TRAVAUX DIRIGES
DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

2$^{\text{ème}}$ Année

Certains résultats sont donnés à titre indicatif sous réserve d'erreurs de dactylographie

MAP L2, TD No1
Transformée de Laplace

Exercice 0

Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

a/ $t.\gamma(t)$ $\quad \frac{1}{p}$

b/ $\frac{t^n}{n!}.\gamma(t)$ $\quad \frac{1}{p^{n+1}}$

Exercice 1

Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

a/ $e^{at}.\gamma(t)$ $\quad \frac{1}{p-a}$

b/ $Cos(\omega t).\gamma(t)$ $\quad \frac{p}{p^2+\omega^2}$

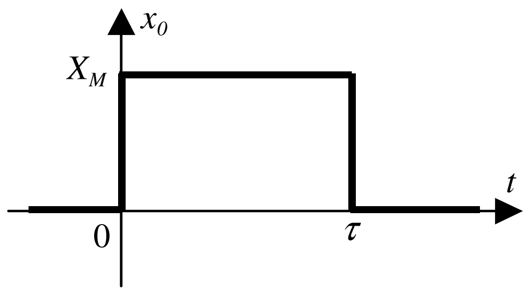
c/ $Sin(\omega t).\gamma(t)$ $\quad \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

d/ $Sin^2(t).\gamma(t)$ $\quad \frac{2}{p(p^2+4)}$

e/ $Cos^2(t).\gamma(t)$ $\quad \frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$

Exercice 2

a) Calculer la transformée de Laplace du signal suivant :

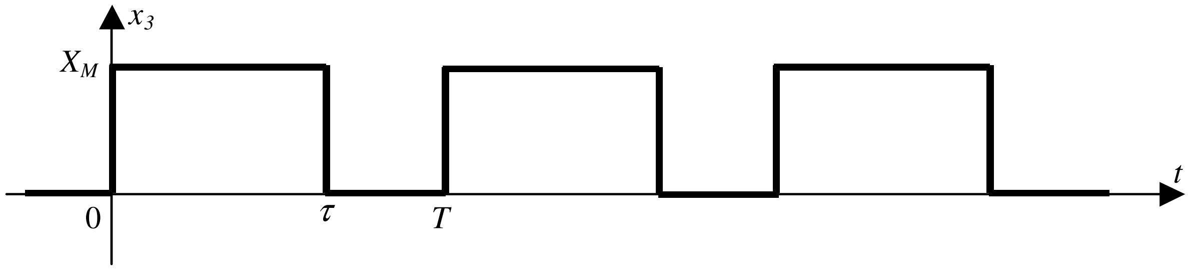


b) Donnez l'expression temporelle de ce signal avec des fonctions « échelon ». Calculer de nouveau la transformée de Laplace de ce signal par construction graphique.

$$X_O(p)=X_M.\frac{1-e^{-p\tau}}{p}$$

Exercice 3

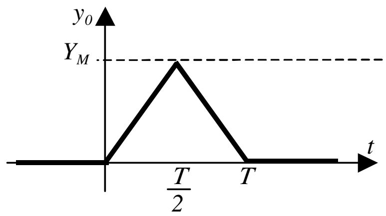
Par construction graphique, calculer la transformée de Laplace du signal périodique suivant :

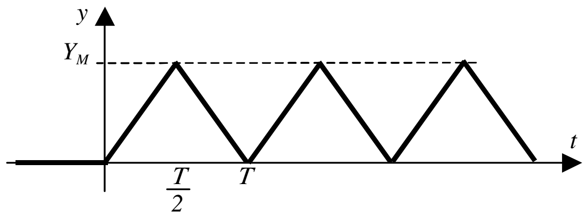


$$X_3(p)=\frac{X_M}{p}.\frac{1-e^{-p\tau}}{1-e^{-pT}}$$

Exercice 4

Par construction graphique, calculer la transformée de Laplace de $y_0(t)$ et du signal périodique $y(t)$.

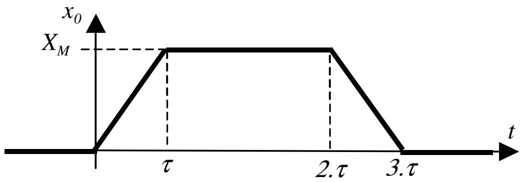


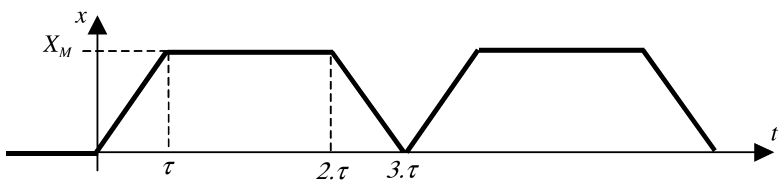


$$Y(p)=2.\frac{Y_M}{T}.\frac{1}{p^2}.th\left(p.\frac{T}{4}\right)$$

Exercice 5

Par construction graphique, calculer la transformée de Laplace de $x_0(t)$ et du signal périodique $x(t)$.

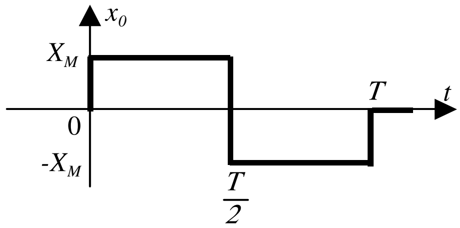


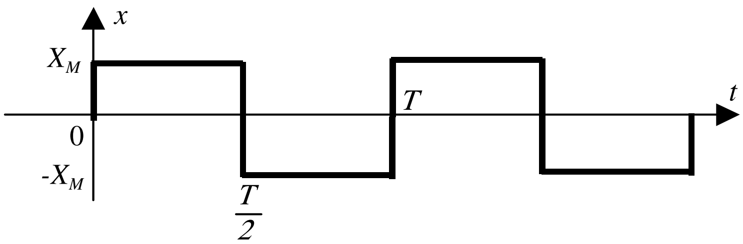


$$X_0(p)=\frac{X_M}{\tau}.\frac{1}{p^2}\left[e^{-\tau p}-1\right]\left[e^{-2\tau p}-1\right] \qquad X(p)=\frac{X_M}{\tau}.\frac{1}{p^2}.\frac{-e^{-2\tau p}+1}{e^{-2\tau p}+e^{-\tau p}+1}$$

Exercice 6

Par construction graphique, calculer la transformée de Laplace de $x_0(t)$ et du signal périodique $x(t)$.





$$X_0(p)=\frac{X_M}{P}.\left[1-e^{-p\frac{T}{\tau}}\right]^2 \qquad X(p)=\frac{X_M}{P}.tanh\left(p\frac{T}{4}\right)$$

Exercice 7

Par construction graphique, calculer la transformée de Laplace correspondant à une arche de sinusoïde $x_0(t)$ puis la transformée de Laplace d'une sinusoïde redressée $x(t)$.

$$X(p)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \quad \frac{1+e^{-p\frac{T}{2}}}{1-e^{-p\frac{T}{2}}}$$

MAP L2, TD No2
Transformée inverse de Laplace

Calculer les transformées de Laplace inverse des fonctions suivantes et dessiner leurs évolutions temporelles.

1) <u>Série 1</u>

a) $F(p) = \dfrac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}$ $\qquad f(t) = \gamma(t) - 2\gamma(t\text{-}1) + \gamma(t\text{-}2)$

b) $F(p) = \dfrac{1+e^{-p\Pi}}{p^2+1}$ $\qquad f(t) = \sin(t)\,.\gamma(t) + \sin(t\text{-}\pi)\,.\gamma(t\text{-}\pi)$

c) $F(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p-1}$ $\qquad f(t) = e^{t-2}\ \gamma(t\text{-}2)$

d) $F(p) = \dfrac{e^{-p\Pi}}{p^2+2p+2}$ $\qquad f(t) = \sin(t\text{-}\Pi).e^{(\Pi-t)}\ \gamma(t\text{-}\pi)$

e) $F(p) = \dfrac{1}{p(1+e^{-p})}$ $\qquad f(t)=\sum \gamma(t-2.n)-\gamma(t-2.n-1)$

f) $F(p) = \dfrac{1-e^{-p2\Pi}}{p(p^2+1)}$

g) $F(p) = \dfrac{(1-e^{-p})^2}{p(1-e^{-3p})}$

h) $F(p) = \dfrac{3-e^{-p}-e^{-2p}+e^{-3p}}{p\left(1-e^{-4p}\right)}$, dessinez la fonction $f(t)$

2) Calculer la transformée de Laplace inverse en utilisant le théorème de convolution :

$F(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)(p+1)}$ $\qquad f(t) = \dfrac{1}{2}\left(-cos(t)+sin(t)+e^{-t}\right).\gamma(t)$

$H(p) = \dfrac{1}{(\,p^2+\omega^2\,)^2}$ $\qquad h(t) = \dfrac{1}{2\omega^2}\left(\dfrac{sin(\omega t)}{\omega}-t\,cos(\omega t)\right).\gamma(t)$

3) Calculer la transformée de Laplace inverse en considérabt la dérivée d'une fonction de Laplace :

$F(p) = \text{Arctan}\,(\frac{1}{p})$ $\qquad f(t) = \dfrac{sin(t)}{t}.\gamma(t)$

$H(p) = \dfrac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$ $\qquad h(t) = \dfrac{1}{2\omega^2}\left(\dfrac{sin(\omega t)}{\omega}-t\,cos(\omega t)\right).\gamma(t)$

4) <u>Série 2 : Utilisation de la décomposition en éléments simples</u>

a) $F(p) = \dfrac{1}{p(p+1)}$ $\qquad f(t) = (1\text{-}e^{-t})\,.\gamma(t)$

b) $F(p) = \dfrac{p-1}{p^2+3p+2}$ $\qquad f(t) = (\text{-}2.e^{-t}+3.e^{-2.t})\,.\gamma(t)$

c) $F(p) = \dfrac{p+1}{p^2+3p+2}$ $f(t) = e^{-2t} \,.\gamma(t)$

d) $F(p) = \dfrac{1}{(p+2)(p^2-9)}$ $f(t) = \dfrac{1}{30}(e^{3t}+5e^{-3t}-6e^{-2t}) \,.\gamma(t)$

e) $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)(p-2)^2}$ $f(t) = (e^{t} - e^{2t} + te^{2t}) \,.\gamma(t)$

f) $F(p) = \dfrac{1}{(p+2)^2(p-1)}$ $f(t) = \dfrac{1}{9}[e^t - e^{-2t}(1+3^t)].\gamma(t)$

Cas des racines complexes :

g) $F(p) = \dfrac{3(p+1)-2}{(p+1)^2+4}$ $f(t) = e^{-t}.(3cos(2t) - sin(2t)).\gamma(t)$

h) $F(p) = \dfrac{1}{p^2+2p+2}$ $f(t) = \sin(t) \,.e^{-t}.\gamma(t)$

i) $F(p) = \dfrac{2}{p^2+2p+5}$ $f(t) = \sin(2.t) \,.e^{-t}.\gamma(t)$

MAP L2, TD No3
Application à la résolution des équations différentielles

1) Résoudre par le calcul symbolique les équations différentielles suivantes

a) $y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 2\gamma(t)$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=0$ $y(t) = \left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{5}e^{-2t} + \frac{8}{15}e^{3t}\right).\gamma(t)$

b) $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t}$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=0$ $y(t) = \left(\frac{1}{6}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{t} - \frac{2}{3}e^{2t}\right).\gamma(t)$

c) $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^{-2t}$ avec $y(0)=0$ et $y'(0)=0$ $y(t) = \left(\frac{1}{9}e^{t} - \frac{1}{3}te^{-2t} - \frac{1}{9}e^{-2t}\right).\gamma(t)$

d) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = (1+e^{-2t})\gamma(t)$ avec $y(0)=0$ et $y'(0)=0$

2) Résoudre par le calcul symbolique le système suivant

$$x'(t) = -7x(t) + 6y(t) + t$$
$$y'(t) = -12x(t) + 10y(t)$$

avec $x(0)=y(0)=0$.

$x(t) = (-5t - 7 + 9e^{t} - 2e^{2t}).\gamma(t)$ et $y(t) = (-6t - 9 + 12e^{t} - 3e^{2t}).\gamma(t)$

3)

a) En utilisant la transformée de Laplace, résoudre le système suivant :

$$x'(t) = -x(t) + 2.y(t) + \gamma(t)$$
$$y'(t) = -2y(t) + x(t)$$

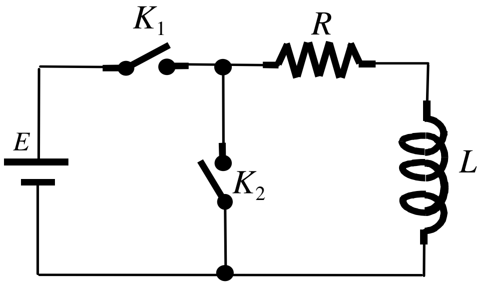
avec $x(0)=y(0)=0$

b) Tracez l'évolution temporelle de la fonction : $z(t) = x(t) + y(t)$

MAP L2, TD No4
Application à l'étude des circuits électriques

Exercice 1 :

On considère le montage suivant :



avec R = 1Ω ; L = 100 mH ; E = 1V. Les interrupteurs K_1 et K_2 sont initialement ouverts.

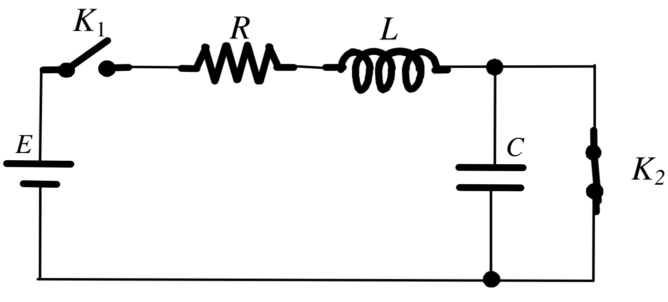
a) A t=0, le courant dans la self est nul, on ferme l'interrupteur K_1. Déterminer l'évolution temporelle du courant dans l'interrupteur.
$i(t) = (1-e^{-10.t}).\gamma(t)$

b) On suppose, maintenant que le courant dans la self a une valeur de 0.5A à l'instant initial (t=0). Calculer à nouveau l'évolution temporelle du courant dans la résistance.
$i(t) = (1-0{,}5.e^{-10.t}).\gamma(t)$

c) A t=60s, on ouvre l'interrupteur K_1 et on ferme K_2. Déterminer l'évolution temporelle du courant dans la résistance.

Exercice 2 :

Soit le montage suivant



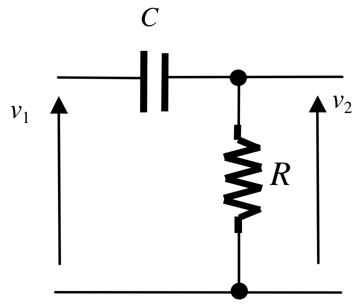
R = 10 kΩ ; L = 10 mH ; C = 10 nf ; E = 10 V

a) A t=0, le courant dans la self est nul, on ferme l'interrupteur K_1, l'interrupteur K_2 reste fermé. Déterminer l'évolution temporelle du courant dans le circuit.

b) L'interrupteur K_1 étant fermé depuis un temps très long, on ouvre K_2 brusquement. Déterminer l'expression du courant débité par le générateur.

Exercice 3 :

Soit le montage suivant



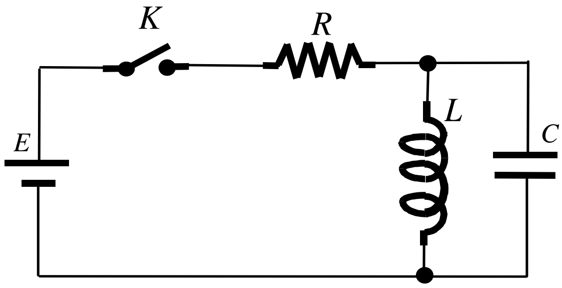
A t=0, la tension aux bornes du condensateur est nulle. On applique à l'entrée de ce montage un échelon d'amplitude E.

a) Calculez et représentez l'évolution temporelle de v_2(t)

b) On applique maintenant à l'entrée de ce montage un créneau d'amplitude E et de largeur τ. Calculez et représentez l'évolution temporelle de v_2(t)

Exercice 4 :

On considère le montage suivant :



La tension aux bornes du condensateur et le courant dans la self sont initialement nuls. L = 0.1 H ; C = 2.5 µF. On ferme brusquement l'interrupteur K à $t=0^-$. Déterminer l'évolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur ($v(t)$) lorsque :

a) R = 100 Ω ; $v(t) = \frac{E}{RC} e^{-\frac{1}{2RC}.t}.t.\gamma(t)$

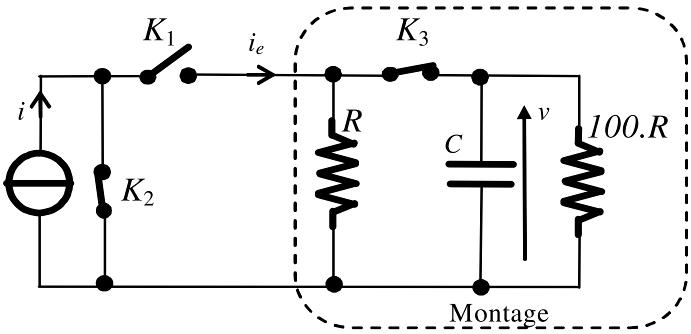
b) R = 200 Ω ; $v(t) = \frac{2LE}{\sqrt{|\Delta|}}.Sin(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2RLC}.t).e^{-\frac{1}{2RC}.t}.\gamma(t)$

c) R = 50 Ω ; $v(t) = \frac{LE}{\sqrt{\Delta}}.Sh(\frac{\sqrt{\Delta}}{2RLC}.t).e^{-\frac{1}{2RC}.t}.\gamma(t)$

Exercice 5 :

Pour la résolution des questions de cet exercice, on pourra considérer la simplification suivante : $\frac{100}{101} = 1$, ainsi que les valeurs suivantes : $R.C = \frac{1}{\omega} = \frac{2}{R}$.

A t=0, la tension aux bornes du condensateur du montage suivant est nulle.



1) A t=0, on applique à l'entrée de ce montage un courant constant $i(t) = I$ en ouvrant $K2$ et en fermant $K1$ simultanément. $K3$ reste fermé.
   1.1) Déterminez l'expression temporelle de la tension aux bornes du condensateur, en utilisant la transformée de Laplace. Représentez graphiquement l'évolution temporelle de cette tension.
   1.2) Donnez la valeur de cette tension en régime permanent.

   1.3) Une fois le régime permanent atteint, on ouvre $K3$. Déterminer l'expression

   temporelle de la tension aux bornes du condensateur.

<u>Exercice 6</u> :
On considère le montage électrique de la figure 1 :

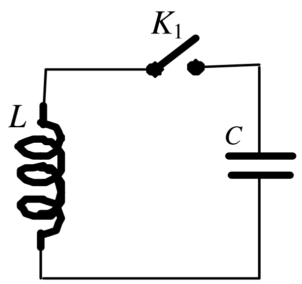


Figure 1

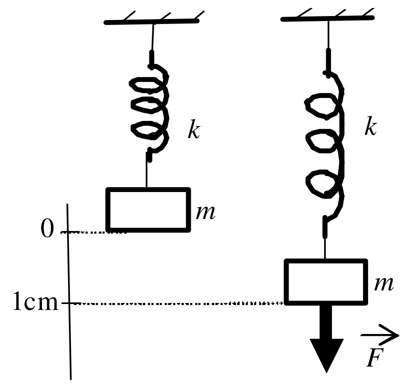


Figure 2

Le courant dans la self est initialement nul et le condensateur est initialement chargé à 10V. L = 100 mH ; C = 10 µF.
1) A t=0, on ferme l'interrupteur, déterminer l'évolution temporelle du courant dans la bobine.
2) Tracez l'évolution temporelle du courant en précisant l'amplitude et la période.
3) On considère une masse m fixée sur un ressort de raideur k et que l'on tire pour la déplacer de 1cm (figure 3). Au temps initial, la masse est immobile. La force de rappel exercée par le ressort est exprimée par : $f(t) = -kx(t)$. On rappelle que l'équation fondamentale de la dynamique conduit à l'expression suivante :

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f(t)$$

A t=0s, on lâche le ressort. On cherche à déterminer l'évolution temporelle de la position.

Déterminez la transformée de Laplace des deux équations et en déduire la solution dans le domaine de Laplace.

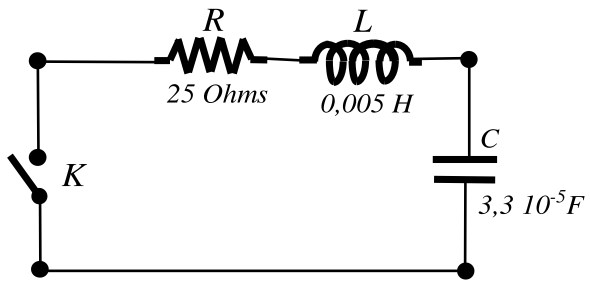
4) Calculez l'évolution temporelle de la position (*x(t)*).

5) Quelle est la fréquence des oscillations ?

6) Comparez le système électrique de la figure 1 et mécanique de la figure 2.

<u>Exercice 7</u>

Soit le montage suivant



a) A t=0, la tension aux bornes du condensateur vaut 5V et le courant dans la bobine vaut 0A. A t=0, on ferme *K*, déterminez l'évolution temporelle du courant.
b) En déduire l'évolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur.

Exercice 7 :

Une pile à combustible est un dispositif électrochimique qui produit directement de l'eau, de la chaleur et de l'électricité par une réaction d'oxydoréduction de l'hydrogène et l'oxygène.

$$H_2 + \frac{1}{2}O_2 \longrightarrow H_2O + Chaleur + Electricité$$

Utilisée comme source d'électricité dans un véhicule électrique, cette technologie est intéressante pour l'environnement en milieu urbain car elle rejette uniquement de l'eau. Pour une pile à combustible utilisant une membrane échangeuse de protons, l'hydrogène est situé sur le côté de l'anode et d'oxygène sur le côté de la cathode (figure 1). La membrane électrolyte entre ces deux compartiments permet l'échange des protons, tandis que les électrons issus de la réaction circulent dans le circuit électrique externe et sont à l'origine du courant électrique.

De nombreuses approches ont été utilisées pour décrire mathématiquement le comportement physique et dynamique d'une pile. Le modèle paramétrique développé par Amphlett (figure 2) utilise les données suivantes :

_ la tension constante E=1.229V, qui est le potentiel thermodynamique de Nernst,

_ la résistance d'activation R_1 liées aux pertes internes,

_ la résistance R_2, qui représente les pertes Joule liées au contact électrique sur les plaques pour le raccordement,

_ un condensateur C, représentant le stockage interne des charges.

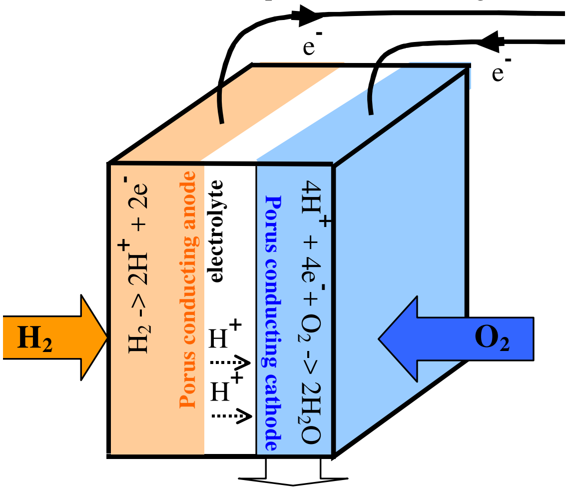


Figure 1

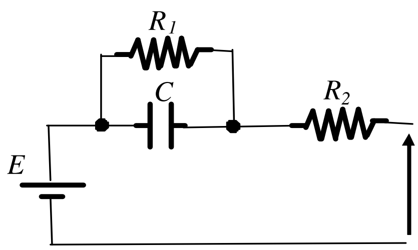
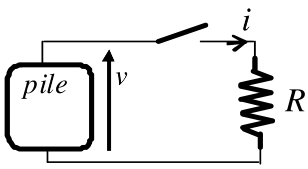


figure 2

a) A t=0, la tension aux bornes du condensateur est nulle et on connecte cette pile à une résistance R



Calculez l'évolution temporelle du courant généré $i(t)$.

Pour faciliter le développement des calculs, on pourra utiliser les constantes de temps suivantes :

$a = R_1 C$, $b = \dfrac{(R+R_2)R_1 C}{R+R_1+R_2}$, $K = \dfrac{1}{R+R_2}$

Réponse : $i(t) = \left[e^{-\frac{t}{b}} + \frac{b}{a}\left[1 - e^{-\frac{t}{b}}\right]\right] KE$

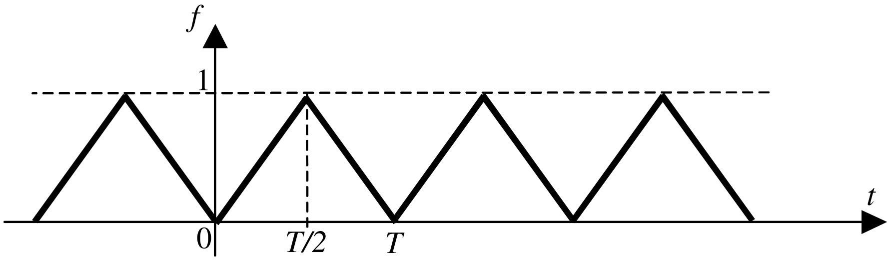
b) A t=0, la tension aux bornes du condensateur est nulle et on connecte maintenant cette résistance pendant uniquement un temps τ. Calculez l'évolution temporelle de la tension v(t).

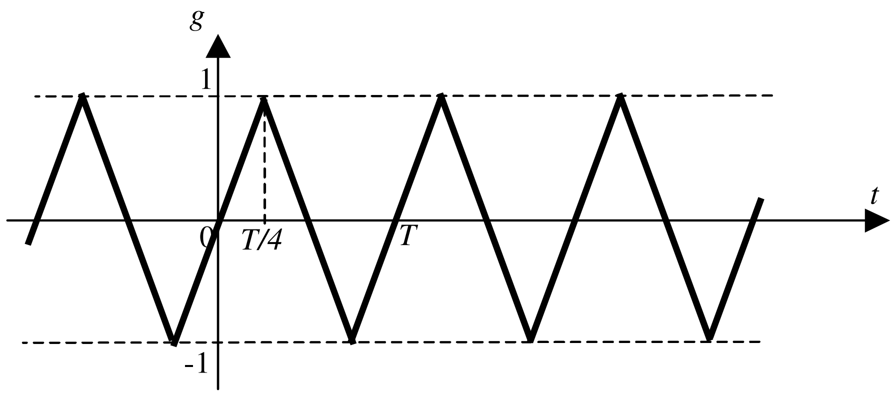
IG2I
Institut de Génie Informatique et Industriel

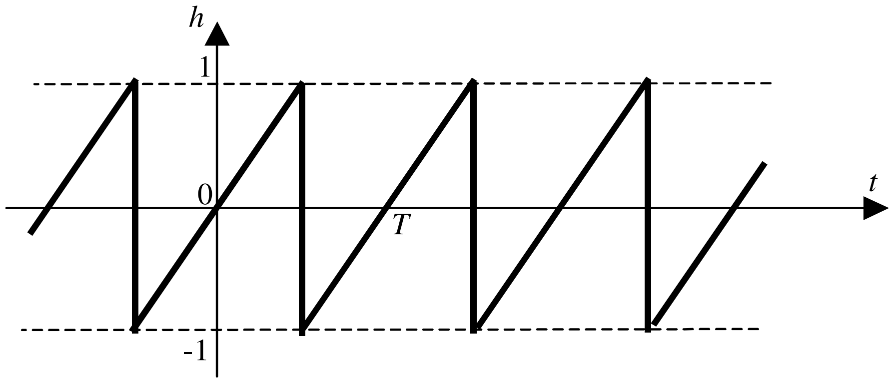
MAP L2, TD No5
Développements en série de Fourier

Exercice 1 :

Calculez les développements en série de Fourier des signaux suivants :





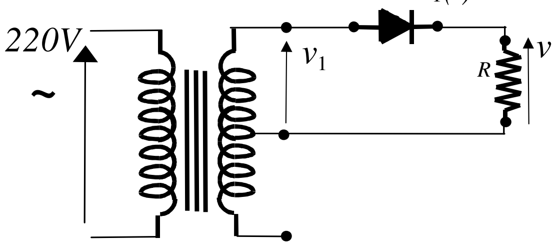


Réponses : $f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\Pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \; Cos \; \frac{2\Pi nt}{T}$ pour n impair,

$$g(t) = \frac{4}{\Pi} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{n} \left[-Cos(n\frac{\Pi}{2}) + \frac{2}{n\Pi} Sin(n\frac{\Pi}{2} \right] Sin(n\omega t), \quad h(t) = -\frac{2}{\Pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \; Sin \; \frac{2\Pi nt}{T}$$

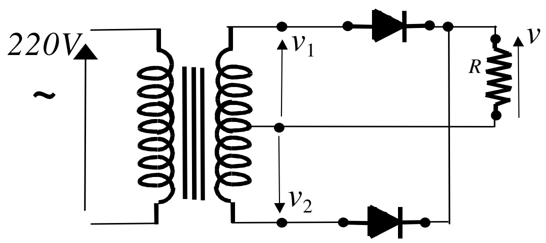
Exercice 2 : Dans cet exercice, on supposera les diodes comme idéales.

a) Redressement simple alternance. Déterminez le développement en série de Fourier de la tension apparaissant aux bornes de la résistance $v_1(t)$ = Sin (t)



Réponse : $v(t) = \frac{1}{\Pi} + \frac{1}{2}.\ \text{Sin}\ (t) - \frac{4}{3\Pi}\ .\text{Cos}\ (2t) - \frac{8}{\Pi.15}\ (\text{Cos}\ 4t) + \ldots$

b) Redressement double alternance. Déterminez le développement en série de Fourier de la tension apparaissant aux bornes de la résistance, $v_1(t)$ = Sin (t) et $v_2\ (t)$ = -Sin (t).

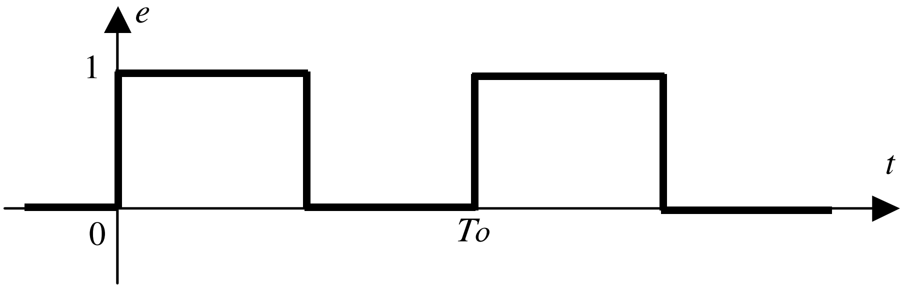


Réponse : $v(t) = \frac{2}{\Pi} - \frac{4}{3\Pi}\ .\text{Cos}\ (2t) - \frac{4}{\Pi.15}\ (\text{Cos}\ 4t) + \ldots$

MAP L2, TD No6
Applications des développements en séries de Fourier

Exercice 1 :

On applique à l'entrée d'un amplificateur de tension un signal rectangulaire positif de fréquence 100 kHz et de rapport cyclique de 0.5.



1) Calculer son développement en Série de Fourier sous la forme :

$$e(t) = C_0 + \sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{\infty} C_n . e^{j.n.\omega o.t}$$

2) Représenter $|C_n(n)|$ et $|C_n(f)|$

3) Déduire du développement précédent les termes du développement suivant :

$$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.Cos(n.\omega o.t) + b_n.Sin(n.\omega o.t)$$

4) En utilisant le théorème de Parceval, montrez que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2.k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

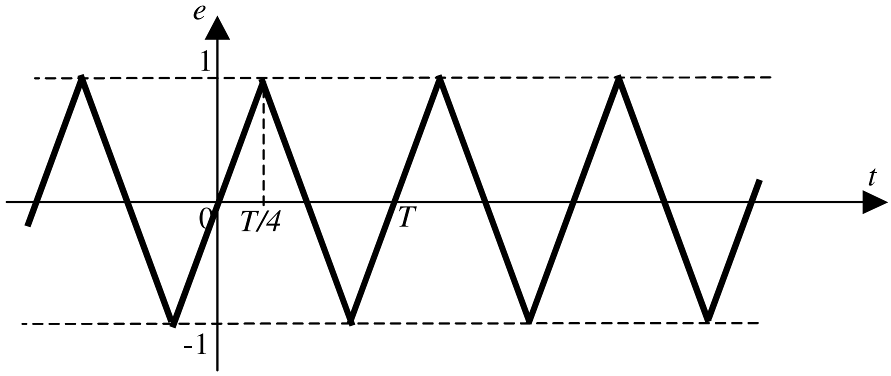
5) Quelle est la puissance (ou l'énergie) que peut fournir un tel signal dans une résistance R = 1 Ohm ?

6) On applique ce signal à un amplificateur de gain unitaire. Sa caractéristique fréquentielle est telle que les harmoniques supérieurs à n=9 sont éliminés. Déterminer la puissance que peut fournir cet amplificateur.

7) Une transmission fidèle requiert la transmission de 96 % de la puissance initiale du signal d'entrée. Combien d'harmoniques doivent être contenus dans le signal de sortie ?
En déduire la bande passante de l'amplificateur si l'on considère qu'

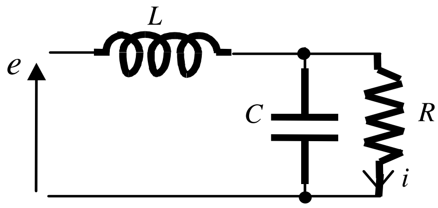
Exercice 2 : Application aux circuits

1) Donner le développement en Série de Fourier de la dérivée de la tension *e(t)*



2) En déduire le développement en Série de Fourier de la tension *e(t)*

3) Le tension *e(t)* est appliquée au circuit représenté ci-dessous



3.1) Donner l'équation différentielle reliant *e(t)* à *i(t)*

Réponse $e(t) = R.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt} + R.L.C.\frac{d^2i(t)}{dt^2}$

3.2) On applique le signal périodique *e(t)* à ce circuit électrique, dès lors le courant *i(t)* est périodique et peut être écrit sous la forme d'un développement en série de Fourier. En posant

$i(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.Cos(n.\omega.t)+b_n.Sin(n.\omega.t)$, en déduire a_n et b_n.

Exercice 3 : Résolution d'une équation différentielle

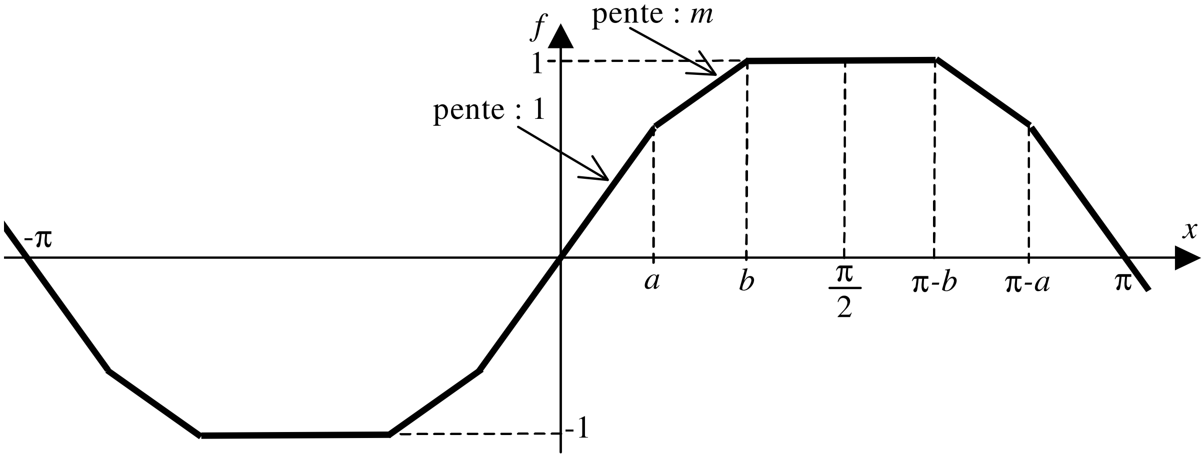
Soit la fonction impaire *f(x)* de période 2π tel que : $f(x) = 1 - cos\ (2x)$ pour $x \in [0, \pi]$

1) Calculer son développement en série de Fourier

2) En déduire la solution périodique de l'équation différentielle : $\frac{d^4y(x)}{dx^4} + y(x) = 1 - cos\ (2x)$, en posant la solution sous la forme : $y(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.Cos(nx)+b_n.Sin(nx)$ où a_0, a_n et b_n sont à déterminer.

Exercice 4 :

On désire synthétiser une fonction sinusoïdale (*f(x)*) de période 2*pi à l'aide de droites paramétrées.



1) Quelles sont les deux propriétés de *f(x)*. En déduire son développement en série de Fourier.

Réponse : $f(x) = \frac{4}{\Pi}\sum_{n=}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[(1-m)sin(na)+mSin(nb)\right].sin(n.x)$

2) Calculer les valeurs à donner à *a* et *b* pour que l'harmonique 5 soit nul quelque soit *m*.
Calculer les harmoniques 15 et 25.

Réponse : $a = \frac{\Pi}{5}$ $\qquad b = \frac{2\Pi}{5}$

3) Calculer la valeur à donner à *m* pour que l'harmonique 3 soit nul.
Calculer la valeur prise par les harmoniques 13, 23, …….7, 17, 27,…..

Réponse : $m = \frac{1}{1-2.Cos\left(\frac{3\Pi}{5}\right)}$

4) Si on réduit l'ordre du développement à 11, calculez le taux de distorsion :

$$\alpha = \frac{1}{b_1}.\sqrt{\sum_{n=1}^{11} bn^2}$$

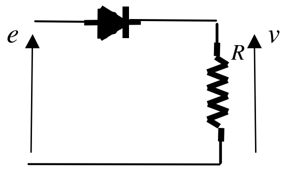
Exercice 5 : Modulation d'un signal en amplitude et démodulation

Soit $s(t) = E.Cos(\omega.t)$, un signal contenant une information contenue dans son amplitude et sa fréquence. La modulation d'amplitude consiste à créer un signal par multiplication du signal original avec un signal porteur de pulsation élevée ($\omega \leq \Omega$) : $e(t) = E.Cos(\omega.t).(1 + m.Sin(\Omega.t))$, où $m \leq 1$.

1) Représenter le spectre fréquentiel de *e(t)*

2) On utilise le montage représenté ci-dessous pour réaliser une détection linéaire. En considérant que la diode est idéale, déterminer le développement en série de Fourier de *v(t)*

   a) lorsque $m = 0$
   b) lorsque $m \neq 0$



Détection

3) On peut également utiliser une détection non linéaire du type $v(t) = k\,.e^2\,(t)$ pour $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$.

Déterminer le développement en série de Fourier

a. lorsque $m = 0$
b. lorsque $m \neq 0$

Montrer qu'il apparaît des harmoniques supplémentaires.
Quelles sont les conditions à réaliser pour éviter le recouvrement des spectres ?

Exercice 6 :

1) Développez en série de Fourier la fonction de période 2Π définie par :

$f(x) = \Pi - x$ pour $0 \leq x \leq \Pi$
$f(x) = \Pi + x$ pour $-\Pi \leq x \leq 0$

Réponse : $f(x) = \frac{\Pi}{2} + \frac{2}{\Pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,[1 - (-1)^n]\,.Cos\,(n.x)$

2) En déduire la somme de la série : $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$

Réponse : $\frac{\Pi^2}{8}$

Exercice 7 :

1) Développez en série de Fourier la fonction de période 2Π définie par : $f(x) = \Pi^2 - x^2$ pour $-\Pi \leq x \leq \Pi$ et de période $2\,\Pi$

Réponse : $f(x) = \frac{2}{3}\Pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4.\cos(n.\Pi)}{n^2}\,.Cos\,(n.x)$

2) En déduire que : $\Pi^2 = 6.\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{Cos(n.\Pi)}{n}\right)^2$

TRAVAUX DIRIGES
DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

TRANSFORMEE de Fourier

2$^{\text{ème}}$ Année

Certains résultats sont donnés à titre indicatif sous réserve d'erreurs de dactylographie

Institut de Génie Informatique et Industriel

IG2I
Institut de Génie Informatique et Industriel

MAP L2, TD No1
Transformée de Fourier

Exercice 1 :
a) Calculer la transformée de Fourier de $f(t) = e^{-at}.\gamma(t) - e^{at}.\gamma(-t)$, a est une constante positive
Réponse : $-\dfrac{2j\omega}{a^2+\omega^2}$

b) Que pouvez-vous dire sur la parité de $F(f)$
c) Tracez $f(t)$. Que pouvez-vous dire sur la parité de $f(t)$?

Exercice 2 :
a) Dessinez la fonction de $f(t) = e^{-a|t|}$, a est une constante positive
Calculer sa transformée de Fourier.
Que pouvez-vous dire sur la parité de $F(f)$?
Réponse : $\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$

Exercice 3 :
Soit $g(t) = Ae^{-t/\tau}$ pour $t \geq 0$ et $g(t) = 0$ ailleurs. $A>0$ et $\tau>0$.
a) Tracez $g(t)$.
b) Calculer sa transformée de Fourier : $G(f)$.
Réponse : $\dfrac{\tau.A}{1+j\omega\tau}$

c) Que pouvez-vous dire sur la parité de $|G(f)|$?
Tracez $|G(f)|$.
d) Combien vaut l'amplitude maximale de $|G(f)|$?
Réponse : $\tau.A$
Donnez l'expression des fréquences à la moitié de cette amplitude.
En déduire la largeur fréquentielle à la moitié de cette amplitude en fonction de τ.
Réponse : $\dfrac{1}{\pi\tau}$

c) Si τ tend vers zéro, comment évolue $g(t)$ et $G(f)$?

Exercice 4 :
a) Calculer la transformée de Fourier de $f_0(t) = e^{-a.t}.\gamma(t)$.
b) Calculer la transformée de Fourier de $f_1(t) = t.e^{-a.t}.\gamma(t)$.
c) Montrer que $F_1(f) = \dfrac{1}{-j2\Pi}\dfrac{dFo(f)}{df}$.

d) En déduire par récurrence la transformée de Fourier de $f_n(t) = \dfrac{t^n}{n!}.\ e^{-at}.\gamma(t)$.
e) Calculer la transformée de Laplace de $f_n(t)$, comment peut-on en déduire $Fn(f)$?

MAP L2, TD No2
Transformée de Fourier

Exercice 1 :

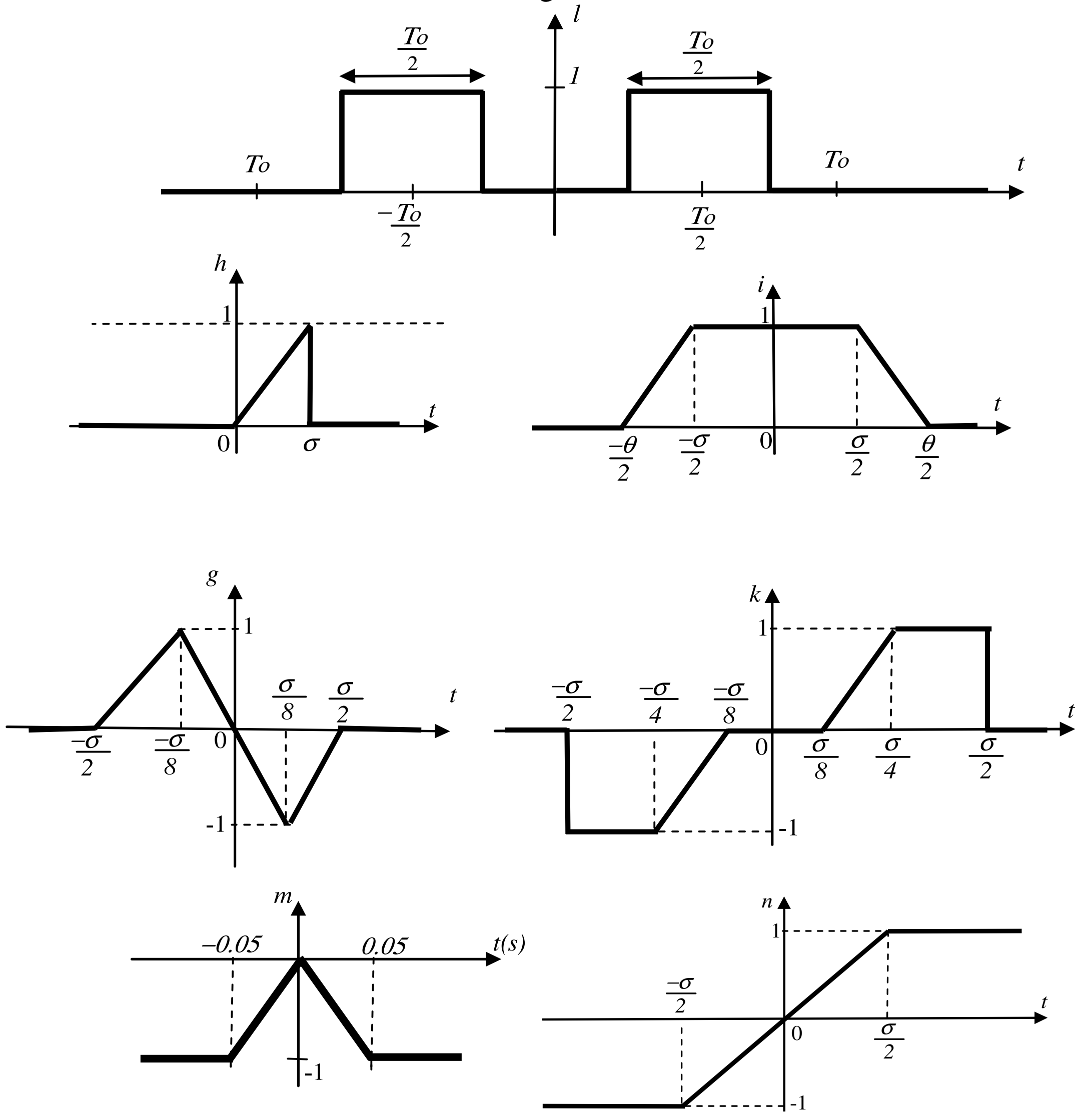
Calculer la transformée de Fourier de $f(t) = 1 - \left(\frac{2t}{\sigma}\right)^2$ *pour* $-\frac{\sigma}{2} \leq t \leq \frac{\sigma}{2}$ et $f(t) = 0$ ailleurs. σ est une constante positive.

a) Utilisez une méthode analytique
b) Utilisez une méthode graphique

Réponse : $-\frac{8}{\sigma\omega^2}\left(\cos\left(\omega\frac{\sigma}{2}\right) - \frac{2}{\sigma\omega}\sin\left(\omega\frac{\sigma}{2}\right)\right)$

Exercice 2:

Calculez les transformées de Fourier des signaux suivant



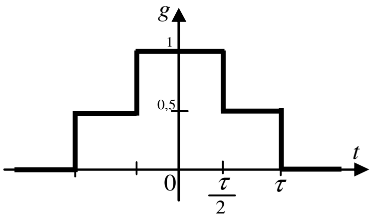
Exercice 3 :

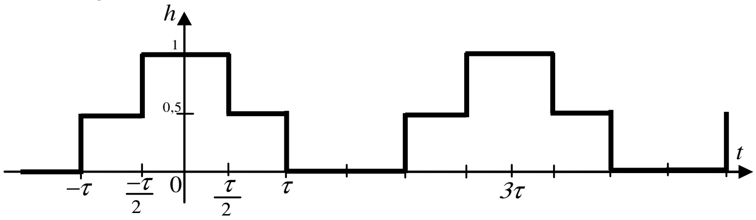
Calculer la transformée de Fourier de $f(t) = \dfrac{2}{\sigma}|t|$ *pour* $-\dfrac{\sigma}{2} \leq t \leq \dfrac{\sigma}{2}$ et $f(t) = 1$ ailleurs. σ est une constante positive. Tracez là.

Réponse : $F(f) = \dfrac{-1}{4\pi^2 f^2} \dfrac{8}{\tau} \sin^2\left(\pi f \dfrac{\tau}{2}\right)$

Exercice 4 :

a) Calculez la transformée de Fourier du signal *g(t)*.





b) En déduire la transformée de Fourier de la fonction périodique *h(t)*

IG2I
Institut de Génie Informatique et Industriel

MAP L2, TD No3
Transformée de Fourier

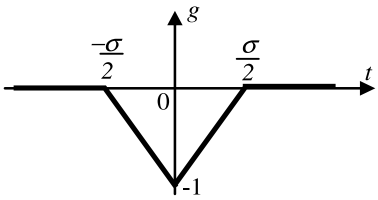
Exercice 1 :

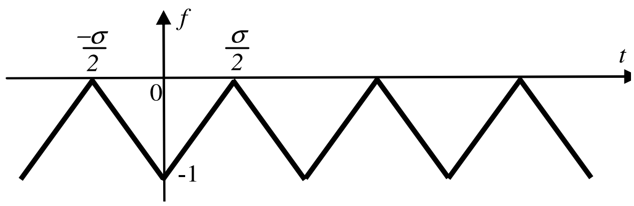
Calculer la transformée de Fourier de $g(t) = cos^2(\omega.t)$

Réponse : $\frac{1}{4}\left[-\delta(f+f_0)+2\delta(f)+\delta(f-f_0)\right]$

Exercice 2 :

a) Calculez la transformée de Fourier du signal *g(t)*.

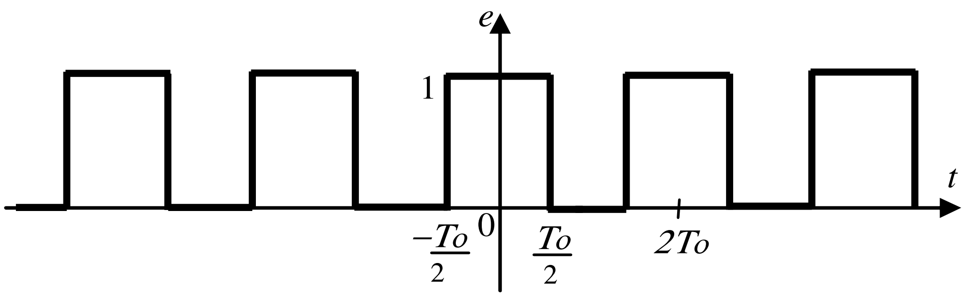




b) Tracez la transformée de Fourier du signal *g(t)*.
c) Calculez la transformée de Fourier du signal *f(t)*.
b) Tracez la transformée de Fourier du signal *f(t)*.

Exercice 3 :

1) Soit le signal périodique suivant :



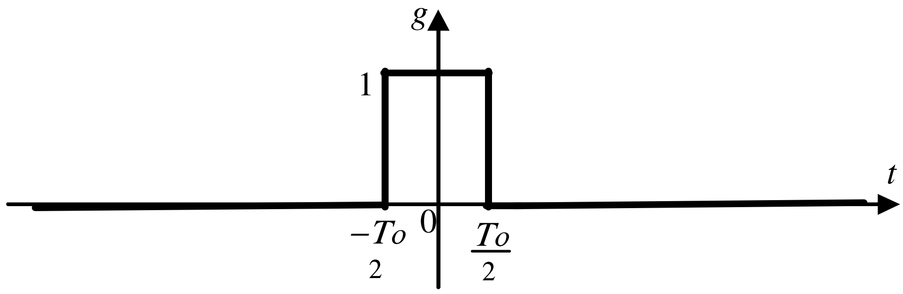
Calculer son développement en série de Fourier sous la forme :

$$e(t) = C_0 + \sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{\infty} C_n.e^{j.n.\omega o.t}$$

Représentez l'ensemble des coefficients C_n en fonction de n

2)

a) Calculez la transformée de Fourier du signal *g(t)*. Représentez son spectre fréquentiel.



b) En déduire le développement en série de Fourier de *e(t)*.
c) Tracez *E(f)*.

Exercice 4 :

a) Soit la fonction $g(t) = Cos(2\pi f_o t)$ pour $-\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2}$ et $g(t) = 0$ ailleurs, tracer $g(t)$

b) Calculez la transformée de Fourier de $g(t)$

Réponse : $G(f) = \frac{1}{2}.\left[\frac{\sin(\pi(f+f_o)T_o)}{\pi(f+f_o)} + \frac{\sin(\pi(f-f_o)T_o)}{\pi(f-f_o)}\right]$

c) Tracez *G(f)*

d) En déduire la transformée de Fourier de $Cos(2\pi f_o t)$

Réponse : $G(f) = \frac{1}{2}.[\delta(f+f_O) + \delta(f-f_O)]$

Exercice 5 :

a) Soit la fonction $f(t) = Cos\left(\frac{\pi.t}{\theta}\right)$ pour $-\frac{\theta}{2} \leq t \leq \frac{\theta}{2}$ et $f(t) = 0$ ailleurs, tracer $f(t)$ et calculez sa transformée de Fourier.

Réponse : $G(f) = \frac{\theta}{2}.\left[\frac{\sin\left(\left(f+\frac{1}{2.\theta}\right).\pi\theta\right)}{\left(f+\frac{1}{2.\theta}\right).\pi\theta} + \frac{\sin\left(\left(f-\frac{1}{2.\theta}\right).\pi\theta\right)}{\left(f-\frac{1}{2.\theta}\right).\pi\theta}\right]$

b) Calculez la transformée de Fourier de $g(t) = Cos\left(\frac{\pi.t}{\theta}\right)$

c) Soit $w(t) = 1$ pour $-\frac{\theta}{2} \leq t \leq \frac{\theta}{2}$ et $w(t) = 0$ ailleurs, calculez sa transformée de Fourier.

Réponse : $W(f) = \frac{\sin(\pi f\theta)}{\pi f}$

d) A partir de *W(f)* et *G(f)*, en déduire la transformée de Fourier de *f(t)*.

e) Tracer *F(f)*.

Exercice 6 :

a) Soit la fonction $f(t) = Cos^2\left(\frac{\pi.t}{\theta}\right)$ pour $-\frac{\theta}{2} \leq t \leq \frac{\theta}{2}$ et $f(t) = 0$ ailleurs, tracer $f(t)$ et calculez sa transformée de Fourier. Tracez *F(f)*.

b) Soit $g(t) = Cos^2\left(\frac{\pi.t}{\theta}\right)$, calculez la transformée de Fourier de $g(t)$.

c) Soit $w(t) = 1$ pour $-\frac{\theta}{2} \leq t \leq \frac{\theta}{2}$ et $w(t) = 0$ ailleurs, calculez la transformée de Fourier de $w(t)$.

d) En utilisant le produit de convolution, en déduire la transformée de Fourier de $f(t)$.

Exercice 7 :

a) Soit la fonction $f(t) = \frac{E}{2}\left(1+Cos\left(\frac{2\pi.t}{\theta}\right)\right)$ pour $-\frac{\theta}{2} \leq t \leq \frac{\theta}{2}$ et $f(t) = 0$ ailleurs, tracer $f(t)$ et calculez sa transformée de Fourier .

b) Soit $g(t) = \frac{E}{2}\left(1+Cos\left(\frac{2\pi.t}{\theta}\right)\right)$, calculez la transformée de Fourier de $g(t)$.

c) Soit $w(t) = 1$ pour $-\frac{\theta}{2} \leq t \leq \frac{\theta}{2}$ et $w(t) = 0$ ailleurs, calculez la transformée de Fourier de $w(t)$.

d) En utilisant le produit de convolution, en déduire la transformée de Fourier de $f(t)$.

e) Tracer $F(f)$.

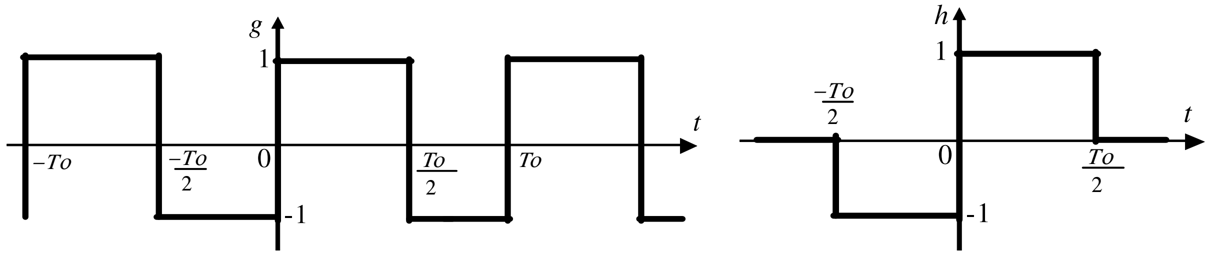
Exercice 8 :

Peut-on calculer la transformée de Fourier des signaux f, g, h, k en utilisant la transformée de Laplace ?

$f(t) = (1 - a.t).e^{-a.t}$, $g(t) = e^{-a.t}.\sin(\omega.t)$, $h(t) = sh(\omega.t)$, $k(t) = t.cos(\omega.t)$

Exercice 9 :

Soit les signaux suivant :



1) Donnez le développement en série de Fourier de la fonction périodique $g(t)$ sous la forme :

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos(n\omega_o t) + b_n \sin(n\omega_o t)\right)$$

Réponse : $g(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}[1-\cos(n\pi)]\sin(n\omega_o t)\right)$

2) Calculez $H(f)$, la transformée de Fourier de la fonction $h(t)$

Réponse : $H(f) = \frac{2}{j\pi f}\sin^2\left(\frac{\pi}{2} fT_o\right)$

3) En déduire le développement en série de Fourier de la fonction $g(t)$ sous la forme : $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, e^{jn\omega_o t}$

Réponse : $C_n = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}[1-\cos(n\pi)]$

Exercice 10:

a) Soit la fonction $g(t) = Sin\left(\frac{\pi.t}{\theta}\right)$, calculez la transformée de Fourier de $g(t)$.

b) Soit *w(t)* = 1 pour $-\frac{\theta}{2} \leq t \leq \frac{\theta}{2}$ et *w(t)* = 0 ailleurs, calculez la transformée de Fourier de *w(t)*.

c) En déduire la transformée de Fourier de la fonction $h(t) = Sin\left(\frac{\pi.t}{\theta}\right)$ pour $-\frac{\theta}{2} \leq t \leq \frac{\theta}{2}$ et *h(t)* = 0 ailleurs.

d) Tracer *H(f)*.

Exercice 11 :

Soit un signal $x(t)$ de spectre $X(f)$, déterminez la transformé de Fourier de $y(t) = x(t).\cos(2.\Pi.f_0.t)$.

Réponse : $\frac{1}{2}.\left[X\left(f - f_0\right) + X\left(f + f_0\right)\right]$

IG2I
Institut de Génie Informatique et Industriel

MAP L2, TD No4 : Applications

Exercice 1 :

1) Donner la transformée de Fourier d'un signal en créneau centré d'amplitude 1 pour $-\frac{\theta}{2} \leq t \leq \frac{\theta}{2}$, avec $\theta < 1ms$.

Dessinez C_θ *(f)*.

Réponse : $C_\theta(f) = \theta \frac{\sin(\pi f \theta)}{\pi f \theta}$

2) Donner la transformée de Fourier *G(f)* de la fonction $g(t) = Cos\left(2\pi\ f_0 t\right)$
3) Le signal *g(t)* de fréquence *f0*= 1MHz est modulé par multiplication avec le signal de la question 1) à la fréquence *f1* = 1 kHz. On obtient un signal périodique de période T_1 = 1ms. Représenter ce signal et calculer son développement en série de Fourier.
4) Calculez sa transformée de Fourier.

Exercice 2 :

On considère un système linéaire de réponse impulsionnelle pour *t > 0* **:** $\lambda e^{-\lambda t} \gamma(t)$

1)

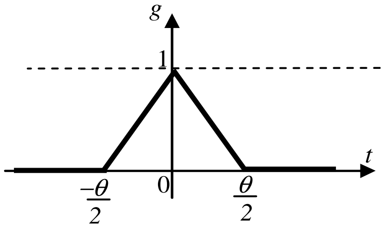
Donner la réponse temporelle de cet amplificateur à un créneau unitaire de largeur θ. On utilisera l'équation de convolution.

2)
   a) Déterminer la fonction de transfert fréquentielle.
   b) Tracez $20 \log |H(f)|$
   c) Quelle est la fonction réalisée par ce système ?

3)
   a) Déterminer la fonction de transfert opérationnelle (transformée de Laplace).
   b) Donner la réponse temporelle de cet amplificateur à une impulsion rectangulaire de largeur θ en utilisant la transformée de Laplace inverse pour la calculer.

Exercice 3 :

a) Calculez la transformée de Fourier du signal *g(t)*.

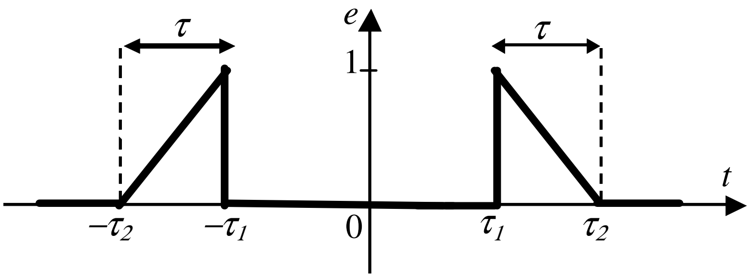


b) Calculer l'énergie du signal *g*

c) Un filtre *H(f),* tel que *H(f)*=1 pour *–fc<f<fc*, est appliqué sur ce signal , calculer l'énergie perdue, en considérant que *sin(x)/x=1/x* pour *x* très grand.

d) Déterminez la fréquence de coupure pour que cette énergie perdue représente au plus 1/1000 de l'énergie de *g*.

Exercice 4 : Soit le signal en tension suivant avec $\tau_2 = \tau_1 + \tau$:



1) Calculer sa transformée de Fourier

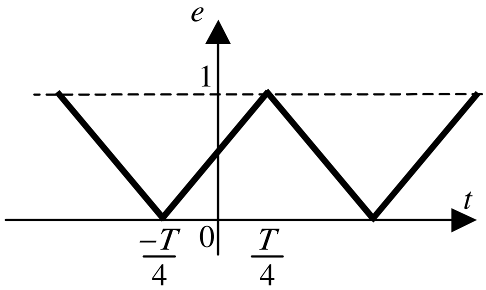
Réponse : $E(f) = \frac{-1}{2(\pi f)^2 \tau}\left[\cos(2\pi f \tau_2) - \cos(2\pi f \tau_1)\right]$

2) Cette tension est appliquée aux bornes d'une résistance R. Calculez l'énergie du signal *e(t)*.

Réponse : $E(f) = \frac{2}{3.R}.\tau$

Exercice 5 : Puissance

1) Calculer la puissance moyenne dissipée dans une résistance R de 1 Ohm si *e(t)* représente une tension.



Réponse : $\frac{1}{3R}$

2) Calculer le développement en série de Fourier du signal *e(t)*

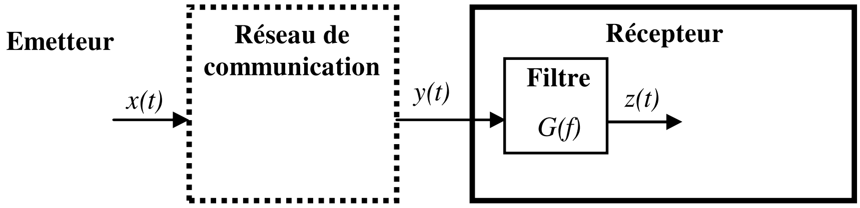
Réponse : $e(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}.\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).\sin(n\omega_o t)\right)$

3) En déduire la valeur de la série : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$ pour n différent de 0 et impair.

Exercice 6 :

Un signal est émis et transmis à travers un réseau de communication. Le signal reçu par le récepteur a pour expression :

$y(t) = a.x(t - t_0) + b.x(t - t_1)$ avec les constantes telles que : $0 < b << a$ et $0 < t_0 < t_1$



1) Déterminez la fonction de transfert du réseau de communication : $H(f)$

Réponse : $a.e^{-j.2\pi f.t_0} + .be^{-j.2\pi f.t_1}$

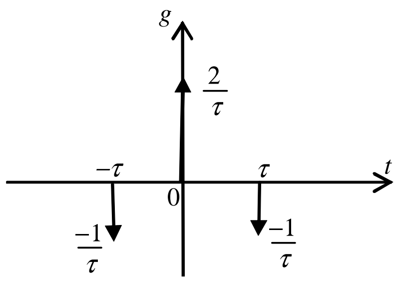
2) On souhaite corriger la distorsion apportée sur $x(t)$ par ce canal de communication en utilisant un filtre appelé « égaliseur ». On veut retrouver en sortie de ce filtre $x(t - t_0)$. Déterminez la fonction de transfert de ce filtre : $G(f)$.

Réponse : $\dfrac{1}{a.+.be^{-j.2\pi f.(t_0 - t_1)}}$

3) Déterminez l'expression temporelle du signal de sortie du filtre $z(t)$ en fonction de $y(t)$.

Exercice 7 :

1) Soit *g(t)* la dérivée seconde du signal *e(t)*. Tracez *e(t)*.

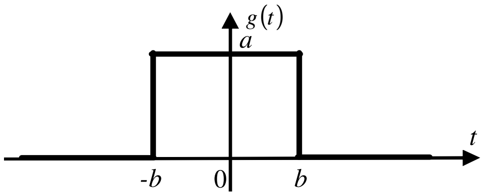


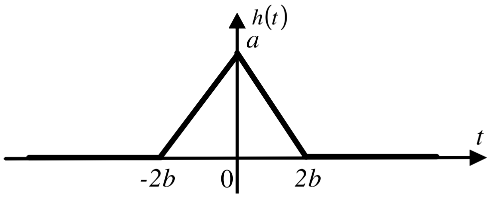
2) Tracez le spectre fréquentiel du signal *e(t)*.
3) Calculer l'énergie du signal *e*
4) Un filtre *H(f),* tel que *H(f)*=1 pour *–fc<f<fc*, est appliqué sur ce signal , calculer l'énergie perdue, en considérant que *sin(x)/x=1/x* pour *x* très grand.
5) Déterminez la fréquence de coupure pour que cette énergie perdue représente au plus 1/1000 de l'énergie de *e*.

6) On applique maintenant à l'entrée de ce filtre la tension : $u(t) = 10\sin\left(2\text{pi}\,\frac{f_c}{2}\,t\right)$, tracez le spectre fréquentiel du signal de sortie.
7) On applique maintenant à l'entrée de ce filtre une impulsion de Dirac, tracez le spectre fréquentiel du signal de sortie.

Exercice 8 :

1) Calculez l'énergie du signal $g(t)$.





Réponse : $2a^2b$

2) Tracez le spectre fréquentiel *G(f)*.

3) Calculez l'amplitude du signal pour que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 1$

Réponse : $\frac{1}{2.b}$

4) Donnez l'expression temporelle de *g(t)*.

Réponse : $a[\gamma(t+b)-\gamma(t-b)]$

5) En étudiant la limite lorsque $b \to 0$ de *G(f),* déterminer la transformée de Fourier d'une impulsion de Dirac ?

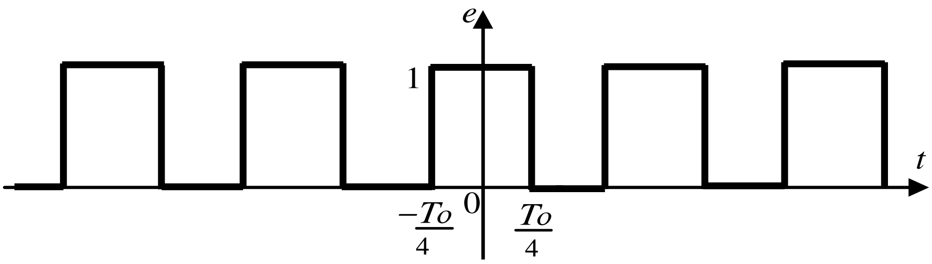
Réponse : $g(t)$ devient une impulsion de Dirac , $G(f)$ devient constant

6) Calculez la transformée de Fourier de *h(t)*.

Réponse : $2.b.a.\left[\frac{\sin(2\pi.f.b)}{2\pi.f.b}\right]^2$

7) Montrez que le produit de convolution de deux créneaux *g(t)* est proportionnel à *h(t)*.

Exercice 9 : On pourra faire l'approximation suivante $\pi^2 = 10$. Soit le signal périodique suivant :



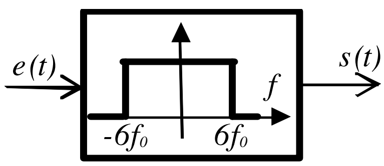
1) Calculer sa transformée de Fourier

2) Calculer son développement en série de Fourier sous la forme :

$$e(t) = C_0 + \sum_{n=-\infty,\ n\neq 0}^{\infty} C_n.e^{j.n.\omega o.t}$$

3) Calculez l'énergie du signal *e(t)*.

4) Ce signal traverse un système dont la bande passante est comprise entre 0 Hertz et $6f_0$ Hertz. Le gain dans la bande est constant et égal à 1, en dehors de la bande, le gain est nul. Donnez l'équation du signal de sortie *s(t)*.



5) Calculez l'énergie du signal *s(t)*.

6) Donner le pourcentage d'énergie perdue.

Exercice 10

Soit le signal *x(t)* périodique comportant uniquement :
– une composante constante d'amplitude A_0,
– un harmonique à la fréquence fondamentale f_0=10 MHz, d'amplitude A_1 et de phase φ_1,
– un harmonique à la fréquence 2 f_0, d'amplitude A_2 et de phase φ_2

1) Donnez l'expression temporelle de *x(t)*.
2) Déterminez l'expression mathématique de la transformée de Fourier : *X(f)*.

On échantillonne le signal *x(t)* à l'aide d'un échantillonneur idéal de fréquence d'échantillonnage *fe*.

3) Quelle est la valeur minimale du signal admissible pour cette fréquence d'échantillonnage ?

On choisit *fe* = 9MHz.

4) Tracez le spectre fréquentiel |*X(f)*| dans la bande de fréquence [-20 MHz, 20 MHz].
5) A quoi correspond le contenu harmonique dans la bande de fréquence [-2,5 MHz, 2,5 MHz].

On choisit *fe* = 7MHz.

6) Tracez le spectre fréquentiel |*X(f)*| dans la bande de fréquences [-20 MHz, 20 MHz].
7) Que remarque-t-on dans la bande de fréquences [-2,5 MHz, 2,5 MHz] ?

TRANSFORMEES DE LAPLACE usuelles :

Domaine Temporel	Domaine de Laplace
$K.\gamma(t)$, échelon d'amplitude K	$\frac{K}{p}$
$t.\gamma(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$t^n.\gamma(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{at}.\gamma(t)$	$\frac{1}{p-a}$
$te^{at}.\gamma(t)$	$\frac{1}{(p-a)^2}$
$t^n e^{at}.\gamma(t)$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$\cos\omega t.\gamma(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin\omega t.\gamma(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$e^{at}\cos\omega t.\gamma(t)$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin\omega t.\gamma(t)$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
$ch\alpha t.\gamma(t)$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$
$sh\alpha t.\gamma(t)$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
$e^{at}ch\alpha t.\gamma(t)$	$\frac{p-a}{(p-a)^2-\alpha^2}$
$e^{at}sh\alpha t.\gamma(t)$	$\frac{\alpha}{(p-a)^2-\alpha^2}$

Remarque : $\gamma(t)$ est la fonction échelon unité

PROPRIETES DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE :

Propriétés	Domaine Temporel $f(t).\gamma(t)$	Domaine de Laplace $F(p)$
Linéarité	$[a.f(t)+b.g(t)].\gamma(t)$	$a.F(p)+b.G(p)$
Changement d'échelle de t	$f\left(\frac{t}{k}\right).\gamma(t)$	$k.F(kp)$
Changement d'échelle de p	$k.f(kt).\gamma(t)$	$F\left(\frac{p}{K}\right)$
Translation de t	$f(t-\lambda).y(t-\lambda)$	$e^{-p\lambda}F(p)$
Translation de p	$e^{-\alpha t}f(t).\gamma(t)$	$F(p+\alpha)$
Périodicité de période de T	Motif : $f_o(t).\gamma(t)$ $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} f_o(t-nT).\gamma(t-nT)$	$F_o(p)$ $F(p)=\frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}$
Dérivation de f(t)	$\frac{d}{dt}[f(t).\gamma(t)]$	$p.F(p)-f(0^+)$
Dérivation de F(p)	$-t.f(t).\gamma(t)$	$\frac{d}{dp}[F(p)]$
Intégration de f(t)	$\int_0^t f(u)du.\gamma(t)$	$\frac{1}{p}.F(p)$
Intégration de F(p)	$\frac{f(t)}{t}.\gamma(t)$	$\int_p^{\infty} F(u)du$
Généralisations : **Dérivée $n^{ième}$ de f(t)** **Intégrale $n^{ième}$ de f(t)**	$\frac{d^n}{dt^n}[F(t).\gamma(t)]$ $\underbrace{\int_o^t \cdots \int_o^t}_{n \text{ fois}} f(u)du^n.\gamma(t)$	$p^n.F(p)-p^{n-1}f(0^+)-p^{n-2}.f'(0^+)\ldots-f^{(n-1)}(0^+)$ $\frac{1}{p^n}.F(p)$
Théorème : **Valeur initiale** **Valeur finale**	$\lim_{t\to 0^+} f(t)=\lim_{p\to+\infty} p.F(p)$ $\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{p\to 0^+} p.F(p)$	

Institut de Génie Informatique et Industriel

PRIMITIVES (*)

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \qquad F \text{ primitive quelconque de } f$$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$x^n \ (n \in N - \{-1\})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{1}{1+\cos x}$	$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{1-\cos x}$	$\mathrm{cotg}\,\frac{x}{2}$
$x^\alpha \ (\alpha \in R - \{-1\})$	$\frac{x^{a+1}}{\alpha+1}$	$e^{m.x}$	$\frac{e^{m.x}}{m}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$Log\ x$	$x.Log\ x - x$
$\frac{1}{x}$	$Log\ \lvert x\rvert$	$ch\,x$	$sh\,x$
$\cos x$	$\sin x$	$sh\,x$	$ch\,x$
$\cos(\omega x + \varphi)$	$\frac{1}{\omega}.\sin(\omega.x+\varphi)$	$th\,x$	$Log\,(ch\,x)$
$\sin x$	$-\cos x$	$\coth x$	$Log\ \lvert sh\ x\rvert$
$\sin(\omega.x+\varphi)$	$-\frac{1}{\omega}\cos(\omega.x+\varphi)$	$\frac{1}{ch^2 x}$	$th\,x$
$tg\ x$	$-Log\ \lvert\cos x\rvert$	$\frac{1}{sh^2 x}$	$-\coth x$
$cotg\ x$	$-Log\ \lvert\sin x\rvert$	$\frac{1}{sh\,x}$	$Log\ \left\lvert th\,\frac{x}{2}\right\rvert$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$	$tg\ x$	$\frac{1}{ch\,x}$	$2\ Arc\ tg\ (e^x) =$ $2\ Arc\ tg\left(\mathrm{th}\frac{x}{2}\right) =$ $Arc\ tg\ (sh\ x)$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot g\ x$	$\frac{1}{1+ch\,x}$	$th\,\frac{x}{2}$
$\frac{1}{\cos x}$	$Log\ \left\lvert tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$\frac{1}{1-ch\,x}$	$\coth\,\frac{x}{2}$
$\frac{1}{\sin x}$	$Log\ \left\lvert tg\,\frac{x}{2}\right\rvert$		

IG2I
Institut de Génie Informatique et Industriel

DÉRIVÉES (*)

$(u+v)' = u'+v'$

$(u.v)' = u'.v+u.v'$

$(\lambda.u)' = \lambda.u'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v.u'-u.v}{v^2}$

$\left(f[u(x)]\right)' = f'[u(x)]\,u'(x)$

$(u.v)^{(n)} = u^{(n)}.v + C_n^1.u^{(n-1)}.v' + \ldots + C_n^k.u^{(n-k)}.v^{(k)} + \ldots + u.v^{(n)}$

y	**y'**	**y**	**y'**
$x^n\,(n\in)$	$n.\,x^{n-1}$	$e^{m.x}\,(m\in R)$	$m.e^{m.x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	a^x	$a^x\,Log\,a$
$a^x\,(\alpha\in{}^R)$	$a.x^{a-1}$	$Log\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\log_a\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x\,Log\,a}$
$\cos x$	$-\sin x$	$ch\,x$	$sh\,x$
$\sin x$	$\cos x$	$sh\,x$	$ch\,x$
$tg\,x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+tg^2x$	$th\,x$	$\frac{1}{ch^2x} = 1+th^2x$
$\cot g\,x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$\coth x$	$\frac{-1}{sh^2x}$
$Arc\cos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arg\,ch\,x$	$\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$
$Arc\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arg\,sh\,x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$Arc\,tg\,x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$Arg\,th\,x$	$\frac{1}{1-x^2}$

(*) Sous réserve d'un intervalle correcte de variation pour *x*

FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

RELATIONS AVEC L'ARC DOUBLE :

$\sin 2a = 2.\sin a.\cos a$

$\cos 2.a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2.\cos^2 a - 1 = 1 - 2.\sin^2 a$

$\sin^2 a = \frac{1}{2}.(1 - \cos 2a)$

$\cos^2 a = \frac{1}{2}.(1 + \cos 2a)$

$\sin^2 a = \frac{2.tga}{1 + tg^2 a}$ $\qquad$ $\cos 2.a = \frac{1 - tg^2 a}{1 + tg^2 a}$

$tg2.a = \frac{2.tga}{1 - tg^2 a}$

EQUATIONS

$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi \qquad (k \in Z)$

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \qquad (k \in Z)$

$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + 2k\pi \qquad (k \in Z)$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k \in Z)$

TRANSFORMATION DE PRODUITS EN SOMMES

$\sin p + \sin q = 2.\sin\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2.\cos\frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2.\sin\frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2.\sin\frac{p-q}{2}.\sin\frac{p+q}{2}$

FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

VALEURS PARTICULIERES

x	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tgx	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	∞

RELATIONS

$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad$ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$ $\qquad$ $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \frac{1}{tg^2 x}$

	$-x$	$\pi - x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$x + \frac{\pi}{2}$	$x + n\pi$
sin	$-\sin x$	$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$(-1)^n \sin x$
cos	$\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$	$(-1)^n \cos x$

FORMULES D'ADDITION

$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a$ $\qquad$ $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$

$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga.tgb}$

$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \sin b.\cos a$ $\qquad$ $\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$

$tg(a-b) = \frac{tga - tgb}{1 + tga.tgb}$