{8 \times 8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Omega_f^A]_{8 \times 1} \\ [\Omega_f^B]_{8 \times 1} \end{bmatrix} \quad (\text{A-I-21})$$

Compte tenu des propriétés des deux matrices, il est possible d'écrire la succession de relations:

$$\begin{bmatrix} [\Omega_m^A]_{8 \times 1} \\ [\Omega_m^B]_{8 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1] & \frac{1}{2}[1] \\ \frac{1}{2}[1] & [1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [C] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [1] & \frac{1}{2}[1] \\ \frac{1}{2}[1] & [1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [D] & [0] \\ [0] & [D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Omega_f^A]_{8 \times 1} \\ [\Omega_f^B]_{8 \times 1} \end{bmatrix} \quad (\text{A-I-21})$$

où $[1]$ représente la matrice identité. En effectuant l'inversion matricielle, on peut écrire:

$$\begin{bmatrix} [\Omega_m^A]_{8 \times 1} \\ [\Omega_m^B]_{8 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [C] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [1] & \frac{1}{2}[1] \\ \frac{1}{2}[1] & [1] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [1] & \frac{1}{2}[1] \\ \frac{1}{2}[1] & [1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [D] & [0] \\ [0] & [D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Omega_f^A]_{8 \times 1} \\ [\Omega_f^B]_{8 \times 1} \end{bmatrix} \quad (\text{A-I-22})$$

que l'on peut encore écrire:

$$\begin{bmatrix} [\Omega_m^A]_{8 \times 1} \\ [\Omega_m^B]_{8 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C]^{-1} & [0] \\ [0] & [C]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [D] & [0] \\ [0] & [D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Omega_f^A]_{8 \times 1} \\ [\Omega_f^B]_{8 \times 1} \end{bmatrix} \quad (\text{A-I-23})$$

Ce qui revient à écrire deux équations linéairement indépendantes soit:

$$[\Omega_m^A]_{8 \times 1} = [C]_{8 \times 8}^{-1} \cdot [D]_{8 \times 8} \cdot [\Omega_f^A]_{8 \times 1} \quad (\text{A-I-24})$$

$$[\Omega_m^B]_{8 \times 1} = [C]_{8 \times 8}^{-1} \cdot [D]_{8 \times 8} \cdot [\Omega_f^B]_{8 \times 1} \quad (\text{A-I-25})$$

Nous venons de démontrer qu'au niveau de l'intégration sur la surface, il n'y a aucune relation entre les termes du groupe A et du groupe B.

En conclusion, dans le cas d'un maillage extrudé, l'intégration sur la surface peut être remplacée par une intégration curviligne. On peut également noter que cette propriété est utilisée dans la méthode d'interpolation du premier et du deuxième ordre.

A-I-3 Propriétés de la matrice $[M]=[C]^{-1}[D]$

Tout d'abord, nous définissons la matrice $[M] = [C]^{-1}[D]$. Dans le cas du maillage étudié, la matrice $[M]$ est carré de dimension 8x8.

Comme propriétés nous avons:

- tous les termes sont fonctions de α^3 .
- les termes d'une ligne peuvent être obtenus par la permutation des termes de la ligne précédente.
- la somme de tous les termes d'une ligne est égale 1.
- pour $0 < \alpha < 1$, la matrice $[M]$ est pleine, il n'y aucun terme nul. Si cet inconvénient ne pose pas de problème pour un petit maillage, il pénalise fortement la méthode pour des maillages importants au niveau de la surface de glissement.

Sur la figure A-I-6, on trouvera l'évolution des termes de la première ligne de la matrice $[M]$ en fonction du coefficient α .

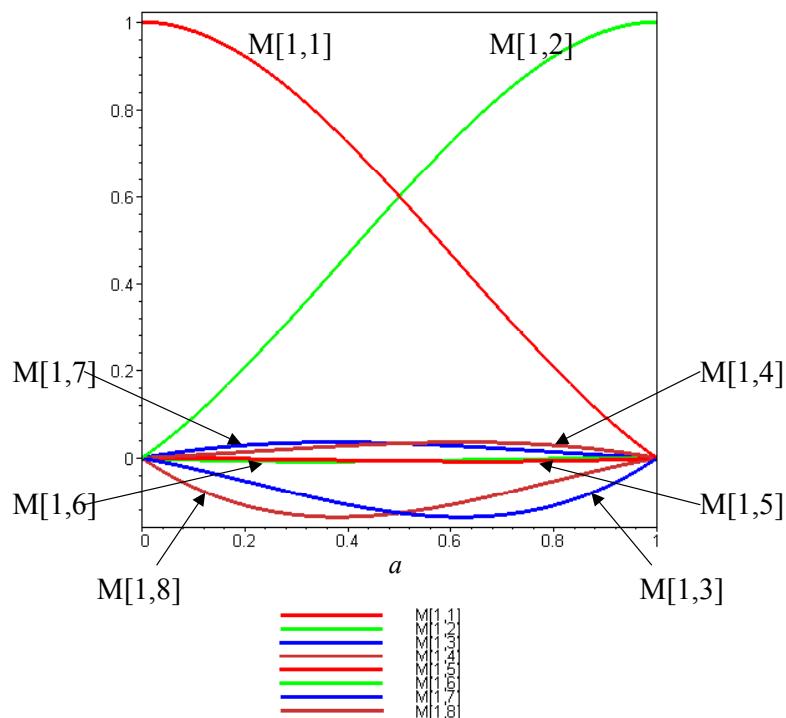


Figure A-I-6 Evolution en fonction de α des termes de la première ligne de la matrice $[M]$.

Sur la figure A-I-7 nous avons représenté l'évolution, en fonction de α , du déterminant de la matrice $[M]$. On note que pour la valeur α égale 0,5, le déterminant de $[M]$ est égal 0. En fait, c'est la déterminant de $[D]$ qui est égal 0.

Enfin, on trouvera sur la figure A-I-8, l'évolution des coefficients $M[1,1]$, $M[1,2]$ et $M[1,3]$ de la méthode Mortar avec les coefficients de la méthode d'interpolation du 1^{er} et du 2^{ème} ordre. Au niveau de ces différentes figures, on peut éventuellement considérer que la méthode Mortar est une généralisation de la méthode d'interpolation.

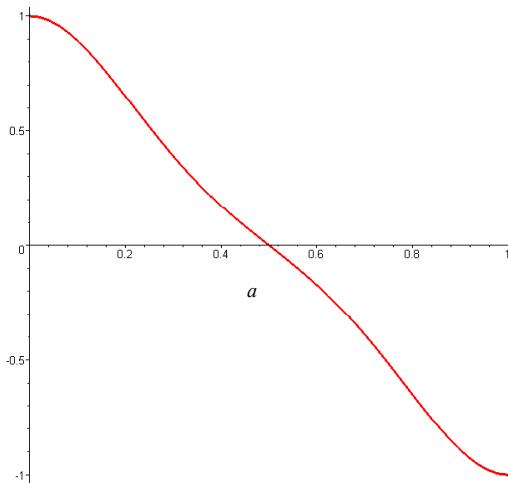


Figure A-I-7 Evolution en fonction de α du déterminant de la matrice $[M]$

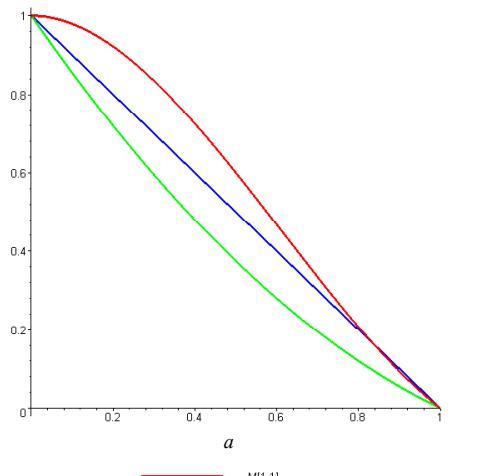


Fig. A-I-8.a

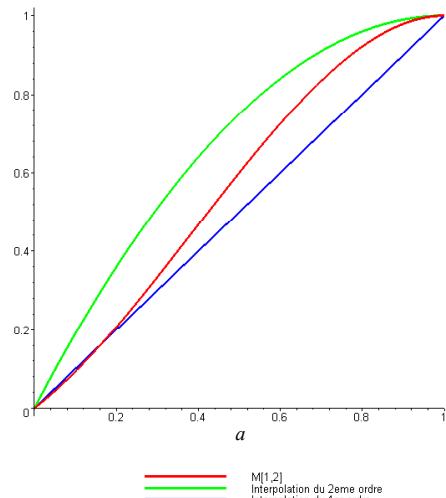


Fig. A-I-8.b

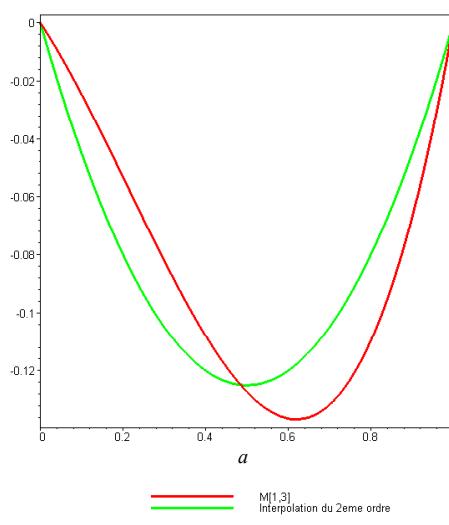


Fig. A-I-8.c

Figure A-I-8 Comparaison des coefficients $M_{1,1}$ (fig. A-I-8.a), $M_{1,2}$ (fig. A-I-8.b) et $M_{1,3}$ (fig. A-I-8.c) avec les coefficients de l'interpolation du 1^{er} et du 2^{ème} ordre.

Annexe II: Technique d'intégration pour la méthode "Overlapping"

Avec la méthode des éléments finis, nous utilisons la méthode de Gauss pour l'intégration numérique sur un élément. L'intégrale, s'écrit alors de la façon suivante :

$$\iiint_e f(u, v, w) d\gamma = \sum_{i=1}^N P_i f(u_i, v_i, w_i) \quad (\text{A-II-1})$$

où, e représente le domaine d'intégration sur un élément

N : le nombre de point de Gauss,

P_i : la pondération au point de Gauss i ,

u_i, v_i, w_i : les coordonnées du point de Gauss i dans le domaine de référence (*en 2D, les variables sont u et v*).

Pour chaque élément volumique classique (tétraèdre, prisme et hexaèdre), le nombre de points de Gauss et les pondérations sont présentés dans la référence [2]. Dans cette annexe, nous présentons, dans le cas 2D puis, 3D la méthode d'intégration de Gauss adaptée aux fonctions de formes non-classiques obtenues avec la méthode "Overlapping".

En fait, les coordonnées des points de Gauss et les pondérations correspondantes sont inchangées. Il faut calculer les nouvelles fonctions de forme aux nœuds du système dans le repère de référence.

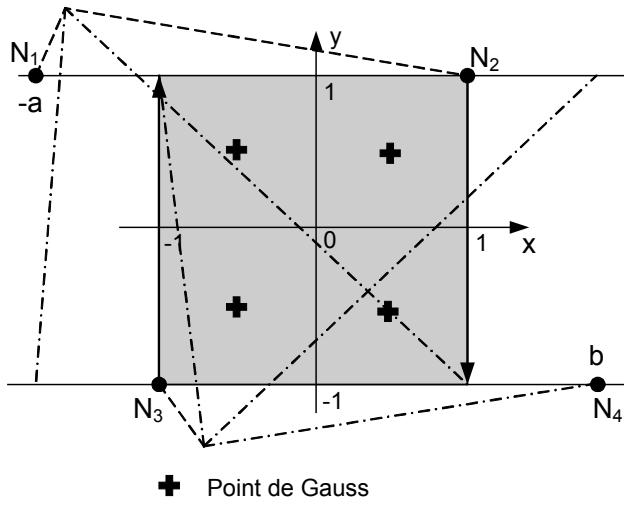


Figure A-II-1: Méthode "Overlapping", élément de référence pour l'intégration de Gauss en 2D

En 2D, la figure A-II-1 montre, dans l'élément de référence, le domaine d'intégration sur un carré et les formes des fonctions de base aux nœuds "N₁ et N₃". On peut remarquer que le nœud N₃ est placé aux coordonnées classiques (-1,-1). En revanche, le nœud N₄, pour lequel la fonction d'approximation " w_{n3} " vaut zéro, se trouve en dehors du plan d'intégration. Dans le repère de référence, les coordonnées des nœuds N₁, N₂, N₃, N₄ peuvent être écrrites: (- a , 1), (1, 1), (-1, -1), (b, -1), avec les deux variables introduites $a > 1$, $b > 1$ " que l'on peut calculer à l'aide de la matrice jacobienne (notée [J]) à savoir:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad \text{avec:} \quad \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n - x_c \\ y_n - y_c \end{bmatrix} \quad (\text{A-II-2})$$

dans cette expression, x_c et y_c représentent les coordonnées du centre du quadrangle dans le repère réel et x_n et y_n les coordonnées du nœud projeté. Dans le cas où les coordonnées projetées, sont les coordonnées des nœuds de l'élément définies par la matrice jacobienne, on retrouve les résultats classiques. En revanche, dans le cas de la méthode "Overlapping", on retrouve les coordonnées définies sur la figure A-II-1.

A l'aide de l'expression (A-II-2), il est possible de calculer les coordonnées des nœuds N_1 et N_4 dans le domaine de référence et donc, d'en déduire les fonctions d'approximation. On obtient alors:

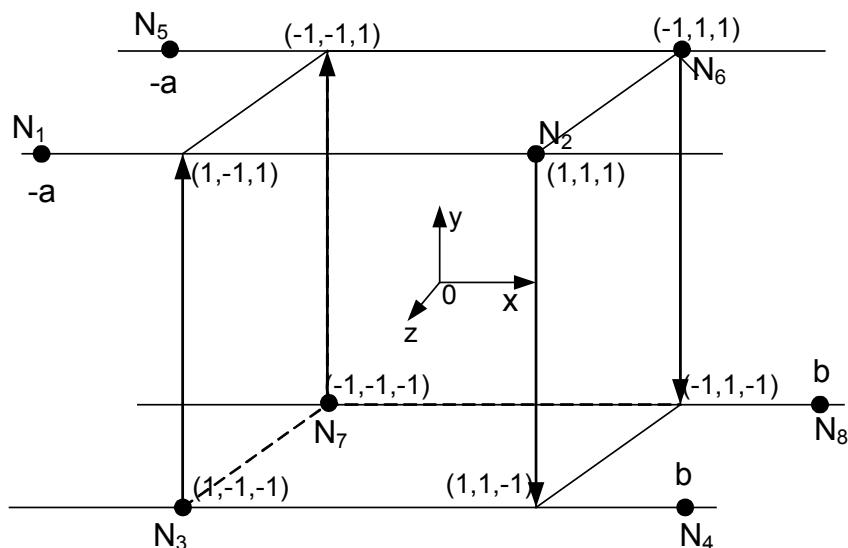
$$w_{n1} = \frac{1}{2(1+a)}(1-u)(1+v) \quad \text{A-II-3.a}$$

$$w_{n2} = \frac{1}{2(1+a)}(a+u)(1+v) \quad \text{A-II-3.b}$$

$$w_{n3} = \frac{1}{2(1+b)}(b-u)(1-v) \quad \text{A-II-3.c}$$

$$w_{n4} = \frac{1}{2(1+b)}(1+u)(1-v) \quad \text{A-II-3.d}$$

En 3D, comme nous l'avons vu dans le paragraphe II.2.2.2, on construit dans la zone de recouvrement des hexaèdres réguliers. Dans ces conditions, dans le domaine de référence, le domaine d'intégration est un cube. Sur la figure A-II-2, nous avons représenté l'élément de référence avec les nœuds (N_2, N_3, N_6, N_7) correspondants à l'élément et qui conduisent à des fonctions d'approximation classiques. On trouve également sur cette figure, les nœuds (N_1, N_4, N_5, N_8) qui introduisent des fonctions d'approximations non-classiques. Comme précédemment, nous faisons apparaître les coordonnées "a" et "b" pour les nœuds extérieurs au domaine de référence.



● Nœuds réels, inconnues du système

Figure A-II-2: Méthode "Overlapping", élément de référence pour l'intégration de Gauss en 3D

A partir des informations de la figure A-II-2, on déduit, pour l'élément de référence, les fonctions d'interpolation classiques et non classiques soit:

$$w_{n1} = \frac{1}{4(1+a)}(1-u)(1+v)(1+w) \quad \text{A-II-4.a}$$

$$w_{n2} = \frac{1}{4(1+a)}(a+u)(1+v)(1+w) \quad \text{A-II-4.b}$$

$$w_{n3} = \frac{1}{4(1+b)}(b-u)(1-v)(1+w) \quad \text{A-II-4.c}$$

$$w_{n4} = \frac{1}{4(1+b)}(1+u)(1-v)(1+w) \quad \text{A-II-4.d}$$

$$w_{n5} = \frac{1}{4(1+a)}(1-u)(1+v)(1-w) \quad \text{A-II-4.e}$$

$$w_{n6} = \frac{1}{4(1+a)}(a+u)(1+v)(1-w) \quad \text{A-II-4.f}$$

$$w_{n7} = \frac{1}{4(1+b)}(b-u)(1-v)(1-w) \quad \text{A-II-4.g}$$

$$w_{n8} = \frac{1}{4(1+b)}(1+u)(1-v)(1-w) \quad \text{A-II-4.h}$$

Connaissant l'expression des fonctions d'approximation, on peut alors calculer les termes des matrices élémentaires. Pour cela on utilise les expressions données en (II-33) et on effectue l'intégration en utilisant la méthode de Gauss.

Pour les hexaèdres, nous prenons N=6 avec $P_i=1/6$. Les coordonnées des points de Gauss sont: (1,0,0), (-1,0,0), (0,1,0), (0,-1,0), (0,0,1), (0,0,-1) [2].

Annexe III: Couplage circuit, charge capacitive

Dans le cas où la puissance réactive est négative, la charge peut être représentée par un circuit de type R-C. On trouvera, sur la figure A-III-1, le schéma équivalent de la partie circuit couplée aux éléments finis, où l'on voit apparaître trois capacités notées "C" et les tensions $v_{c1}(t)$, $v_{c2}(t)$ et $v_{c3}(t)$.

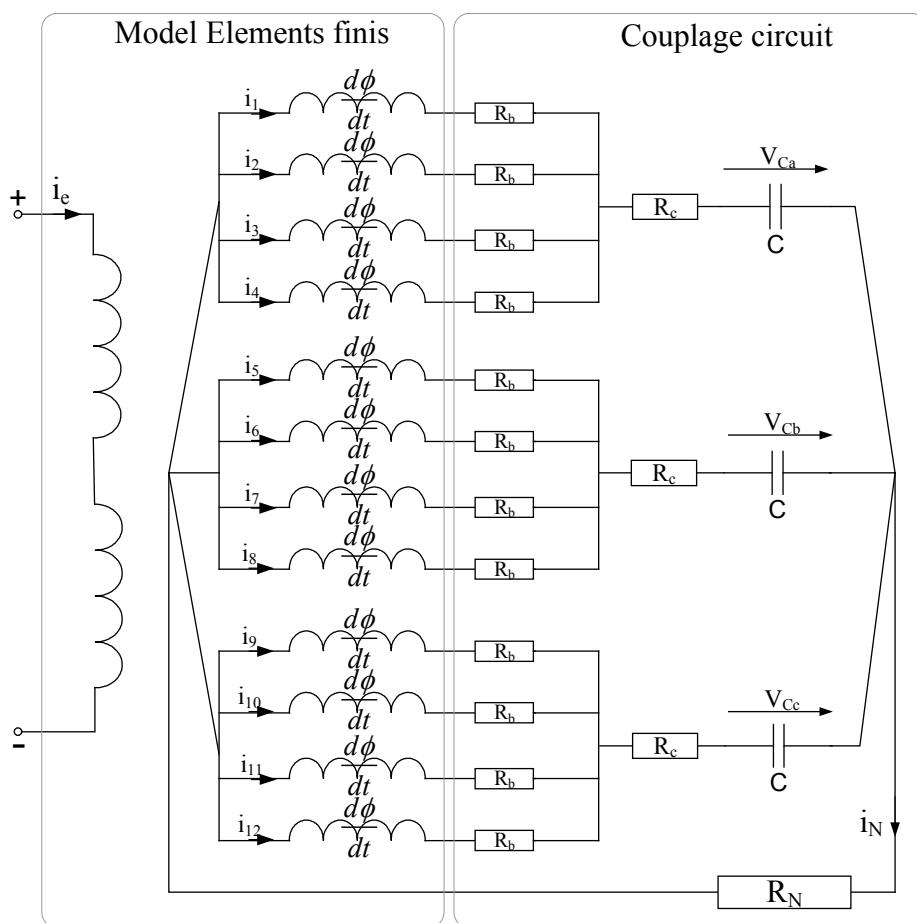


Figure A-III-1 Schéma équivalent cas où la puissance réactive est négative

Dans ces conditions, le système d'équations éléments finis couplé circuit, s'écrit sous la forme (A-III-1) en faisant apparaître les capacités de charge. À cette équation, il faut ajouter les relations (A-III-2).

On résout le système d'équations, on ajoute par conséquent 3 nouvelles inconnues aux équations de circuit. Comme dans le cas d'un circuit inductif, on utilise la méthode d'Euler implicite pour la discrétisation temporelle.

$$\begin{aligned}
 & - \left(\begin{array}{c} \frac{d\phi_1}{dt} \\ \frac{d\phi_2}{dt} \\ \frac{d\phi_3}{dt} \\ \frac{d\phi_4}{dt} \\ \frac{d\phi_5}{dt} \\ \frac{d\phi_6}{dt} \\ \frac{d\phi_7}{dt} \\ \frac{d\phi_8}{dt} \\ \frac{d\phi_9}{dt} \\ \frac{d\phi_{10}}{dt} \\ \frac{d\phi_{11}}{dt} \\ \frac{d\phi_{12}}{dt} \end{array} \right) \\
 & = \left(\begin{array}{ccccccccc} R_b & & & & 0 & \left(\begin{array}{cccc} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \\ i_{11} \\ i_{12} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} R_c & R_c & R_c & R_c \\ R_c & R_c & R_c & R_c \end{array} \right) \\ R_b & R_b & R_b & R_b & + & \left(\begin{array}{cccc} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \\ i_{11} \\ i_{12} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} R_c & R_c & R_c & R_c \\ R_c & R_c & R_c & R_c \end{array} \right) \\ R_b & R_b & R_b & R_b & & & & & & & \left(\begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \\ i_{11} \\ i_{12} \end{array} \right) \\ R_b & R_b & R_b & R_b & & & & & & & \left(\begin{array}{c} R_c \\ R_c \end{array} \right) \end{array} \right) \\
 & + \left(\begin{array}{ccccccccc} R_N & & & & R_N & \left(\begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \\ i_{11} \\ i_{12} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} V_{Ca} \\ V_{Ca} \\ V_{Ca} \\ V_{Ca} \\ V_{Cb} \\ V_{Cb} \\ V_{Cb} \\ V_{Cb} \\ V_{Cc} \\ V_{Cc} \\ V_{Cc} \\ V_{Cc} \end{array} \right) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_N & R_N & R_N & R_N & R_N & \left(\begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \\ i_{11} \\ i_{12} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} V_{Ca} \\ V_{Ca} \\ V_{Ca} \\ V_{Ca} \\ V_{Cb} \\ V_{Cb} \\ V_{Cb} \\ V_{Cb} \\ V_{Cc} \\ V_{Cc} \\ V_{Cc} \\ V_{Cc} \end{array} \right) \end{array} \right)
 \end{aligned} \tag{A-III-1}$$

$$C \frac{dV_{Ca}}{dt} = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 \tag{A-III-2.a}$$

$$C \frac{dV_{Cb}}{dt} = i_5 + i_6 + i_7 + i_8 \tag{A-III-2.b}$$

$$C \frac{dV_{Cc}}{dt} = i_9 + i_{10} + i_{11} + i_{12} \tag{A-III-2.c}$$

Annexe IV: Résultats de l'essai en charge couplé circuit

Dans cette annexe, nous reportons, dans le tableau A-IV-1, les résultats de simulation obtenus pour les cinq points de fonctionnement avec la méthode du pas bloqué en tenant compte du couplage circuit avec $\Delta\theta_{mvt}=\Delta\theta_{mail}$ ($\Delta t=20ms/160$). Ce tableau fait apparaître les écarts en % entre les mesures et les simulations pour le courant et la puissance. Nous remarquons que l'erreur a augmenté très nettement par rapport aux résultats obtenus dans le tableau III-5 pour lesquels, nous avons pris $\Delta\theta_{mvt}=5\Delta\theta_{mail}$ ($\Delta t=20ms/32$). En fait, l'erreur numérique due à la discréétisation temporelle diminue car le pas de temps est plus petit que précédemment. Par conséquent, les résultats convergent vers les résultats obtenus lors des simulations à courants imposés.

| Points de fonctionnement (fourni par EDF) | | | | | | | Résultats calcul | | | en A |
|---|-----------|------------|----------------------|--------------------|----------------|----------------|----------------------|-----------------|-------------------|-----------------|
| | | | | | | | | | | en Ω |
| U (KV) | P (MW) | Q (MVA) | I _{abc} (A) | I _e (A) | R _c | X _c | I _{abc} (A) | $\varepsilon\%$ | Puissance (MW) | $\varepsilon\%$ |
| 20 | 1485 | 719,2 | 47631 | 7466 | 0,218 | 0,106 | 49222,1 | 3,32 | 1523,7 | 2,6 |
| | | | | | | | 49561,5 | 4,04 | 1668,2 | 12,3 |
| 20 | 1485 | -577 | 45990,5 | 4883 | 0,234 | -0,091 | 46251,8 | 0,55 | 1506,4 | 1,44 |
| | | | | | | | 46336,6 | 0,74 | 1548,8 | 4,3 |
| 19 | 1390 | -310 | 43275,4 | 4900 | 0,247 | -0,055 | 43281,5 | 0,01 | 1391,7 | 0,12 |
| | | | | | | | 43564,4 | 0,65 | 1443,6 | 3,85 |
| 20,75 | 1371 | 483 | 40444,9 | 6177 | 0,279 | 0,098 | 40961,8 | 1,26 | 1352,5 | -1,35 |
| | | | | | | | 41555,9 | 2,73 | 1486,0 | 8,39 |
| 21,45 | 1378 | 654 | 41055,7 | 6796 | 0,273 | 0,129 | 41725,6 | 1,62 | 1372,9 | -0,37 |
| | | | | | | | 42319,7 | 3,06 | 1511,1 | 9,66 |

Tableau A-IV-1: Vérification des points de fonctionnement en couplage circuit, au niveau des résultats la première ligne correspond à la formulation A et la deuxième ligne à la formulation en Ω

REFERENCES

- [1] M. Féliachi, "Contribution au calcul du champ électromagnétique par la méthode des éléments finis en vue d'une modélisation dynamique de machines électriques", Thèse de Doctor Ingénieur, LGEP, 1981.
- [2] G. Dhatt, G. Touzot, "Une présentation de la méthode des éléments finis", *Maloine*, 1981.
- [3] A. Razek, J. L. Coulomb, M. Féliachi, J. C. Sabonnadière, "Conception of an air gap element for dynamic analysis of the electromagnetic field of electric machine", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 18, n°2, pp 655-659, 1982.
- [4] J. L. Coulomb, "A methodology for the determination of global electromechanical quantities from finite analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and fitness", *IEEE Trans. Mag.*, vol.19, no.6, pp 2514-2519, 1983.
- [5] F. Bouillault, "Contribution à la modélisation de systèmes électromagnétiques en mouvement comportant des parties ferromagnétiques massives", Thèse de Doctorat, Université Paris-VI, Février 1984.
- [6] Z. Ren: "Contribution à la modélisation des machines électriques par résolution simultanée des équation du champ et des équations du circuit d'alimentation", Thèse de Docteur de l'INPT, Toulouse, 1985.
- [7] G. Fournet, "Electromagnétisme à partir des équations locales", Masson 2^{ème} édition, 1985.
- [8] F. Goby : "Utilisation d'une méthode couplée: élément finis - élément de frontière, pour le calcul des forces dans des dispositifs électromagnétiques. Application au calcul du couple d'une machine à réductance variable", Thèse de Doctorat de l'Université Paris-VI, LGEP, septembre 1987.
- [9] F. Bouillault and A. Razek "Hybrid numerical methods for movement consideration in electromagnetic systems", *IEEE Trans. Magn.* vol. 24 n°1, 1988 pp259-261.
- [10] T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara and Y. Okada, "Improvement of T-Ω method for 3D eddy currents analysis", *IEEE Trans. Mag.*, vol. 24, no 1, pp 274-277, 1988.
- [11] Biddlecombe, C.S.; Simkin, J.; Jay, A.P.; Sykulski, J.K.; Lepaul, S. "Transient electromagnetic analysis coupled to electric circuits and motion", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, Issue 5, Part 1, 3182 - 3185, 1998.
- [12] T. W. Preston, A. B. J Reece, P. S. Sangha, "Induction motor analysis by time-stepping techniques", *IEEE Trans. Magn.* vol. 24, n°1, pp 471-474, 1988.

- [13] J.P.Webb and B.Forghani, "A single scalar potential method for 3D magnetostatics using edge elements", *IEEE Trans. Mag.*, vol 25, no 5, pp 4126-4128, 1989.
- [14] W Long, "Contribution à la modélisation de systèmes électromagnétiques à l'aide du couplage des équations des circuits magnétique et électrique", Thèse de Doctorat, Université Paris-VI, octobre 1990.
- [15] A. Albanese and G. Rubinacci, "Magnetostatic field computations in terms of two components vector potentials", *International journal for the numerical methods in engineering*, Vol. 29, pp. 515-532, 1990.
- [16] D. Rodger, H. C. Lai and P. J. Leonard: "Coupled element for problems involving movement", *IEEE, Trans. Magn.*, vol 26, n°2, pp548-550, march 1990.
- [17] E. Vassent, "Contribution à la modélisation des moteurs asynchrones des éléments finis", Thèse de Doctorat de l'INPG, Grenoble, novembre 1990.
- [18] O. C. Zienkiewicz, "La méthode des élément finis", AFNOR l'édition française, 1991.
- [19] Y. Maréchal, "Modélisation des phénomènes magnétostatiques avec terme de transport: Application aux ralentisseurs électromagnétiques", Thèse de Doctorat, INPG, février 1991.
- [20] A. Bossavit, "Electromagnétisme, en vue de la modélisation, Collection Mathématiques et Applications", *Springer-Verlag*, 1991.
- [21] N. Sadowski, Y. Lefevre, M. Lajoie-Mazenc, J. Cros, "Finite element torque calculation in electrical machine while considering the movement", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 28, n°2, pp 1410-1413, 1992.
- [22] I. A. Tsukerman : "Overlapping finite elements for problems with movement", *IEEE Trans. on Magn.*, vol. 28, n°5, pp 2247-2249 ,1992.
- [23] A.G. Kladas and J.A. Tegopoulos, "A new potential formulation for 3D magnetotatic necessitating no source field computation", *IEEE Trans. Mag.*, vol 28, no 2, pp 1103-1106, 1992.
- [24] R. Perrin-Bit, "Modélisation des machines électriques tournantes par la méthode des éléments finis tridimensionnels : calcul des grandeurs magnétiques avec prise en compte du mouvement", Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique, Grenoble mars 1992.
- [25] N. Sadowsky, "Modélisation des machines électriques à partir de la résolution des équations du champ en tenant compte du mouvement et du circuit d'alimentation (logiciel EFCAD) ", Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique, Toulouse, Janvier 1993.
- [26] O.Biro, K.Preis, G.Vrisk, K.R.Richter, I.Ticar, "Computation of 3D magnetostatic fields using a reduced scalar potential", *IEEE Trans. Mag.*, vol.29, no.2, pp 1329-1332, 1993.
- [27] F. Piriou, A. Razek, "Finite element analysis in electromagnetic systems accounting for electric circuit", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, n°2, pp 1669-1675, 1994.
- [28] Y. Kawase, T. Yamaguchi and Y. Hayashi, "Analysis of Cogging Torque of Permanent Magnet Motor by 3-D finite Element Method", *IEEE Trans. Magn.* vol. 31, n°3, pp 2044-2047, 1995.

- [29] Tonti E., "On the Geometrical Structure of the Electromagnetism, Gravitation, Electromagnetism and Geometrical Structures, for the 80th birthday of A. Lichnerowicz", Edited by G. Ferrarese, 1995, Pitagora Editrice Bologna, 281-308. (pdf, 560 KB)
- [30] B. Boualem, F. Piriou, " Numerical models for rotor cage induction machines using finite element method ", *IEEE Trans. Magn.* vol. 34, n° 5, pp3202-3205, 1998.
- [31] T. Dreher, R. Perrin-Bit, G. Meunier and J. L. Coulomb, "A three dimensional finite element modelling of rotating machines involving movement and external circuit", *IEEE Trans. Magn.* vol. 32, n° 3, pp1070-1073, 1996.
- [32] Z. Ren, "Auto-gauging of vector potential by iterative solver numerical evidence", Internationnal worksop on electric and magnetic fields, pp 119-124, Liège 1996
- [33] N. Gasmi, "Contribution à la modélisation des phénomènes électriques- magnétiques couplés et du mouvement, pour les systèmes électromagnétiques en 3D", Thèse de Doctorat, Université Paris-VI, octobre 1996.
- [34] B. Boualem, "Contribution à la modélisation des systèmes électrotechnique à l'aide des formulations en potentiels : application à la machine asynchrone", Thèse de Doctorat, U.S.T.L, Juillet 1997.
- [35] C. Golovanov, "Développement de formulations éléments finis 3D en potentiel vecteur magnétique: application à la simulation de dispositifs électromagnétiques en mouvement", Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique, Grenoble 1997.
- [36] B. Boualem, F. Piriou, "Modélisation 3D du circuit électrique et du mouvement: application à la machine asynchrone", *European Physical Journal Applied Physics*, vol.1 n°1, pp 67-71, 1998.
- [37] F. Marmin, "Contribution à l'étude des erreurs numériques dues à la méthode des éléments finis : application aux problèmes statiques d'électromagnétisme 2D", Thèse de Doctorat, U.S.T.L., Mai 1998.
- [38] E. Tonti, "Algebraic topology and computational electromagnetism", International Workshop on Electric and Magnetic Field, pp 285-294, Marseille 1998.
- [39] Y. Le Menach, "Contribution à la modélisation numérique tridimensionnelle des systèmes électrotechniques: prise en compte des inducteurs", Thèse de Doctorat, U.S.T.L. 1er, février 1999.
- [40] Lepaul, J. K. Sykulski, C. S. Biddlecombe, A. P. Jay, J. Simkin, "Coupling of motion and circuits with electromagnetic analysis ", *IEEE Trans. Magn.*, vol., n°35, pp 1602-1605, 1999.
- [41] Y. Le Ménach, S. Clénet, F. Piriou, "Coupling of Magnetic and Electric Circuit Equations Using Coil Shape Functions", *7th International Journal of Theoretical Electrotechnics*, pp 36-39, March 1999.
- [42] N. Boukari, "Modélisation du mouvement à l'aide de codes de calcul par éléments finis en 3D : application à la machine homo polaire et au micro actionneur électrostatique", Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique, Toulouse, Juillet 2000.
- [43] Y. Le Menach, S. Clénet, F. Piriou, J.F. Létourneau, Ph. Viarouge, J. Cros, "3D Computation of a Claw Pole Permanent Magnet Machine using a Scalar Potential Formulation", *European Physical Journal Applied Physics*, pp 175-182, 2000.

- [44] F. Rapetti, F. Bouillaud, L. Santendrea, A. Buffa, Y. Maday, A. Razek "Calculation of Eddy currents with edge elements on non-matching grids in moving structures", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, n°4, pp 1351-1355, 2000.
- [45] F. Rapetti, "Approximation des équations de la magnétodynamique en domaine tournant par la méthode des éléments avec joints", Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, Mai, 2000.
- [46] P. Dular and C. Geuzaine, "Connection boundary conditions with different types of finite elements applied to periodicity conditions and to the moving band", *COMPEL*, vol. 20 n°1, pp.109-119, 2001.
- [47] G. Meunier sous la Direction de, "Electromagnétisme et problèmes couplés"; *Hermes, Lavoisier*, 2002.
- [48] T. Henneron, "Contribution à la prise en compte des Grandeur Globales dans les Problèmes d'Electrmagnétisme résolus avec la Méthode des Eléments Finis", Thèse de Doctorat, U.S.T.L. 15, décembre 2004.
- [49] O. J. Antunes, J. P. A. Bastos, N. Sadowski, A. Razek, L. Santendrea, F. Bouillaud, F. Rapetti, "Using hierachic interpolation with mortar element method for electrical machines", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 41, n°5, pp 1472-1475, 2005.
- [50] O. J. Antunes, J. P. A. Bastos, N. Sadowski, A. Razek, L. Santendrea, F. Bouillaud, F. Rapetti, "Comparison between non-conforming movement methods", *COMPUMAG*, Shenyang, 2005.
- [51] O. J. Antunes, J. P. A. Bastos, N. Sadowski, A. Razek, L. Santendrea, F. Bouillaud, F. Rapetti, "Torque calculation with conforming and non conforming movement interface", *COMPUMAG*, Shenyang, 2005.
- [52] X. Shi, Y. Le Ménach, J-P Ducreux, F. Piriou, "Comparison of slip surface and moving techniques for modelling movement in 3D with FEM", à paraître dans la revue *COMPEL*, 2005.
- [53] X. Shi, Y. Le Ménach, J-P Ducreux, F. Piriou, "Comparison of methods to simulate the movement of electrical machines in 3D using FEM", Congrès *COMPUMAG*, Shenyang, juillet, 2005.
- [54] O. J. Antunes, "Formulations conformes et non-conformes avec interpolation d'ordre élevé pour la modélisation du mouvement en machines électriques", Thèse de Doctorat, Université Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brésil, 2005.