



2019-ENAM-0067

École doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'ingénieur

Doctorat

THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Spécialité " Génie Électrique "

présentée et soutenue publiquement par

Lydéric DEBUSSCHÈRE

le 19 décembre 2019

Application de techniques d'estimations d'erreur

à l'analyse de dispositifs électromagnétiques basses fréquences

Directeur de thèse : **Stéphane CLÉNET** Co-encadrement de la thèse : **Yvonnick LE MÉNACH**

Jury

- M. Zhuoxiang REN, Professeur, L2E, Sorbonne Université
 M. Gérard BERTHIAU, Professeur, IREENA, Université de Nantes
 Mme. Algiane FROEHLY, Ingénieur, CARDAMOM, Inria Bordeaux
 M. Yvonnick LE MÉNACH, Professeur, L2EP, Université de Lille
 M. Stéphane CLÉNET, Professeur, L2EP, Arts et Métiers
 M. Benjamin GOURSAUD, Ingénieur chercheur, ERMES, EDF R&D
- Président / Rapporteur Rapporteur Examinateur Examinateur Examinateur Examinateur

Remerciements

Tout d'abord je remercie mes directeurs de thèse MM. Yvonnick Le MéNACH et Stéphane Clénet ainsi que mes encadrants MM. Jean-Pierre Ducreux et Benjamin Goursaud pour m'avoir guidé, formé, soutenu avec bienveillance tout au long de cette thèse.

Vient ensuite mes remerciements à MM. Zhuoxiang REN et Gérard BERTHIAU qui ont eu l'extrême gentillesse d'accepter, malgré les délais, d'être mes rapporteurs. Je remercie aussi Mme Algiane FROEHLY d'avoir accepté de siéger à mon jury.

Je remercie les membres du L2EP et plus particulièrement du P2 (avant leur exode) qui m'ont accueilli durant 5 années : Yvonnick, Loïc, Julien, Rafaël, Roberta, Francis, Antoine, Bilel, Loris, Stéphane, Laurent, Smail, Guillaume, Olivier, Geneviève, Nathalie, Thomas, Thierry, Ronan, Abdelmounaïm, Abdelkader, Emna, Rihab, Zuqi...

Je remercie aussi les membres du département ERMES et plus particulièrement de l'ancien groupe T67, pour leur accueil durant mes deux dernières années de thèse. Je remercie notamment Stefan, Jean-Pierre, Benjamin, Pierre, Fanny, Eilin, Gilles, Karim, Mircea, Paul, Paul, Michel, Jean, Alain, Laurent, Jean-Yves, Leyzmir.

Je n'oublie pas les stagiaires : Rémi, Guillaume, Pierre, Thibauld, Honorine, Léa, Albane, Nicolas.

Je termine en remerciant par ordre chronologique les personnes qui m'ont inspirées et guidées vers le chemin de la thèse : M. Serge Varjabedian, M. Jean-Paul Bonnet, François, ma femme, M. Emmanuel Creusé, Mme Roberta Tittarelli.

Table des matières

Ta	Table des matières4			4	
Ta	Table des figures7Liste des tableaux9Notations et définitions11				
Li					
N					
Introduction 15					
1	Don	naine c	ontinu	19	
	1.1	Modé	lisation	19	
		1.1.1	Équations de Maxwell	19	
		1.1.2	Cas d'étude	20	
		1.1.3	Conditions aux Limites	20	
	1.2	Espac	es fonctionnels	22	
		1.2.1	Les espaces L^2	22	
		1.2.2	Le complexe de De Rham	23	
	1.3	Formu	lations	24	
		1.3.1	Formulations magnétostatiques	24	
			1.3.1.1 Formulation <i>A</i>	24	
			1.3.1.2 Formulation Ω	26	
		1.3.2	Formulations Magnétodynamiques	27	
			1.3.2.1 Formulation $A - \varphi$ temporelle	27	
			1.3.2.2 Formulation $T - \Omega$ temporelle	29	
		1.3.3	Formulations magnétoharmoniques	31	
			1.3.3.1 Formulation $\mathbf{A} - \varphi$ harmonique	32	
			1.3.3.2 Formulation $T - \Omega$ harmonique	32	
	1.4	Concl	usion	33	
2	Don	naine d	liscret	35	
	2.1	Comp	lexe de Whitney	35	
		2.1.1	Fonctions de formes	36	
			2.1.1.1 Fonctions nodales	36	

		2.1.1.2	Fonctions d'arêtes
		2.1.1.3	Fonctions de facette
		2.1.1.4	Fonctions de volume 38
	2.1.2	Matrice	s d'incidence
		2.1.2.1	Incidence arête/nœud
		2.1.2.2	Incidence face/arête
		2.1.2.3	Incidence volume/face
2.2	Formu	ulations d	liscrètes
	2.2.1	Magnét	ostatique
		2.2.1.1	Formulation <i>A</i> discrète
		2.2.1.2	Formulation Ω discrète $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 45$
	2.2.2	Magnét	oharmonique
		2.2.2.1	Formulation $A - \varphi$ discrète
		2.2.2.2	Formulation $T - \Omega$ discrète $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 46$
2.3	Estim	ateurs et	indicateurs d'erreur
	2.3.1	Définiti	ons
	2.3.2	Estimat	eur d'erreur hiérarchique
	2.3.3	Estimat	eur d'erreur équilibré 48
		2.3.3.1	Magnétostatique
		2.3.3.2	Magnétoharmonique
	2.3.4	Estimat	eur d'erreur résiduel
		2.3.4.1	EER appliqué à la formulation A
		2.3.4.2	EER appliqué à la formulation Ω
		2.3.4.3	EER appliqué à la formulation $A - \varphi$
		2.3.4.4	EER appliqué à la formulation $T - \Omega$
		2.3.4.5	Synthèse
	2.3.5	Indicate	eurs d'erreur
		2.3.5.1	Lissage de solution
		2.3.5.2	Saut normal et tangentiel
		2.3.5.3	Discontinuité du gradient
		2.3.5.4	Perturbation de l'énergie
		2.3.5.5	Perturbation nodale
	2.3.6	Synthès	e
2.4	Adapt	ation de	maillage
	2.4.1	Sélectio	n des éléments
	2.4.2	Raffiner	nent
		2.4.2.1	h-raffinement
		2.4.2.2	p-raffinement
		2.4.2.3	r-raffinement
		2.4.2.4	hr-raffinement

		2.4.3	Carte de taille	62
		2.4.4	Conclusion	64
3	Mét	hode d	'adaptation de maillage	65
	3.1	Conce	ption d'une méthode	65
		3.1.1	De l'EE à la carte de taille	67
		3.1.2	Contrôle de la qualité des mailles	70
	3.2	Valida	tion	72
		3.2.1	Cube de Rubinacci	72
			3.2.1.1 Description du système	72
			3.2.1.2 Résultats	73
		3.2.2	Effet de peau 1D	79
			3.2.2.1 Description du système	79
			3.2.2.2 Résultats	80
	3.3	Concl	usion	86
4	Δnn	licatio	ns industrielles	87
т	лрр 4 1	Adapt	ration de maillage pour le CND	87
	T .1	лиарі 4 1 1	Présentation du CND par courants de Foucault	87
		<u>4</u> 12	Spécificité de la modélisation CND	89
		413	Estimateur d'erreur	90
	42	TFAM	[Problème 8	91
	1.2	4 2 1	Présentation	91
		4 2 2	Résultats	93
	43	COFR	FND Problème 2	99
	1.0	431	Présentation	99
		432	Résultats	102
		1.0.2	4 3 2 1 Définition d'une référence	102
			4.3.2.2 Adaptation de maillage	102
		433	Conclusion	104
		1.5.5		100
Co	nclu	sion		111
A	Élér	nents F	Finis	113
B	Mat	rices d'	<i>'incidence</i>	115
	B.1	Incide	ence noeud/arête	115
	B.2	Incide	ence facette/arête	115
	B.3	Incide	ence volume/facette	116
С	Forr	nulaire	2	117
D	Forr	nule de	e quadrature	119

E	Sensibilité du paramètre hgrad	121
F	Effet de peau 1D : Solutions analytiques	123
Bił	oliographie	125

Table des figures

0.1	Patch : les éléments marqués par des points forment le <i>patch</i> de l'élément gris.	13
1.1	Domaine dans le cas magnétodynamique (a), et magnétostatique (b)	21
1.2	Frontières du domaine magnétodynamique	21
2.1	Maillage conforme à gauche ; maillage non conforme à droite	36
2.2	Arête	37
2.3	Facette	38
2.4	Histogramme de répartition d'estimation d'erreur	58
2.5	Méthode de Bank	58
2.6	Découpage de quadrangle	59
2.7	Noeud au centre	59
2.8	Octasection : tétraèdre	59
2.9	Octasection : hexaèdre	60
2.10	M_0	60
2.11	M_1^{nc}	60
2.12	$M_1^{\overline{c}}$	60
2.13	Éléments de transitions en 3D	61
2.14	Déplacement de nœuds	61
2.15	r-raffinement : zone de déplacement	62
2.16	Déplacement de nœuds	62
2.17	Découpe d'arête	62
2.18	Suppression d'arête	62
3.1	Maillage initial; dimension: 4 × 4	66
3.2	Maillage adapté par une carte de taille uniforme de valeur 1	66
3.3	Maillage adapté par une carte de taille uniforme de valeur 2	66
3.4	Maillage adapté par une carte de taille uniforme de valeur 0.5	67
3.5	Maillage adapté par une carte de taille valant 0.1 sur la diagonale et 1 sur	
	les autres nœuds.	67

3.6	Calcul de e_n à partir des longueurs e_{T_i} du voisinage du noeud $n. \ldots \ldots$	70
3.7	Illustration, en rouge, de la distance de Hausdorff.	71
3.8	Schéma de la méthode d'adaptation de maillage	72
3.9	Cube de Rubinacci	73
3.10	Maillages réguliers. Nombre d'éléments : 192, 1536, 12288 et 98304	74
3.11	Cube de Rubinacci : Évolution de η_G pour l'EEE	74
3.12	Cube de R. : Évolution de <i>cv</i> pour l'EEE	75
3.13	Cube de R. : Évolution de <i>s</i> pour l'EEE	76
3.14	Cube de Rubinacci : répartition de l'EEE sur les maillages \mathcal{M}_1^r , \mathcal{M}_2^r , \mathcal{M}_3^r et \mathcal{M}_4^r	77
3.15	Cube de Rubinacci : répartition de l'EEE sur les maillages \mathcal{M}_4^r , $\mathcal{M}_{23}^{(1)}$ (103 239	
	éléments), $\mathcal{M}_{20}^{(2)}$ (100395 éléments) et $\mathcal{M}_{10}^{(3)}$ (100867 éléments)	78
3.16	Effet de peau 1D : schéma du système	79
3.17	Effet de peau 1D : Géométrie du système et conditions aux limites	80
3.18	Effet de peau 1D : Cartes d'estimation d'erreur équilibré par itération ; l'échelle colorimétrique, qui est celle du maillage initial, est identique pour toutes les	
	cartes	81
3.19	Effet de peau 1D : Maillages par itération; en bleu : l'air, en rouge : la	
	plaque ; en orange : la bobine	82
3.20	Effet de peau 1D : Évolution de l'écart-type de l'EEE (en haut) ; évolution du	
	coefficient de variation de l'EEE (en bas)	83
3.21	Effet de peau 1D : Évolution de l'EE équilibré global	84
3.22	Effet de peau 1D : Partie réelle et imaginaire de la composante non nulle du	
	champ <i>H</i> (en haut) et du champ <i>J</i> (en bas) tracées selon l'axe <i>x</i> . Les champs	
	calculés sur le maillage initial sont en rouge, ceux de la dernière itération	
	sont en vert, les étapes intermédiaires sont en bleu et la solution exacte en	
	gris	85
4.1	Cas avec défaut	90
4.2	Cas sans défaut	90
4.3	TEAM problème 8 : Géométrie du système et conditions aux limites	92
4.4	TEAM problème 8 : Positions de la sonde	92
4.5	TEAM problème 8 : Signal débruité (itération 0) : maillages initiaux	93
4.6	TEAM problème 8 : Signal débruité, itération 1 avec l'EER $A - \varphi$: maillages	
	initiaux et adaptés	94
4.7	TEAM problème 8 : Signal débruité, itération 1 avec l'EER $T - \Omega$: maillages	
	initiaux et adaptés	94
4.8	TEAM problème 8 : Signal débruité, itération 1 avec l'EEE : maillages ini-	
	tiaux et adaptés	95
4.9	TEAM problème 8 : Signal débruité, itération 1 avec l'EEED ; maillages ini-	
	tiaux et adaptés	95

4.10	TEAM problème 8 : pertes par effet Joule (en haut) et énergie magnétique	
	(en bas) en fonction de la position de la sonde	98
4.11	COFREND problème 2 : Géométrie de la sonde	99
4.12	COFREND problème 2 : Géométrie du système et conditions aux limites	100
4.13	Flux débruité de la bobine réceptrice ; défaut de référence	101
4.14	COFREND problème 2 : Bobine du maillage initial	101
4.15	COFREND problème 2 : défaut de référence	102
4.16	COFREND problème 2 : défaut d'intérêt	102
4.17	COFREND problème 2 : vue du système global	103
4.18	Évolution de Φ^{cal} , en fonction de la position, mesuré expérimentalement et	
	calculé par C3D	104
4.19	Maillage calibré par C3D ; défaut de référence	104
4.20	Balayage de la sonde suivant (Ox) et (Oy)	105
4.21	COFREND Problème 2 : Processus d'adaptation de maillage. $M_i^{type}(x)$ est le	
	maillage de l'itération <i>i</i> pour le défaut <i>type</i> avec la sonde sur la position <i>x</i> .	106
4.22	Module de φ sur la position O au cours de l'adaptation utilisant respective-	
	ment de haut en bas et de gauche à droite l'EER $A - \varphi$, l'EER $T - \Omega$, l'EEE,	
	et l'EEED	107
4.23	Argument de Φ^{cal} sur la position O au cours de l'adaptation utilisant res-	
	pectivement de haut en bas et de gauche à droite l'EER $A - \varphi$, l'EER $T - \Omega$,	
	l'EEE, et l'EEED	108
4.24	Signal, dans le plan complexe, de Φ^{cal} pour une itération d'adaptation gui-	
	dée par l'EEED	109
A.1	Élément de référence :	113
E.1	Convergences de l'erreur relative du cas académique de l'effet de peau 1D	
	pour différentes valeurs de paramètre hgrad	121

Liste des tableaux

2.1	Notations des champs vectoriels et scalaires discrets	43
2.2	Estimateurs résiduels ; magnétostatique	54
2.3	Estimateurs résiduels ; magnétoharmonique	54
3.1	Effet de peau 1D : Caractéristique des matériaux	80

4.1	TEAM problème 8 : Statistiques des EE	97
4.2	Module et argument de $\Phi^{cal}(O)$	103
4.3	Nombre d'éléments dans les maillages calibrés par C3D dans le cas des dé-	
	fauts de références et d'intérêt	103
4.4	Résultats de l'adaptation de maillage en position O pour les estimateurs	
	résiduels ($A - \varphi$ et $T - \Omega$ dans le même sous tableau) et équilibrés. Écart	
	relatif sur le module. Écart absolu sur l'argument.	110
A.1	Table de connectivité nœuds/arêtes de l'élément de référence; les arêtes	
	sont orientées du nœud n_d vers le nœud n_a	113
D.1	Formule de quadrature à quatre points sur le tétraèdre de référence	119

Notations et définitions

Domaine continu

Н	Champ magnétique
В	Induction magnétique
Ε	Champ électrique
J	Vecteur densité de courant
D	Domaine d'étude
Γ	Frontière de D ; ∂D
D_c	Domaine conducteur
D_{nc}	Domaine non-conducteur
Γ_{x}	Frontière servant à imposer des conditions limites sur le champ x . On
	a notamment : $\partial D_{nc} = \Gamma_B \cup \Gamma_H$ et $\partial D_c = \Gamma_J \cup \Gamma_E$
∂D	frontière, bordure de D
$X \uplus Y$	union directe de <i>X</i> et de <i>Y</i> , <i>i.e.</i> $X \cup Y$ tel que $X \cap Y = \emptyset$
V	Espace fonctionnel
а	Forme bilinéaire coercive continue sur V
1	Forme linéaire continue sur V
${\cal P}$	Formulation variation nelle standard pour la MEF : trouver $u \in V$ tel
	que $a(u, v) = l(v)$ $\forall v \in V$.
•	Produit scalaire (produit contracté) : $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i} x_i y_i$
×	Produit vectoriel
•	Valeur absolue
$\ \bullet\ _2$	Norme euclidienne : $\mathbf{x} \mapsto (\sum_i x_i^2)^{1/2}$
$\langle \bullet \bullet \rangle_D$	Produit scalaire hermitien sur $D : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \langle \mathbf{x} \mathbf{y} \rangle_D = \int_D \mathbf{x} \cdot \overline{\mathbf{y}}$
$\ \bullet\ _{L^2(D)}$	Norme $L^2(D)$ induite par le produit scalaire $\langle \bullet \bullet \rangle_D : \mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{x} \mathbf{x} \rangle_D^{1/2}$

Domaine discret

- *D_h* Domaine *D* discrétisé
- Γ_h Frontière de D_h ; ∂D_h
- V_h Espace V discrétisé
- *T* Élément de dimension 3 ; tétraèdre, pyramide, prisme ou hexaèdre
- *F* Élément de dimension 2 ; face
- A Élément de dimension 1 ; arête
- N Élément de dimension 0; noeud
- $\mathcal{T}(D_h)$ Ensemble des éléments de dimension 3 de $D_h : \{T \in D_h\}$
- $\mathcal{F}(D_h)$ Ensemble des faces de $D_h : \{F \in D_h\}$
- $\mathcal{N}(D_h)$ Ensemble des éléments de dimension 0 de D_h
- $\mathcal{F}_{int}(D_h)$ Ensemble des faces intérieures de $D_h : \{F \in D_h \setminus \Gamma_h\}$
- $\mathcal{V}_{d_1}^{d_2}(X)$ Voisinage de X : ensemble des éléments de dimension d_1 connectés à l'élément $X \in \{T, F, A, N\}$ par un élément de dimension d_2 appartenant à X.

$$\mathcal{P}_h$$
 Forme discrète de \mathcal{P} : trouver $u_h \in V_h$ tel que $a(u_h, v_h) = l(v_h)$
 $\forall v_h \in V_h.$

- $[\bullet]_F$ Saut à travers la face $F : \mathbf{u} \mapsto [\mathbf{u}]_F = u_{|T_1} u_{|T_2}$ avec $(T_1, T_2) \in \mathcal{V}_3^2(F)$
- *r* Résidu de \mathcal{P}_h ; $r: v \mapsto l(v) a(u_h, v)$.
- *e* Erreur $u u_h$
- ε_G Erreur globale au sens de l'énergie : $a(e_{|D}, e_{|D})^{1/2}$
- ε_T Erreur locale au sens de l'énergie sur l'élément $T : a(e_{|T}, e_{|T})^{1/2}$

Estimateur d'erreur

- η_T Estimateur d'erreur local
- η_G Estimateur d'erreur global : $\eta_G^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T^2$
- h_T Diamètre de l'élément T.
- h_F Diamètre de la face F.
- η_{moy} Valeur moyenne de η_T sur l'ensemble des éléments

 η_{\max} Valeur maximale de η_T sur l'ensemble des éléments

Un estimateur d'erreur est dit fiable si

$$\varepsilon_G \leq C_1 \eta_G,$$

et **localement efficace** si

$$\eta_{\mathcal{V}_3^2(T)} \leq C_2 \varepsilon_{\mathcal{V}_3^2(T)},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes ne dépendant que du problème et pas de sa discrétisation. $\mathcal{V}_3^2(T)$ peut être rencontré sous l'appellation de *patch de l'élément T*, noté $\mathcal{P}(T)$ (cf. figure 0.1). FIGURE 0.1 – Patch : les éléments marqués par des points forment le *patch* de l'élément gris.



Espace fonctionnels

Ces notations sont reprises de [Le Menach, 2012]

 $L^2(D) = \{ u \in D, \int_D |u|^2 < \infty \}$ $\mathbf{L}^{2}(D) = \{\mathbf{u} \in D^{3}, \int_{D} ||\mathbf{u}||_{2}^{2} < \infty\}$ $H(\mathbf{grad}, D) = \{u \in L^2(D), \mathbf{grad}(u) \in \mathbf{L}^2(D)\}$ $H(\mathbf{rot}, D) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(D), \mathbf{rot}(\mathbf{u}) \in \mathbf{L}^2(D)\}$ $H(\operatorname{div}, D) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(D), \operatorname{div}(\mathbf{u}) \in L^2(D) \}$ $H_0(\mathbf{grad}, D) = \{ u \in H(\mathbf{grad}, D), u_{|\Gamma} = 0 \}$ $H_0(\mathbf{rot}, D) = \{\mathbf{u} \in H(\mathbf{rot}, D), \mathbf{u}_{|\Gamma} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}\}$ $H_0(\operatorname{div}, D) = \{ \mathbf{u} \in H(\operatorname{div}, D), \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{|\Gamma|} = 0 \}$ $H_{0,x}(\mathbf{grad}, D) = \{u \in H(\mathbf{grad}, D), u_{|\Gamma_x|} = 0\}$ $H_{0,x}(\mathbf{rot}, D) = \{\mathbf{u} \in H(\mathbf{rot}, D), \mathbf{u}_{|\Gamma_{v}} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}\}$ $H_{0,x}(\operatorname{div}, D) = \{ \mathbf{u} \in H(\operatorname{div}, D), \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{|\Gamma_x|} = 0 \}$ $\widetilde{H_0}(\mathbf{rot},D) = \{\mathbf{u} \in H_0(\mathbf{rot},D), \langle \mathbf{u} | \mathbf{grad}(v) \rangle_D = 0, \forall v \in H_0(\mathbf{grad},D)\}$ $\widetilde{H_{0,x}}(\mathbf{rot},D) = \{\mathbf{u} \in H_{0,x}(\mathbf{rot},D), \langle \mathbf{u} | \mathbf{grad}(v) \rangle_D = 0, \forall v \in H_{0,x}(\mathbf{grad},D)\}$ $\widetilde{H}(\mathbf{grad}, D) = \left\{ u \in H(\mathbf{grad}, D), \int_{D} u = 0 \right\}$ $\widetilde{H_0}(\mathbf{grad}, D) = \left\{ u \in H_0(\mathbf{grad}, D), \int_D u = 0 \right\}$ $\widetilde{H_{0,x}}(\mathbf{grad}, D) = \left\{ u \in H_{0,x}(\mathbf{grad}, D), \ \bigcap_{D} u = 0 \right\}$

Introduction

Le Contrôle Non Destructif (CND) comme son nom l'indique est d'un très grand intérêt dans la mesure où il permet de contrôler une pièce sans impacter son intégrité. Il existe de nombreuses techniques de CND utilisant les ultrasons, les rayon X...Parmi ces techniques, le CND par Courants de Foucault (CF), qui permet de tester les pièces à matériaux conducteurs, est attractive car elle est simple à mettre œuvre. En effet, une bobine émettrice produit un champ électromagnétique variable vu par la pièce conductrice à contrôler. Il apparait alors dans la pièce des courants induits qui vont générer un champ de réaction. Ce champ de réaction va varier en présence d'un défaut puisque celui-ci va modifier le parcours des courants induits (le défaut introduisant une zone non conductrice dans le matériau conducteur). La bobine réceptrice du capteur verra donc le flux capté varier en fonction du type de défaut. Pour pouvoir détecter efficacement la nature du défaut il faut être capable d'établir une relation entre la réponse en flux de la bobine réceptrice (signature) et les caractéristiques géométriques du défaut. Une approche expérimentale est possible pour déterminer cette relation mais peut être coûteuse en temps et financièrement. Une autre solution consiste à utiliser un modèle numérique qui permet aisément de modifier la forme du défaut et ainsi, de pouvoir construire la relation entre la forme du défaut et sa signature [Zaoui et al., 2010][Louaayou et al., 2006][Bouzidi et al., 2012].

Il s'agit alors de résoudre les équations de Maxwell dans le cadre de la magnétodynamique en utilisant des méthodes numériques comme la Méthode des Éléments Finis (MEF) car une résolution explicite du problème n'est pas en général possible (la solution exacte du problème n'est pas accessible). Il est possible alors d'accéder à une approximation de grandeurs locales ou globales. La précision de cette approximation va dépendre de l'espace d'approximation dans lequel on recherche la solution approchée. Cet espace d'approximation est d'autant plus riche dans le cas de la MEF que le maillage est fin (la taille des éléments est faible). On obtient alors des solutions de grandes qualités mais au prix d'une consommation de ressources, aussi bien en temps de calcul qu'en mémoire, élevée ce qui est souvent incompatible avec une exploitation industrielle. Il faut donc alors adapter le maillage c'est-à-dire mailler de manière non uniforme en utilisant des éléments de petites tailles aux endroits où les champs varient rapidement (en amplitude et en direction) et utiliser un maillage plus lâche ailleurs. Cette approche peut être très efficace mais nécessite une expertise importante de la part de l'utilisateur et aussi du temps pour la « mise au point » du maillage. De plus, les approches proposées précédemment ne permettent pas de contrôler *a posteriori* la qualité de la solution approchée, c'est-à-dire l'erreur numérique que l'on commet par rapport à la solution exacte. Une autre alternative consiste à utiliser des méthodes d'adaptation de maillage couplée à des Estimateurs d'Erreur (EE) numériques [Chengjun Li et al., 1994][Li et al., 1994]. Les EE évaluent à la fois globalement mais aussi localement la qualité de la solution approchée. Cette évaluation locale permet d'identifier les zones où les erreurs sont les plus élevées et donc d'orienter le raffinement de maillage dans celles-ci. De même, on peut imaginer « déraffiner » le maillage (placer des éléments de tailles plus importantes) dans les zones où l'erreur est très faible de manière à obtenir une erreur homogène sur l'ensemble du domaine d'étude. Cette procédure est en général itérative où, partant d'un maillage initial, on résout le problème Éléments Finis sur lequel on estime l'erreur. À partir de la répartition de l'erreur on construit un nouveau maillage sur lequel on résout de nouveau le problème Éléments Finis ….Ce processus est répété jusqu'à ce que l'erreur requise soit obtenue.

En électromagnétisme basses fréquences des estimateurs ont été proposés [Tittarelli et al., 2018][Dular, 2009] et appliqués dans le cas de raffinement de maillage [Dular et al., 2015]. Dans le domaine du CND CF, les travaux d'adaptation restent rares [Krebs et al., 2009] alors que la variation de flux due au défaut que l'on cherche à calculer est de très faible amplitude et est donc très facilement perturbée par le bruit numérique.

Dans cette thèse nous nous proposons de mettre en place une procédure basée sur une estimation d'erreur et un logiciel de maillage couplé par une carte de taille et qui soit adaptée au CND CF. La carte de taille permet de déduire localement de l'estimation d'erreur des caractéristiques géométriques des éléments du maillage. Cette méthode est appliquée sur un cas académique puis industriel.

Ce travail a été effectué dans le cadre du laboratoire commun LAMEL (Laboratoire Avancé de Modélisation du Matériel Electrique) porté par le L2EP et EdF R&D.

Le manuscrit se décompose en 4 chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons les équations et formulations dans le domaine continu qui permettent de modéliser le comportement des champs dans le cadre du contrôle non destructif par courant de Foucault.

Dans le chapitre 2, la discrétisation par la MEF est introduite suivie d'un État de l'Art sur les méthodes d'estimations d'erreur rencontrées en électromagnétisme basse fréquence. Nous présentons aussi les différentes techniques de remaillage

Dans le chapitre 3, nous présentons la méthode qui nous permet de déterminer la carte de taille à partir de l'erreur estimée. Nous appliquons ensuite cette méthode sur deux exemples académiques.

Dans le chapitre 4, nous appliquons la méthode d'adaptation de maillage mise en place dans le chapitre précédent au TEAM Workshop 8 [TEAM 8, 1984] et sur une

application proposée par la COFREND [Maurice et al., 2014][COFREND, 1967] sur lequel nous disposons de résultats expérimentaux et d'une solution numérique de référence. Les différents estimateurs d'erreur, présentés dans le chapitre 2, seront utilisés pour guider l'adaptation de maillage. Afin de comparer les résultats obtenus, une quantité d'intérêt sera évaluée : il s'agit d'une différence de flux pour le TEAM Workshop 8 et d'un flux pour le cas de la COFREND.

Chapitre 1

Domaine continu

Dans ce chapitre, on effectue un rappel sur les équations de Maxwell et les formulations utilisées pour résoudre les problèmes d'électromagnétisme basse fréquence. On y fixera les notations qui seront utilisées par la suite.

1.1 Modélisation

1.1.1 Équations de Maxwell

Les équations de Maxwell décrivent les phénomènes électromagnétiques. Elles expriment les relations entre le champ magnétique H, le champ électrique E, l'induction électrique D, l'induction magnétique B, la densité de courant J, la densité de charge ρ :

חר

$$\operatorname{rot}(H) = J + \frac{\partial D}{\partial t},\tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot}(E) = -\frac{\partial B}{\partial t},\tag{1.2}$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{B}) = 0, \tag{1.3}$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{D}) = \rho. \tag{1.4}$$

À celles-ci s'ajoutent les lois de comportement suivantes :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{H},\tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{E}, \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E},\tag{1.7}$$

Avec μ la permittivité, σ la conductivité et ε la permittivité, qui seront toutes trois considérées <u>constantes</u> par la suite.

Notre étude se fera avec l'hypothèse de *l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires* (ARQS). Cela signifie que l'on peut négliger le temps de propagation des ondes électromagnétiques devant la période du signal, et implique que les courants de déplacement sont négligés. Une des conséquences principales est visible dans l'équation de Maxwell-Ampère (1.1). Les courants de déplacement correspondent au terme $\frac{\partial D}{\partial t}$, que l'on peut donc négliger. Une autre hypothèse de modélisation, couramment faite en électrotechnique, est de considérer la densité de charge ρ nulle. Ainsi, les équations (1.1),(1.2),(1.3) et (1.4) deviennent :

$$rot(H) = J \tag{1.8}$$

$$\operatorname{rot}(E) = -\frac{\partial B}{\partial t}$$
(1.9)

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{B}) = 0 \tag{1.10}$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{D}) = 0 \tag{1.11}$$

1.1.2 Cas d'étude

Notre domaine d'étude D sera composé d'un domaine conducteur D_c , d'un domaine non conducteur D_{nc} et d'un domaine source D_s tel que D_s est à l'intérieur de D_{nc} i.e. $D_s \subset D_{nc}$. Le domaine source D_s modélise un inducteur, filaire parfait, c'est à dire où l'on considère connue la répartition de la densité de courant. La densité de courant défini sur ce domaine sera notée J_s . Concernant les courants induits, définis sur le domaine conducteur D_c , ils seront notés J_{ind} . Ainsi, la densité de courant vaut, selon le domaine :

$$J = \begin{cases} J_s & \text{dans } D_s \\ J_{ind} & \text{dans } D_c \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$
(1.12)

La configuration où le domaine conducteur est présent sera appelé *le cas magnétodynamique*. Elle est représentée par le graphique 1.1a. Les équations à résoudre dans ce cas sont (1.8)(1.9)(1.10)(1.11).

Dans le cas où il n'y a pas de domaine conducteur (cela signifie que la conductivité σ est nulle partout dans D) nous sommes ramenés à une étude magnétostatique et nous dirons que cette configuration correspond au *cas magnétostatique*. Elle est représentée par le graphique 1.1b. Avec l'absence de conductivité dans le domaine l'expression des équations à résoudre devient :

$$rot(H) = J_s \tag{1.13}$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{B}) = 0 \tag{1.14}$$

1.1.3 Conditions aux Limites

Maintenant, on va définir les conditions aux limites utilisées pour la résolution de problèmes *magnétodynamiques* et *magnétostatiques*. On note ∂D la frontière du domaine D et ∂D_c la frontière du domaine D_c . Il y a deux cas possibles :



FIGURE 1.1 – Domaine dans le cas magnétodynamique (a), et magnétostatique (b)

- 1. le domaine conducteur est strictement inclus dans le domaine, *i.e.* $\partial D_c \cap \partial D = \emptyset$ cf. figure 1.2a
- 2. la frontière du domaine conducteur touche celle du domaine, *i.e.* $\partial D_c \cap \partial D \neq \emptyset$ cf. figure 1.2b



FIGURE 1.2 – Frontières du domaine magnétodynamique

Concernant le domaine conducteur D_c , sa frontière ∂D_c se décompose en deux parties, Γ_J et Γ_E , telles que $\partial D_c = \Gamma_J \cup \Gamma_E$. Sur Γ_J il est imposé que la composante normale de la densité de courant soit nulle,

$$\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}. \tag{1.15}$$

Sur Γ_E il est imposé que la composante tangentielle du champ électrique soit nulle,

$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}. \tag{1.16}$$

Dans la configuration du cas 1 (cf. Fig. 1.2a), Γ_J et ∂D_c sont confondues. Ainsi la condition (1.15) est imposée sur toute la frontière de D_c . Dans la configuration du cas 2 (cf. Fig. 1.2b), une partie de ∂D_c est commune avec $\partial D : \Gamma_E$. Il y est imposé la condition (1.16) mais aussi (1.15), (1.18) et (1.17).

Concernant le domaine non conducteur D_{nc} , sa frontière ∂D_{nc} se décompose en deux parties, Γ_B et Γ_H , telles que $\partial D_{nc} = \Gamma_B \uplus \Gamma_H$. Sur Γ_B il est imposé que la composante normale de l'induction magnétique soit nulle, soit

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} = 0. \tag{1.17}$$

Sur Γ_H il est imposé que la composante tangentielle du champ magnétique soit nulle, soit

$$\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}. \tag{1.18}$$

Dans la configuration du cas 1 (cf. Fig. 1.2a), Γ_B et Γ_H forme ∂D_{nc} . Ainsi les conditions (1.17) et (1.18) sont imposées sur leurs frontières respectives. Dans la configuration du cas 2 (cf. Fig. 1.2b), la frontière ∂D_{nc} est formée de Γ_E , Γ_B et Γ_H . Γ_E ne concernant que le domaine conducteur D_c , les conditions imposées sur ∂D_{nc} sont les mêmes que dans le cas 1.

Remarque : La condition (1.16) sur Γ_E implique celle définie sur Γ_B . Comme on a

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dl} = \int_{S} \operatorname{rot}(\boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{n} dS = -\int_{S} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n} dS, \qquad (1.19)$$

si $E \times n = 0$ sur Γ_E alors $B \cdot n = 0$ à travers toute surface de $S \in \Gamma_E$.

1.2 Espaces fonctionnels

1.2.1 Les espaces L^2

On définit l'espace $L^2(D)$ comme l'espace des fonctions de carré intégrable :

$$L^{2}(D) := \{ u \in D, ||u||_{L^{2}(D)}^{2} < \infty \},$$
(1.20)

où

$$||u||_{L^{2}(D)}^{2} := \int_{D} |u(x)|^{2} dx.$$
(1.21)

Le produit scalaire hermitien sur $L^2(D)$ est :

$$\langle \bullet | \bullet \rangle_D : (u, v) \mapsto \int_D u(x) \overline{v(x)} dx.$$
 (1.22)

En notant le produit scalaire euclidien usuel sur \mathbb{R}^n (dans notre cas n = 3) par

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i} x_{i} y_{i}, \qquad (1.23)$$

qui induit la norme euclidienne

$$\|\bullet\|_{2}: \mathbf{x} \mapsto \left(\sum_{i} x_{i}^{2}\right)^{1/2}, \qquad (1.24)$$

nous pouvons définir l'espace $L^2(D)$ des champs de vecteurs de carré intégrable sur D

$$\mathbf{L}^{2}(D) := \{ \mathbf{u} \in D, \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^{2}}^{2} < \infty \}$$
(1.25)

où

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2}^2 := \int_D \|\mathbf{u}(x)\|_2^2 dx.$$
(1.26)

On notera le produit scalaire sur $L^2(D)$ de la même manière que sur $L^2(D)$.

1.2.2 Le complexe de De Rham

Dans le domaine de l'électromagnétisme, les opérateurs gradient, divergence et rotationnel sont utilisés. Leurs espaces de définitions respectifs seront définis ci-dessous. On va maintenant prendre des sous-espaces de $L^2(D)$ et $L^2(D)$ où ces opérations sont bien définies. Les espaces sont les suivants :

$$H(\operatorname{grad}, D) := \{ u \in L^2(D) , \operatorname{grad}(u) \in \mathbf{L}^2(D) \},$$
(1.27)

$$H(\mathbf{rot}, D) := \{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(D) , \, \mathbf{rot}(\mathbf{u}) \in \mathbf{L}^2(D) \},$$
(1.28)

$$H(\operatorname{div}, D) := \{ u \in \mathbf{L}^{2}(D) , \operatorname{div}(\mathbf{u}) \in L^{2}(D) \}.$$
(1.29)

La relation classique de calcul vectoriel

$$\forall u \in H(\operatorname{grad}, D), \ \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(u)) = 0, \tag{1.30}$$

indique que l'image de l'opérateur gradient,

$$\operatorname{Im} \operatorname{\mathbf{grad}} := \{\operatorname{\mathbf{grad}}(u) \ , \ u \in H(\operatorname{\mathbf{grad}}, D)\}$$
(1.31)

est incluse dans le noyau de l'opérateur rotationel,

$$\operatorname{Ker}\operatorname{\mathbf{rot}} := \{\mathbf{u} \in H(\operatorname{\mathbf{rot}}, D) , \operatorname{\mathbf{rot}}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}.$$
(1.32)

De manière plus compacte on a donc

$$\operatorname{Im} \operatorname{grad}(H(\operatorname{grad}, D)) \subset \operatorname{Ker} \operatorname{rot}(H(\operatorname{rot}, D)).$$
(1.33)

Nous supposerons désormais que le domaine D est un domaine simplement connexe ayant une frontière ∂D connexe. L'inclusion précédente devient une égalité et nous avons alors que

$$\operatorname{Im} \operatorname{grad}(H(\operatorname{grad}, D)) = \operatorname{Ker} \operatorname{rot}(H(\operatorname{rot}, D)).$$
(1.34)

De même, puisque

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{u})) = 0, \tag{1.35}$$

nous obtenons que

$$\operatorname{Im} \operatorname{\mathbf{rot}}(H(\operatorname{\mathbf{rot}},D)) \subset \operatorname{Ker} \operatorname{div}(H(\operatorname{div},D)).$$
(1.36)

et toujours grâce aux hypothèses topologiques sur D, nous obtenons en fait l'égalité

$$\operatorname{Im} \operatorname{rot}(H(\operatorname{rot}, D)) = \operatorname{Ker} \operatorname{div}(H(\operatorname{div}, D)).$$
(1.37)

Remarque : Les résultats précédents s'inscrivent dans le *complexe de De Rham* suivant :

$$H(\mathbf{grad}, D) \xrightarrow{\mathbf{grad}} H(\mathbf{rot}, D) \xrightarrow{\mathbf{rot}} H(\operatorname{div}, D) \xrightarrow{\operatorname{div}} L^2(D).$$
(1.38)

Ces résultats permettront d'introduire les potentiels vecteurs et scalaires utilisés pour réécrire les équations de Maxwell.

1.3 Formulations

On va maintenant introduire un potentiel vecteur magnétique A (formulation A) qui pourra être associé à un potentiel scalaire électrique φ (formulation $A - \varphi$) ainsi qu'un potentiel scalaire magnétique Ω (formulation Ω) qui pourra être associé à un potentiel vecteur électrique T (formulation $T - \Omega$).

1.3.1 Formulations magnétostatiques

Nous nous plaçons dans le *cas magnétostatique* (cf. Fig. 1.1b). Les équations à résoudre sont : (1.13) et (1.14).

1.3.1.1 Formulation A

Cette formulation résout l'équation (1.14) au sens fort et l'équation (1.13) au sens faible. La loi de conservation (1.10) nous donne

$$\mathbf{B} \in \operatorname{Ker}\operatorname{div}(H(\operatorname{div}, D)). \tag{1.39}$$

Grâce au complexe de De Rham (en particulier l'égalité (1.36)), nous pouvons définir un potentiel vecteur magnétique $\mathbf{A} \in H(\mathbf{rot}, D)$ tel que

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{A}). \tag{1.40}$$

Ce potentiel permet de réécrire l'équation (1.13) sous la forme

$$\operatorname{rot}(\mu^{-1}\operatorname{rot}(A)) = \mathbf{J}_{s}.$$
 (1.41)

Remarque : L'équation (1.41) permet d'obtenir directement la conservation du flux de la densité de courant source. En effet, en lui appliquant l'opérateur divergence, on obtient

$$\operatorname{div}(J_s) = 0 \tag{1.42}$$

Or, si A est une solution, nous obtenons que pour tout $f \in H(\operatorname{grad}, D)$, le vecteur $\mathbf{A} + \operatorname{grad} f$ est aussi une solution du problème (grâce à la formule $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$). Pour l'unicité, on doit donc imposer une condition supplémentaire qui se trouve être *la jauge de Coulomb* :

$$div(A) = 0.$$
 (1.43)

Cette dernière est en fait équivalente à

$$\langle A | \operatorname{grad}(v) \rangle_D = 0, \quad \forall v \in H(\operatorname{grad}, D).$$
 (1.44)

On est donc ramené à résoudre l'équation (1.41) dans l'espace fonctionnel jaugé $\widetilde{H}(\mathbf{rot}, D) = \{\mathbf{u} \in H(\mathbf{rot}, D) | \langle \mathbf{u} | \mathbf{grad}(v) \rangle = 0, \forall v \in H(\mathbf{grad}, D) \}.$

Terminons en posant le problème variationnel associé à cette formulation. Soit une fonction test $A' \in \widetilde{H}(rot, D)$. Multiplions par cette fonction les deux membres de l'équation (1.41) que nous intégrerons sur le domaine D

$$\left\langle \operatorname{rot}(\mu^{-1}\operatorname{rot}(A)) \middle| A' \right\rangle_{D} = \langle \mathbf{J}_{s} \middle| A' \rangle_{D}$$
 (1.45)

Le membre de gauche se réécrit, grâce à la formule de Green,

$$\langle \mu^{-1} \operatorname{rot}(A) | \operatorname{rot}(A') \rangle_D - \langle \mu^{-1} \operatorname{rot}(A) \times n | A' \rangle_{\partial D} = \langle \mathbf{J}_s | A' \rangle.$$
 (1.46)

Intéressons nous au terme $\langle \mu^{-1} \operatorname{rot}(A) \times n | A' \rangle_{\partial D}$. On cherche à l'annuler sur le contour ∂D . Tout d'abord, la condition limite sur Γ_H (1.18), qui se réécrit sous la forme

$$\mu^{-1} \operatorname{rot}(A) \times \mathbf{n} = 0 \operatorname{sur} \Gamma_{H}, \qquad (1.47)$$

permet de l'annuler sur Γ_H . Ensuite, on choisit des fonctions de forme A' telles que

$$\mathbf{A'} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_B. \tag{1.48}$$

Ainsi, puisque $\partial D = \Gamma_H \uplus \Gamma_B$, on obtient finalement l'expression suivante

$$\left\langle \mu^{-1} \operatorname{rot}(A) \middle| \operatorname{rot}(A') \right\rangle_{D} = \langle \mathbf{J}_{s} \middle| A' \rangle.$$
 (1.49)

Posons la forme bilinéaire coercive continue sur $\widetilde{H_{0,B}}(\mathbf{rot}, D)$ définie par

$$a: (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \left\langle \mu^{-1} \operatorname{rot}(\mathbf{x}) \, \middle| \, \operatorname{rot}(\mathbf{y}) \right\rangle_{D} \tag{1.50}$$

et la forme linéaire continue sur $\widetilde{H}({\bf rot},D)$ définie par

$$l: \mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{J}_{\mathbf{s}} | \mathbf{x} \rangle. \tag{1.51}$$

La formulation variationnelle du cas magnétostatique pour le potentiel vecteur magnétique (formulation *A* en abrégé) est donc :

Trouver $\mathbf{A} \in \widetilde{H}(\mathbf{rot}, D)$ tel que

$$a(\mathbf{A}, \mathbf{A}') = l(\mathbf{A}'), \quad \forall \mathbf{A}' \in \widehat{H}(\mathbf{rot}, D), \tag{1.52}$$

muni des conditions aux limites

$$\begin{cases} \mu^{-1} \operatorname{rot}(A) \times n = 0 \operatorname{sur} \Gamma_{H}, \\ A \times n = 0 \operatorname{sur} \Gamma_{B}, \end{cases}$$
(1.53)

1.3.1.2 Formulation Ω

Cette formulation résout l'équation (1.13) au sens fort et l'équation (1.14) au sens faible. En appliquant l'opérateur divergence à l'équation (1.13) on obtient que div(J_s) = 0. On peut donc introduire un champ H_s , grâce au complexe de De Rham, tel que

$$rot(H_s) = J_s \text{ dans } D \tag{1.54}$$

et vérifiant

$$H_s \times n = 0 \text{ sur } \Gamma_H. \tag{1.55}$$

L'équation (1.13) se réécrit

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_s) = 0. \tag{1.56}$$

Cela revient à chercher un potentiel scalaire Ω , dit *potentiel scalaire magnétique*, vérifiant

$$\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{s}} = -\operatorname{\mathbf{grad}}(\boldsymbol{\Omega}). \tag{1.57}$$

L'équation (1.14) s'écrit donc, en utilisant la loi de comportement (1.5)

$$\operatorname{div}(\mu(\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{s}} - \operatorname{\mathbf{grad}}(\Omega)) = 0.$$
(1.58)

La solution Ω de ce problème est unique modulo une constante. En effet si Ω est solution de (1.58) alors $\Omega + C$ aussi, avec C une constante : $grad(\Omega + C) = grad(\Omega)$. Pour obtenir une unicité stricte, il faut fixer la constante. Par exemple [Zuqi Tang, 2012], en imposant la condition $\int_D \Omega = 0$ ou en fixant une valeur, par exemple 0, de Ω en un point.

Établissons maintenant le problème variationnel. Soit une fonction test

$$\Omega' \in \widetilde{H}(\operatorname{\mathbf{grad}}, D) = \{ u \in H(\operatorname{\mathbf{grad}}, D) | \int_D u = 0 \}.$$
(1.59)

Multiplions par cette fonction les deux membres de l'équation (1.58) que nous intégrerons sur le domaine D,

$$\langle \operatorname{div}(\mu(H_s - \operatorname{grad}(\Omega))) | \Omega' \rangle_D = 0.$$
 (1.60)

Le membre de gauche se réécrit, grâce à la formule de Green,

$$\left\langle \operatorname{div}(\mu(H_{s} - \operatorname{grad}(\Omega))) \middle| \Omega' \right\rangle_{D} = \left\langle \mu(H_{s} - \operatorname{grad}(\Omega)) \middle| \operatorname{grad}(\Omega') \right\rangle_{D} \\ - \left\langle \mu(H_{s} - \operatorname{grad}(\Omega)) \cdot n \middle| \Omega' \right\rangle_{\partial D}.$$

$$(1.61)$$

Intéressons nous au terme $\langle \mu(\mathbf{H}_s - \mathbf{grad}(\Omega)) \cdot \mathbf{n} | \Omega' \rangle_{\partial D}$. La condition limite (1.17) s'écrit

$$\mu(\mathbf{H}_{s} - \mathbf{grad}(\Omega)) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_{B}.$$
(1.62)

et permet d'annuler le terme sur Γ_B . Pour l'annuler sur Γ_H , on impose des fonctions de forme Ω' égale à 0 sur Γ_H .

On obtient finalement l'équation suivante à résoudre dans $\widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$

$$\langle \mu \operatorname{grad}(\Omega) | \operatorname{grad}(\Omega') \rangle_D = \langle \mu H_s | \operatorname{grad}(\Omega') \rangle_D$$
 (1.63)

Posons *a* la forme bilinéaire coercive continue sur $\widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ telle que

$$a: (x, y) \mapsto \langle \mu \operatorname{grad}(x) | \operatorname{grad}(y) \rangle_D \tag{1.64}$$

et *l* la forme linéaire continue sur $\widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ telle que

$$l: x \mapsto \langle H_s | \operatorname{grad}(x) \rangle. \tag{1.65}$$

La formulation variationnelle du cas magnétostatique pour le potentiel scalaire magnétique (formulation Ω en abrégé) est donc : Trouver $\Omega \in \widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ tel que

$$a(\Omega, \Omega') = l(\Omega'), \quad \forall \Omega' \in H(\mathbf{grad}, D), \tag{1.66}$$

muni des conditions limites

$$\Omega = \text{ constante sur } \Gamma_H \tag{1.67}$$

$$\mu(\operatorname{grad}(\Omega)) \cdot \mathbf{n} = 0 \operatorname{sur} \Gamma_B \tag{1.68}$$

(1.69)

1.3.2 Formulations Magnétodynamiques

On se place ici dans le cas magnétodynamique (cf. Fig. 1.1a). On rappelle les équations à résoudre : (1.8), (1.9) et (1.10)

1.3.2.1 Formulation $A - \varphi$ temporelle

Comme précédemment (cf. sous-section 1.3.1.1), nous introduisons le potentiel vecteur **A** vérifiant

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot}(\mathbf{A}). \tag{1.70}$$

L'équation (1.9) s'écrit donc

$$\operatorname{rot}(E) = \operatorname{rot}\left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right).$$
 (1.71)

Par le complexe de De Rham, cela signifie que cette équation est vraie à un gradient près. Autrement dit, il existe un potentiel scalaire $\varphi \in H(\mathbf{grad}, D)$ tel que

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \operatorname{\mathbf{grad}} \varphi\right). \tag{1.72}$$

Le potentiel φ est jaugé de la même manière que le potentiel Ω (cf. section 1.3.1.2), il appartient donc à l'espace $\widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$. L'équation (1.72), combinée avec la loi de comportement (1.6), permet de réécrire l'équation (1.8)

$$\operatorname{rot}(\mu^{-1}\operatorname{rot}(A)) + \sigma\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{grad}(\varphi)\right) = J_s \text{ dans } D.$$
(1.73)

En appliquant l'opérateur divergence à l'équation (1.73) et en utilisant la conservation du flux de la densité de courant source (1.42) on obtient la seconde équation de la formulation $A - \varphi$

$$\operatorname{div}\left(\sigma\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{grad}(\varphi)\right)\right) = 0 \text{ sur } D_c.$$
(1.74)

Établissons maintenant le problème variationnel. Concernant la première équation, le raisonnement est le même que pour la formulation A (cf. section 1.3.1.1). Pour la seconde, le raisonnement est similaire à la formulation Ω (cf. équation (1.61)). En effet, après avoir multiplié les deux membres de l'équation (1.74) par la fonction test $\varphi' \in \widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ et les avoir intégrés sur le domaine conducteur D_c , on utilise la formule de Green pour réécrire l'équation (1.74) sous la forme suivante :

$$\left\langle \sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{grad}(\varphi) \right) \middle| \operatorname{grad}(\varphi') \right\rangle_{D_c} - \left\langle \sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{grad}(\varphi) \right) \cdot \boldsymbol{n} \middle| \varphi' \right\rangle_{\partial D_c} = 0.$$
(1.75)

Or, le terme $\sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{grad}(\varphi) \right) \cdot \boldsymbol{n}$ s'annule sur Γ_I d'après la condition aux limites (1.15). Dans la situation où il faut prendre en compte la frontière Γ_E (cf. Fig. 1.2b), on impose, de manière similaire à la formulation Ω , la nullité de la fonction test sur Γ_E .

$$\varphi' = 0 \operatorname{sur} \Gamma_E \tag{1.76}$$

ce qui implique la condition limite (1.16). On obtient finalement le système d'équation

$$\left\langle \mu^{-1} \operatorname{rot}(A) \left| \operatorname{rot}(A') \right\rangle_{D} + \left\langle \sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{grad}(\varphi) \right) \right| A' \right\rangle_{D_{c}} = \left\langle \mathbf{J}_{s} \left| A' \right\rangle$$
(1.77)

$$\left\langle \sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{grad}(\varphi) \right) \middle| \mathbf{grad}(\varphi') \right\rangle_{D_c} = 0$$
 (1.78)

que l'on peut simplifier en une seule équation

$$\left\langle \mu^{-1} \operatorname{rot}(A) \left| \operatorname{rot}(A') \right\rangle_{D} + \left\langle \sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{grad}(\varphi) \right) \right| A' + \operatorname{grad}(\varphi') \right\rangle_{D_{c}} = \left\langle \mathbf{J}_{s} \left| A' \right\rangle$$
 (1.79)

Soit *a* l'application bilinéaire coercive continue définie sur $\widetilde{H}(\mathbf{rot}, D) \times \widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ par

$$a: ((\mathbf{A}, \varphi), (\mathbf{A'}, \varphi)) \mapsto \frac{1}{\mu} \langle \operatorname{rot}(\mathbf{A}) | \operatorname{rot}(\mathbf{A'}) \rangle_{D} \\ + \left\langle \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \operatorname{grad}(\varphi) \right) \middle| \mathbf{A'} + \operatorname{grad}(\varphi') \right\rangle_{D_{c}},$$
(1.80)

et *l* l'application linéaire continue définie sur $\widetilde{H}(\mathbf{rot}, D) \times \widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ par

$$l: (\mathbf{A}') \mapsto \int_{D} \mathbf{J}_{s} \cdot \overline{\mathbf{A}'}. \tag{1.81}$$

Le problème variationnel est alors : Trouver $(\mathbf{A}, \varphi) \in \widetilde{H}(\mathbf{rot}, D) \times \widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ tels que

$$a((\mathbf{A},\varphi),(\mathbf{A'},\varphi)) = l(\mathbf{A'}), \quad \forall (\mathbf{A'},\varphi') \in \widetilde{H}(\mathbf{rot},D) \times \widetilde{H}(\mathbf{grad},D),$$
(1.82)

muni des conditions aux limites

$$\begin{cases} \mu^{-1} \operatorname{rot}(A) \times n = 0 & \operatorname{sur} \Gamma_{H}, \\ A \times n = 0 & \operatorname{sur} \Gamma_{B}, \\ \sigma \left(A - \operatorname{grad}(\varphi) \right) \cdot n = 0 & \operatorname{sur} \Gamma_{J}, \\ \varphi = \operatorname{constante} \operatorname{sur} \Gamma_{E}. \end{cases}$$
(1.83)

1.3.2.2 Formulation $T - \Omega$ temporelle

Le potentiel $\Omega \in \widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ est introduit de la même manière que dans la formulation Ω

$$H = H_s - \operatorname{grad}(\Omega). \tag{1.84}$$

De la même manière que l'on a introduit le potentiel *A*, on introduit le potentiel vecteur *T* tel que

$$J_{ind} = \operatorname{rot}(T) \operatorname{dans} D_c. \tag{1.85}$$

Ce qui nous donne l'expression du champ magnétique suivante

$$H = \begin{cases} H_s - \operatorname{grad}(\Omega) & \operatorname{dans} D_{nc} \\ H_s + T - \operatorname{grad}(\Omega) & \operatorname{dans} D_c \end{cases}$$
(1.86)

Afin de ne pas alourdir l'écriture du potentiel T, on le confondra avec son extension \widetilde{T} sur D qui est telle que $\widetilde{T} = \mathbf{0}$ sur D_{nc} et, pour assurer la continuité, $\widetilde{T} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ sur ∂D_c . Le champ magnétique s'écrit donc

$$H = H_s + T - \operatorname{grad}(\Omega) \text{ sur } D.$$
(1.87)

En utilisant les potentiels T et Ω ainsi que les lois de comportement (1.6) et (1.5) on peut réécrire l'équation (1.9)

$$\operatorname{rot}(E) = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{1.88}$$

$$\operatorname{rot}(\sigma^{-1}J_{ind}) = -\frac{\partial\mu H}{\partial t}$$
(1.89)

$$\operatorname{rot}(\sigma^{-1}\operatorname{rot}(T)) = -\frac{\partial\mu(H_s + T - \operatorname{grad}(\Omega))}{\partial t}$$
(1.90)

$$\operatorname{rot}(\sigma^{-1}\operatorname{rot}(T)) + \frac{\partial\mu(T - \operatorname{grad}(\Omega))}{\partial t} = -\frac{\partial\mu H_s}{\partial t}.$$
(1.91)

L'équation (1.10) se réécrit de la même manière que pour la formulation Ω (cf. équation (1.58)). On obtient donc le système d'équations suivant

$$\operatorname{rot}(\sigma^{-1}\operatorname{rot}(T)) + \frac{\partial\mu(T - \operatorname{grad}(\Omega))}{\partial t} = -\frac{\partial\mu H_s}{\partial t}\operatorname{sur} D_c$$
(1.92)

$$\operatorname{div}(\mu(T - \operatorname{grad}(\Omega))) = -\operatorname{div}(\mu H_s) \operatorname{sur} D$$
(1.93)

(1.94)

Établissons maintenant le problème variationnel. Soit le couple de fonctions tests $(T', \Omega') \in \widetilde{H}(\operatorname{rot}, D) \times \widetilde{H}(\operatorname{grad}, D)$. La fonction T' est appliquée à l'équation (1.92) qui est ensuite intégrée sur le domaine D_c

$$\left\langle \operatorname{rot}(\sigma^{-1}\operatorname{rot}(T)) \middle| T' \right\rangle_{D_c} + \left\langle \frac{\partial \mu(T - \operatorname{grad}(\Omega))}{\partial t} \middle| T' \right\rangle_{D_c} = \left\langle -\frac{\partial \mu H_s}{\partial t} \middle| T' \right\rangle_{D_c}.$$
 (1.95)

On obtient de manière similaire à la formulation A l'expression suivante (rappel : $\widetilde{T} = 0$ sur D_{nc}) :

$$\left\langle \sigma^{-1} \operatorname{rot}(T) \left| \operatorname{rot}(T') \right\rangle_{D_{c}} + \left\langle \frac{\partial \mu (T - \operatorname{grad}(\Omega))}{\partial t} \right| T' \right\rangle_{D} = \left\langle -\frac{\partial \mu H_{s}}{\partial t} \right| T' \right\rangle_{D}.$$
 (1.96)

De la même manière que pour la formulation Ω , l'équation (1.93) devient, une fois multipliée par Ω' et intégrée sur D

$$\langle \mu(T - \operatorname{grad}(\Omega)) | \operatorname{grad}(\Omega') \rangle_D = \langle -\mu H_s | \operatorname{grad}(\Omega') \rangle_D.$$
 (1.97)

En appliquant l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ à cette dernière équation, on peut la sommer à (1.96) et ainsi obtenir l'expression

$$\left\langle \sigma^{-1} \operatorname{rot}(T) \left| \operatorname{rot}(T') \right\rangle_{D_{c}} + \left\langle \frac{\partial \mu(T - \operatorname{grad}(\Omega))}{\partial t} \right| T' + \operatorname{grad}(\Omega') \right\rangle_{D} = \left\langle -\frac{\partial \mu H_{s}}{\partial t} \right| T' + \operatorname{grad}(\Omega') \right\rangle_{D}.$$
(1.98)

En posant *a* la forme bilinéaire coercive continue sur $\widetilde{H}(\mathbf{rot}, D) \times \widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ telle que

$$\begin{split} a((\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\Omega}), (\boldsymbol{T}', \boldsymbol{\Omega}')) &:= \left\langle \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot}(\boldsymbol{T}) \, \middle| \, \mathbf{rot}(\boldsymbol{T}')) \right\rangle_{D_c} \\ &+ \left\langle \mu \frac{\partial (\boldsymbol{T} - \mathbf{grad}(\boldsymbol{\Omega}))}{\partial t} \middle| \, \boldsymbol{T}' - \mathbf{grad}(\boldsymbol{\Omega}') \right\rangle_{D_c} \\ &+ \left\langle \mu \frac{\partial \mathbf{grad}(\boldsymbol{\Omega})}{\partial t} \middle| \, \mathbf{grad}(\boldsymbol{\Omega}') \right\rangle_{D_{nc}} \end{split}$$

et *l* la forme linéaire continue sur $\widetilde{H}(\mathbf{rot}, D) \times \widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ telle que

$$l((\mathbf{T}', \Omega')) := -\left\langle \mu \frac{\partial \mathbf{H}_s}{\partial t} \middle| \mathbf{T}' - \mathbf{grad}(\Omega') \right\rangle_{D_c} + \left\langle \mu \frac{\partial \mathbf{H}_s}{\partial t} \middle| \mathbf{grad}(\Omega') \right\rangle_{D_{nc}},$$

le problème variationnel de la formulation $T - \Omega$ s'énonce de la manière suivante : Trouver $(T, \Omega) \in \widetilde{H}(rot, D) \times \widetilde{H}(grad, D)$ tel que

$$a((\mathbf{T},\Omega),(\mathbf{T}',\Omega')) = l((\mathbf{T}',\Omega')), \quad \forall (\mathbf{T}',\Omega') \in \widetilde{H}(\mathbf{rot},D) \times \widetilde{H}(\mathbf{grad},D),$$
(1.99)

muni des conditions limites

$$\Omega = \text{ constante sur } \Gamma_H \tag{1.100}$$

$$\mu(\mathbf{T} - \mathbf{grad}(\Omega)) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_B$$
(1.101)

$$\frac{1}{\sigma} \operatorname{rot}(\mathbf{T}) \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \operatorname{sur} \Gamma_E$$
(1.102)

$$\mathbf{T} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_I \tag{1.103}$$

1.3.3 Formulations magnétoharmoniques

Ici, on veut résoudre nos équations dans le domaine harmonique. On s'intéresse alors au cas où les sources sont sinusoïdales et on ne s'intéresse qu'aux grandeurs en régime permanent. Pour cela, on remarque que l'équation (1.9) s'écrit

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{E}) = -j\,\omega\,\boldsymbol{B},\tag{1.104}$$

où ω est la pulsation ¹.

^{1.} $\omega = 2\pi f$ avec *f* la fréquence

Dans les formulations $A - \varphi$ et $T - \Omega$ on exprimera les potentiels $X \in \{A, \varphi, \Omega, T\}$ à trouver sous la forme $X(\mathbf{x}, t) = \widetilde{X}(\mathbf{x})e^{j\omega t}$, avec \mathbf{x} la variable spatiale, t la variable temporelle. On écrira $X = \widetilde{X}(\mathbf{x})$ pour faciliter la lecture.

La seule différence de notation dans l'expression de la formulation harmonique par rapport à celle temporelle est la multiplication par $j\omega$ des termes dérivés temporelles.

1.3.3.1 Formulation A – φ harmonique

Dans le domaine harmonique, les expressions des équations temporelles (1.73) et (1.74) sont respectivement

$$\operatorname{rot}(\mu^{-1}\operatorname{rot}(A)) + \sigma(j\omega A + \operatorname{grad}(\varphi)) = J_s \operatorname{dans} D.$$
(1.105)

$$\operatorname{div}\left(\sigma\left(j\,\omega \boldsymbol{A} + \operatorname{\mathbf{grad}}(\varphi)\right)\right) = 0 \,\operatorname{sur} D_c. \tag{1.106}$$

Soit *a* l'application bilinéaire coercive continue définie sur $\widetilde{H}(\mathbf{rot}, D) \times \widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ par

$$a: ((\mathbf{A}, \varphi), (\mathbf{A'}, \varphi)) \mapsto \frac{1}{\mu} \langle \operatorname{rot}(\mathbf{A}) | \operatorname{rot}(\mathbf{A'}) \rangle_D$$

$$+ \langle \sigma (j \omega \mathbf{A} + \operatorname{grad}(\varphi)) | \mathbf{A'} + \operatorname{grad}(\varphi') \rangle_{D_c}, \qquad (1.107)$$

et *l* l'application linéaire continue définie sur $\widetilde{H}(\mathbf{rot}, D) \times \widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ par

$$l: (\mathbf{A'}) \mapsto \int_D \mathbf{J}_s \cdot \overline{\mathbf{A'}}.$$
 (1.108)

Le problème variationnel de la formulation $A-\varphi$ harmonique est alors : Trouver $(A, \varphi) \in \widetilde{H}(\mathbf{rot}, D) \times \widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ tels que

$$a((\mathbf{A},\varphi),(\mathbf{A'},\varphi)) = l(\mathbf{A'}), \ \forall (\mathbf{A'},\varphi') \in \widetilde{H}(\mathbf{rot},D) \times \widetilde{H}(\mathbf{grad},D),$$
(1.109)

muni des conditions aux limites

$$\begin{cases} \mu^{-1} \operatorname{rot}(A) \times n = 0 & \operatorname{sur} \Gamma_{H}, \\ A \times n = 0 & \operatorname{sur} \Gamma_{B}, \\ \sigma \left(A - \operatorname{grad}(\varphi) \right) \cdot n = 0 & \operatorname{sur} \Gamma_{J}, \\ \varphi = \operatorname{constante} \operatorname{sur} \Gamma_{E}. \end{cases}$$
(1.110)

1.3.3.2 Formulation $T - \Omega$ harmonique

En posant *a* la forme bilinéaire coercive continue sur $\widetilde{H}(\mathbf{rot}, D) \times \widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ telle que

$$\begin{aligned} a((\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\Omega}), (\boldsymbol{T}', \boldsymbol{\Omega}')) &:= \left\langle \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot}(\boldsymbol{T}) \middle| \operatorname{rot}(\boldsymbol{T}')) \right\rangle_{D_c} \\ &+ \left\langle \mu j \omega \left(\boldsymbol{T} - \operatorname{grad}(\boldsymbol{\Omega}) \right) \middle| \boldsymbol{T}' - \operatorname{grad}(\boldsymbol{\Omega}') \right\rangle_{D_c} \\ &+ \left\langle \mu j \omega \operatorname{grad}(\boldsymbol{\Omega}) \middle| \operatorname{grad}(\boldsymbol{\Omega}') \right\rangle_{D_{nc}} \end{aligned}$$

et *l* la forme linéaire continue sur $\widetilde{H}(\mathbf{rot}, D) \times \widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ telle que

$$l((\mathbf{T}', \Omega')) := -\langle \mu j \omega \mathbf{H}_s | \mathbf{T}' - \mathbf{grad}(\Omega') \rangle_{D_c} + \langle \mu j \omega \mathbf{H}_s | \mathbf{grad}(\Omega') \rangle_{D_{nc}},$$

le problème variationnel de la formulation $T - \Omega$ harmonique s'énonce de la manière suivante : Trouver $(T, \Omega) \in \widetilde{H}(rot, D) \times \widetilde{H}(grad, D)$ tel que

$$a((\mathbf{T}, \Omega), (\mathbf{T}', \Omega')) = l((\mathbf{T}', \Omega')), \quad \forall (\mathbf{T}', \Omega') \in \widetilde{H}(\mathbf{rot}, D) \times \widetilde{H}(\mathbf{grad}, D),$$
(1.111)

muni des conditions limites

$$\Omega = \text{ constante sur } \Gamma_H \tag{1.112}$$

$$\mu(\mathbf{T} - \mathbf{grad}(\Omega)) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_B$$
(1.113)

$$\sigma^{-1} \mathbf{rot}(\mathbf{T}) \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_E$$
 (1.114)

$$\mathbf{T} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \boldsymbol{\Gamma}_{I} \tag{1.115}$$

1.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté les équations à résoudre en électromagnétisme basse fréquence qui décrivent le comportement des champs électromagnétiques dans le cas d'un problème de Contrôle Non Destructif par Courant de Foucault. Nous avons ensuite présenté les deux formulations en potentiels qui décrivent ce problème magnétodynamique et qui seront résolues par la suite en utilisant la Méthode des Éléments Finis.

Chapitre 2

Domaine discret

Afin d'obtenir une solution approchée des problèmes variationnels des différentes formulations, on utilisera la Méthode des Éléments Finis (MEF). Cette méthode engendre de l'erreur numérique qui peut être contrôlée par des estimateurs d'erreurs dédiés. La discrétisation spatiale du domaine est une donnée d'entrée de la MEF qui peut être complexe à produire dès lors qu'une précision numérique fine est demandée. Les méthodes d'adaptation de maillage permettent d'améliorer localement la qualité, en terme d'erreur numérique, des maillages. Pour fixer les notations et poser les bases qui serviront au développement de la méthode d'adaptation de maillage proposée dans cette thèse, on présentera dans ce chapitre

- 1. les fonctions de bases de la MEF
- 2. la discrétisation des formulations
- 3. un état de l'Art sur l'estimation d'erreur de la MEF
- 4. un état de l'Art sur les méthodes d'adaptation de maillage

2.1 Complexe de Whitney

La résolution analytique des équations de Maxwell n'est possible que sur des cas particuliers possédant des géométries simples. En règle générale, il est nécessaire de procéder à une approximation de la solution du problème continu en utilisant des méthodes numériques. Dans ce mémoire, la Méthode des Éléments Finis (MEF) sera utilisée à cet effet. Cette méthode présente l'intérêt de pouvoir traiter des géométries complexes et de posséder des estimateurs d'erreur *a posteriori* permettant l'encadrement de l'erreur numérique. Erreur numérique qui représente l'écart entre l'approximation donnée par la MEF et la solution exacte. La difficulté dans le calcul de cette estimation est que celle-ci nécessite d'établir un lien avec la solution exacte, qui n'est pas connue. La résolution par la MEF nécessite un maillage, qui est une partition de l'espace D par des cellules élémentaires. L'espace ainsi discrétisé sera noté D_h . Les éléments peuvent être des tétraèdres, des prismes, des hexaèdres ou des pyramides. Dans la suite, notre étude sera faite en supposant que cette découpe est effectué avec des tétraèdres. On notera \mathcal{N} l'ensemble des nœuds, \mathcal{A} l'ensemble des arêtes, \mathcal{F} l'ensemble des faces et \mathcal{E} l'ensemble des éléments. Les maillages utilisés par la suite vérifient la relation d'Euler-Poincaré,

$$n_N - n_A + n_F - n_E = 1, (2.1)$$

où n_N est le nombre de nœuds, n_A le nombre d'arêtes, n_F le nombre de facettes, n_E le nombre d'éléments. Cela signifie qu'il n'y a pas de trou ou de cavité dans le maillage. De plus, les maillages seront tous conformes, c'est-à-dire que pour deux éléments E_1 et E_2 appartenant à \mathcal{E} , leur intersection est soit vide, soit un nœud, une arête ou une face appartenant à $E_1 \cup E_2$. Cela est illustré sur la figure 2.1 : à gauche le maillage est conforme et à droite, l'arête et le nœud rouge de l'élément E_2 n'appartiennent pas à E_1 .

FIGURE 2.1 – Maillage conforme à gauche ; maillage non conforme à droite



2.1.1 Fonctions de formes

2.1.1.1 Fonctions nodales

À chaque nœud n, on peut lui associer une fonction w_n dite fonction d'interpolation du nœud n qui est une fonction continue qui est égale à 1 au nœud n et égale à 0 aux autres nœuds (cf. equation (A.1). La définition de w_n nous donne trivialement la relation

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} w_n = 1. \tag{2.2}$$

Maintenant, on note W^0 l'espace vectoriel de dimension finie engendré par les fonctions d'interpolations $(w_n)_{n \in \mathcal{N}}$. Cet espace se trouve être un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions continues sur *D*. Soit une fonction *u* appartenant à W^0 , elle se décompose sous la forme

$$u = \sum_{n \in \mathcal{N}} w_n u_n, \tag{2.3}$$

où u_n représente la valeur au nœud n de la fonction u. Une autre manière de l'écrire est d'utiliser W_n , le vecteur contenant les fonctions d'interpolations aux nœuds *i.e.*
$W_n = (w_n)_{n \in \mathcal{N}}$, et U_n le vecteur contenant les valeurs aux nœuds de u *i.e.* $U_n = (u_n)_{n \in \mathcal{N}}$:

$$u = \boldsymbol{W}_n^{\mathsf{T}} \boldsymbol{U}_n. \tag{2.4}$$

2.1.1.2 Fonctions d'arêtes

Une arête A_{nm} est le segment orienté du nœud n, l'origine, au nœud m, l'extrémité (cf. figure 2.2). On définit (dans le cas des tétraèdres) la *fonction d'arête* $w_{A_{nm}}$ par

FIGURE 2.2 – Arête
$$A_{nm}$$

$$\boldsymbol{w}_{A_{nm}} = \boldsymbol{w}_n \operatorname{\mathbf{grad}}(\boldsymbol{w}_m) - \boldsymbol{w}_m \operatorname{\mathbf{grad}}(\boldsymbol{w}_n), \qquad (2.5)$$

où w_m et w_n sont les fonctions d'interpolations aux nœuds n et m. La définition des fonctions d'arêtes donne une circulation de $w_{A_{nm}}$ égale à 1 le long de l'arête A_{nm} et nulle sur les autres arêtes :

$$\int_{a} \boldsymbol{w}_{A_{nm}} \cdot \mathbf{dl} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = A_{nm} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
(2.6)

L'espace vectoriel de dimension finie engendré par les fonctions d'arêtes $(w_a)_{a \in A}$ sera noté W^1 . Pour u appartenant à W^1 , on a

$$\boldsymbol{u} = \sum_{a \in \mathcal{A}} \boldsymbol{w}_a \boldsymbol{u}_a, \tag{2.7}$$

où u_a est la circulation de u le long de l'arête a

$$u_a = \int_a \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{d} \mathbf{l}. \tag{2.8}$$

u admet aussi une écriture matricielle sous la forme

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{W}_a^{\mathsf{T}} \boldsymbol{U}_a, \tag{2.9}$$

où W_a est le vecteur formé des fonctions d'arêtes *i.e.* $W_a = (w_a)_{a \in A}$ et U_1 le vecteur dont les composantes sont les circulations de u le long des arêtes *i.e.* $U_a = (u_a)_{a \in A}$.

2.1.1.3 Fonctions de facette

Les maillages étudiés étant exclusivement tétraédriques les facettes sont des triangles. La facette F_{ijk} de sommets N_i , N_j et N_k appartenant à \mathcal{N} est orientée suivant l'ordre de ces nœuds (cf. figure 2.3). On définit alors *la fonction de facette*

$$\boldsymbol{w}_{F_{ijk}} = 2(\boldsymbol{w}_k \operatorname{grad}(\boldsymbol{w}_i) \times \operatorname{grad}(\boldsymbol{w}_j) + \boldsymbol{w}_j \operatorname{grad}(\boldsymbol{w}_k) \times \operatorname{grad}(\boldsymbol{w}_i) + \boldsymbol{w}_i \operatorname{grad}(\boldsymbol{w}_j) \times \operatorname{grad}(\boldsymbol{w}_k)), \quad (2.10)$$

FIGURE 2.3 – Facette



où les w_i , w_j et w_k sont les fonctions nodales associées respectivement aux nœuds N_i , N_j et N_k . Cette fonction est définie de telle sorte que le flux de $w_{F_{ijk}}$ à travers la facette F_{ijk} est égal à 1 et est nulle à travers les autres facettes :

$$\int_{f} \boldsymbol{w}_{F_{ijk}} \cdot \mathbf{dS} = \begin{cases} 1 & \text{si } f = F_{ijk} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
(2.11)

On note W^2 l'espace vectoriel de dimension finie engendré par les fonctions de facette. Ainsi, en considérant $u \in W^2$, on a l'expression

$$\boldsymbol{u} = \sum_{f \in \mathcal{F}} \boldsymbol{w}_f \, \boldsymbol{u}_f, \tag{2.12}$$

où u_f représente le flux de u traversant la facette f :

$$u_f = \int_f \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{dS}.$$
 (2.13)

De même, il admet une écriture matricielle sous la forme

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{W}_f^\mathsf{T} \boldsymbol{U}_f, \qquad (2.14)$$

où W_f est le vecteur formé des fonctions de facette *i.e.* $W_f = (w_f)_{f \in \mathcal{F}}$ et U_f le vecteur dont les composantes sont les flux de u à travers les facettes *i.e.* $U_f = (u_f)_{f \in \mathcal{F}}$.

2.1.1.4 Fonctions de volume

Soit *T* un tétraèdre du maillage. On peut lui associer une *fonction de volume* w_T définie sur *D* de telle sorte que

$$w_T(x) = \begin{cases} \frac{1}{vol(T)} & \text{si } x \in T, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
(2.15)

avec vol(T) le volume de l'élément T. On notera W^3 l'espace vectoriel de dimension finie engendré par les fonctions de volume. Ainsi, une fonction $u \in W^3$ s'écrit

$$u = \sum_{T \in \mathcal{E}} w_T \, u_T, \tag{2.16}$$

où u_T représente l'intégrale volumique de u sur l'élément T

$$u_T = \int_T u \, dV. \tag{2.17}$$

De même, il admet une écriture matricielle sous la forme

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{W}_{\boldsymbol{v}}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{v}}, \tag{2.18}$$

où W_v est le vecteur formé des fonctions de volume *i.e.* $W_v = (w_T)_{T \in \mathcal{E}}$ et U_v le vecteur dont les composantes sont les intégrales de u sur les éléments *i.e.* $U_v = (u_T)_{T \in \mathcal{E}}$.

2.1.2 Matrices d'incidence

Après avoir présenté les fonctions d'interpolation qui serviront à approcher la solution du problème variationnel, il convient d'introduire les matrices d'incidence qui servent à relier les différentes composantes du maillage (*i.e.* les nœuds, arêtes, facettes, volumes) entre elles. Ces matrices permettront d'exprimer le problème Éléments Finis de manière synthétique et d'en avoir une vision algébrique.

2.1.2.1 Incidence arête/nœud

On note i(a, n) la fonction d'incidence de l'arête *a* définie sur l'ensemble \mathcal{N} qui vaut 1 si *n* est l'extrémité de l'arête *n*, -1 si *n* est l'origine de l'arête *n* et 0 sinon :

$$i(a,n) = \begin{cases} -1 \text{ si} & \stackrel{a}{n} \\ +1 \text{ si} & \stackrel{a}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
(2.19)

On note alors $(G_{an})_{a \in A, n \in N}$ la matrice d'incidence dont les coefficients vérifient $G_{an} = i(a, n)$. En partant de la définition de la fonction d'incidence (2.19) et en y injectant celle de la fonction d'arête (2.5), nous obtenons la relation

$$\operatorname{grad}(w_n) = \sum_{a \in \mathcal{A}} i(a, n) w_a.$$
(2.20)

La démonstration de cette relation se trouve en annexe B.1. Cela implique directement que le gradient d'une fonction définie sur W^0 appartient à W^1 *i.e.*

$$\operatorname{Im}\operatorname{grad}(W^0) \subset W^1. \tag{2.21}$$

Maintenant, prenons $u \in W^0$, alors u s'écrit

$$u = \sum_{n \in \mathcal{N}} w_n u_n = \boldsymbol{W}_n^{\mathsf{T}} \boldsymbol{U}_n \tag{2.22}$$

et

$$\operatorname{grad}(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{grad}(w_n) u_n, \qquad (2.23)$$

qui appartient à W^1 , admet une décomposition sous la forme

$$\mathbf{grad}(u) = \mathbf{W}_a^{\mathsf{T}} \mathbf{U}_a^g, \qquad (2.24)$$

où W_a est le vecteur formé des fonctions d'arêtes et U_a^g le vecteur dont les composantes sont les circulations de **grad**(*u*) le long des arêtes. D'autre part, en injectant l'équation (2.20) dans l'équation (2.23), nous obtenons

$$\operatorname{grad}(u) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{n \in \mathcal{N}} i(a, n) u_n w_a = W_a^{\mathsf{T}} G_{an} U_n.$$
(2.25)

Ce qui nous donne donc

$$\boldsymbol{G}_{an}\boldsymbol{U}_n = \boldsymbol{U}_a^g. \tag{2.26}$$

En d'autres termes, la matrice d'incidence permet de calculer les circulations du gradient le long des arêtes à partir de la différence des valeurs exprimées sur les nœuds. La matrice G_{an} représente donc l'opérateur gradient discrétisé.

2.1.2.2 Incidence face/arête

De même, on peut définir *l'incidence d'arête-face i*(f,a) où f est une face et a une arête. Cette incidence vaut 1 ou -1 si a est une arête de f et 0 sinon. Pour définir le signe de i(f,a), il faut orienter le contour de la facette f. On rappelle qu'une facette $f = F_{ijk}$ est définie par trois nœuds N_i , N_j , N_k . L'ordre d'écriture de ces derniers définira l'orientation du contour de la facette. Et donc, si l'arête a, appartenant au contour de la facette f, a la même orientation que ce contour, le signe de l'incidence est positif, sinon il est négatif :



On note alors $(\mathbf{R}_{fa})_{f \in \mathcal{F}, a \in \mathcal{A}}$ la matrice d'incidence dont les coefficients vérifient $R_{fa} = i(f, a)$. En partant de la définition de la fonction d'incidence (2.27) et en y injectant celle de la fonction de facette (2.10), nous obtenons la relation

$$\mathbf{rot}(w_a) = \sum_{f \in \mathcal{A}} i(f, a) \, w_f.$$
(2.28)

La démonstration de cette relation est donnée en annexe B.2. Cela implique directement que le rotationnel d'une fonction définie sur W^1 appartient à W^2 *i.e.*

$$\operatorname{Im} \operatorname{rot}(W^1) \subset W^2. \tag{2.29}$$

2.1. COMPLEXE DE WHITNEY

Maintenant, prenons $u \in W^1$, alors

$$\boldsymbol{u} = \sum_{a \in \mathcal{A}} \boldsymbol{w}_a \, \boldsymbol{u}_a = \boldsymbol{W}_a^\mathsf{T} \boldsymbol{U}_a \tag{2.30}$$

et

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{u}) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{rot}(\boldsymbol{w}_a) \, \boldsymbol{u}_a, \tag{2.31}$$

qui appartient à W^2 , admet une décomposition sous la forme

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{W}_{f}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{U}_{f}^{r}, \qquad (2.32)$$

où W_f est le vecteur formé des fonctions d'arêtes et U_f^r le vecteur dont les composantes sont les flux de **rot**(u) à travers les facettes. D'autre part, en injectant l'équation (2.28) dans l'équation (2.31), nous obtenons

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{u}) = \sum_{f \in \mathcal{F}} \sum_{a \in \mathcal{A}} i(f, a) \boldsymbol{w}_f \boldsymbol{u}_a = \boldsymbol{W}_f^{\mathsf{T}} \boldsymbol{R}_{fa} \boldsymbol{U}_a.$$
(2.33)

Ce qui nous donne donc

$$\boldsymbol{R}_{fa}\boldsymbol{U}_{a} = \boldsymbol{U}_{f}^{r}.$$

En d'autres termes, la matrice d'incidence permet de calculer les flux du rotationnel à travers les facettes à partir de la différence des valeurs exprimées sur les arêtes. La matrice R_{fa} représente donc l'opérateur rotationnel discrétisé.

2.1.2.3 Incidence volume/face

On termine cette section en définissant *l'incidence facette-volume* i(v, f) où v est un élément et f une facette. Cet indice est non nul dans le cas où f appartient à v et est égal à +1 si la normale orientée de la facette n_f entre dans v, -1 sinon. L'orientation du contour d'une facette $f = F_{ijk}$ permettra d'orienter la normale de cette dernière. On fera le choix d'orienter $n_{F_{ijk}}$ dans le même sens que le produit vectoriel $\overrightarrow{N_iN_j} \times \overrightarrow{N_jN_k}$:

$$N_{i} \overset{N_{k}}{\longrightarrow} N_{j}^{N_{f}}$$

$$N_{i} \overset{N_{k}}{\longrightarrow} N_{j}^{N_{f}}$$

$$(2.35)$$

On a donc la définition de la fonction d'incidence facette-volume suivante :



On note alors $(\mathbf{D}_{vf})_{v \in \mathcal{E}, f \in \mathcal{F}}$ la matrice d'incidence dont les coefficients vérifient $D_{vf} = i(v, f)$. En partant de la définition de la fonction d'incidence (2.36) et en y injectant celle de la fonction de volume (2.15), nous obtenons la relation

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{w}_f) = \sum_{v \in \mathcal{E}} i(v, f) \, \boldsymbol{w}_v. \tag{2.37}$$

La démonstration de cette relation est accessible en annexe B.3. Cela implique directement que la divergence d'une fonction définie sur W^2 appartient à W^3 *i.e.*

$$\operatorname{Im}\operatorname{div}(W^2) \subset W^3. \tag{2.38}$$

Maintenant, prenons $u \in W^2$, alors

$$\boldsymbol{u} = \sum_{f \in \mathcal{F}} \boldsymbol{w}_f \, \boldsymbol{u}_f = \boldsymbol{W}_f^\mathsf{T} \boldsymbol{U}_a \tag{2.39}$$

et

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = \sum_{f \in \mathcal{F}} \operatorname{div}(\boldsymbol{w}_f) u_f, \qquad (2.40)$$

qui appartient à W³, admet une décomposition sous la forme

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{W}_{\boldsymbol{v}}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{v}}^{\boldsymbol{d}}, \qquad (2.41)$$

où W_v est le vecteur formé des fonctions de volume et U_v^d le vecteur dont les composantes sont les intégrants de div(u) dans les volumes. D'autre part, en injectant l'équation (2.37) dans (2.40), nous obtenons

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = \sum_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{E}} \sum_{f\in\mathcal{F}} i(\boldsymbol{v},f) \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{u}_{f} = \boldsymbol{W}_{\boldsymbol{v}}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{v}f} \boldsymbol{U}_{f}.$$
(2.42)

Ce qui nous donne donc

$$\boldsymbol{D}_{vf}\boldsymbol{U}_f = \boldsymbol{U}_v^d. \tag{2.43}$$

En d'autres termes, la matrice d'incidence permet de calculer les intégrants de la divergence dans les volumes à partir des valeurs exprimées sur les facettes. La matrice D_{vf} représente donc l'opérateur divergence discrétisé.

2.2 Formulations discrètes

Avant de poursuivre et d'écrire la forme discrète des formulations, il convient d'établir quelques notations. Les champs discrets seront distinguées par un h en indice. Par exemple : H_h est le champ magnétique H discret. Ensuite, les espaces $(W^i)_{0 \le i \le 2}$ définis dans les sections 2.1.1.1, 2.1.1.2 et 2.1.1.3 sont utilisés conjointement avec des grandeurs telles que la valeur aux nœuds, la circulation sur les arêtes et le flux à travers les facettes. L'utilisation de ces grandeurs, sur le champ scalaire ou vectoriel, sera indiquée par un n, concernant les nœuds, un a, concernant les arêtes, ou un f, concernant les facettes, en indice. Le tableau 2.1 regroupe l'ensemble des champs vectoriels et scalaires utilisées sous forme discrète par la suite. L'appartenance aux espaces W^1 , W^2 et W^3

Natation		Demonstration	
Notation continue	Notation discrete	Espace discret	Grandeur associee
Н	H_h	W^1	H _a
В	B_h	W^2	B_f
E	E_h	W^1	E_a
J	J_h	W^2	J_f
A	A_h	W^1	A_a
φ	$arphi_h$	W^0	φ_n
Т	T_h	W^1	T_a
Ω	Ω_h	W^0	Ω_n

TABLE 2.1 – Notations des champs vectoriels et scalaires discrets.

se déduit naturellement de l'appartenance des champs, dans le domaine continu : si $u \in H(\operatorname{grad}, D)$ (resp. $H(\operatorname{rot}, D), H(\operatorname{div}, D)$) alors $u_h \in W^1$ (resp. W^2, W^3). On gardera la notation W_n , de la section 2.1.1.1, pour représenter le vecteur contenant les fonctions nodales. De même pour la notation W_a (cf. section 2.1.1.2) pour les fonctions d'arêtes et W_f (cf. section 2.1.1.3) pour les fonctions de facettes. Afin d'illustrer concrètement l'utilisation de ces notations, considérons par exemple le champ magnétique H, qui se note H_h une fois discrétisé dans l'espace W^1 . On a la relation $H_h = W_a^T H_a$, où H_a est le vecteur contenant les circulations de H_h sur les arêtes

2.2.1 Magnétostatique

On rappelle que les équations à résoudre sont (1.13) et (1.14) :

$$rot(H) = J_s$$
$$div(B) = 0$$

où **B** et **H** sont reliés par la loi de comportement (1.5)

$$B = \mu H$$

2.2.1.1 Formulation A discrète

On rappelle l'expression de la formulation A dans le domaine continu : Trouver A dans l'espace jaugé $\widetilde{H}(\mathbf{rot}, D)$ tel que

$$a(\mathbf{A}, \mathbf{A}') = l(\mathbf{A}'), \ \forall \mathbf{A}' \in \widetilde{H}(\mathbf{rot}, D).$$
(2.44)

avec la forme bilinéaire coercive sur $\widetilde{H}(\mathbf{rot}, D) \times \widetilde{H}(\mathbf{rot}, D)$

$$a: (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \left\langle \mu^{-1} \operatorname{rot}(\mathbf{x}) \, \big| \, \operatorname{rot}(\mathbf{y}) \right\rangle_{D}$$
(2.45)

et la forme linéaire continue sur $\widetilde{H}(\mathbf{rot}, D)$ définie par

$$l: \mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{J}_{\mathbf{s}} | \mathbf{x} \rangle_{D}. \tag{2.46}$$

Discrétisons la forme bilinéaire *a*. Pour commencer, on utilisera pour cela l'opérateur rotationnel discret R_{fa} (cf. section 2.1.2.2) :

$$\left\langle \mu^{-1} \boldsymbol{R}_{fa} \boldsymbol{x}_{a} \left| \boldsymbol{R}_{fa} \boldsymbol{y}_{a} \right\rangle_{D}.$$
(2.47)

Ensuite, on définit la matrice de masse $M_{ff}^{\mu^{-1}}$ telle que

$$(\boldsymbol{M}_{ff}^{\mu^{-1}})_{i,j} = \left\langle \mu^{-1} \, \boldsymbol{w}_{f_i} \, \middle| \, \boldsymbol{w}_{f_j} \right\rangle_D = \mu^{-1} \, \boldsymbol{W}_f \, \boldsymbol{W}_f^{\mathsf{T}}$$
(2.48)

ce qui permet d'écrire la forme discrète de a

$$(W^{1})^{n_{a}} \times (W^{1})^{n_{a}} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_{f}}$$

$$a_{h}: \qquad (X,Y) \qquad \mapsto (R_{fa}X_{a})^{\mathsf{T}}M_{ff}^{\mu^{-1}}(R_{fa}Y_{a}) \qquad (2.49)$$

Maintenant, discrétisons la forme linéaire l. Pour cela on définit la matrice M_{af} telle que

$$(\boldsymbol{M}_{af})_{i,j} = \left\langle \boldsymbol{w}_{a_i} \middle| \boldsymbol{w}_{f_j} \right\rangle_D = \boldsymbol{W}_a \boldsymbol{W}_f^{\mathsf{T}}$$
(2.50)

qui permet d'écrire la forme discrète de l

$$(W^1)^{n_a} \to \mathbb{R}^{n_f}$$

$$I_h: \quad X \quad \mapsto J_{s_f}^{\mathsf{T}} M_{fa} X$$
(2.51)

Le problème variationnel discret de la formulation A se formule donc de la façon suivante : Trouver $A_h \in (W^1)^{n_a}$ tel que

$$a_h(A_h, A'_h) = l_h(A'_h), \quad \forall A'_h \in (W^1)^{n_a}$$
 (2.52)

En choisissant comme fonctions tests $(A'_{h}^{(i)})_{1 \le i \le n_a}$ les vecteurs $W_a^{(j)}$ dont les coefficients sont la valeur de la fonction d'arête associée à a_j évaluée sur l'arête a_i amène, par définition (cf. section 2.1.1.2), à $(A'_{h}^{(i)})_{1 \le i \le n_a} = (\delta_{ij})_{1 \le j \le n_a}$. Ainsi les fonctions $(A'_{h}^{(i)})_{1 \le i \le n_a}$ sont la base canonique de \mathbb{R}^{n_a} formant la matrice identité I_{n_a} . Et donc, l'équation

$$a_h(\boldsymbol{A}_h, \boldsymbol{A}_h) = l_h(\boldsymbol{A}_h) \tag{2.53}$$

projeté dans cette base mène à l'enchaînement suivant

$$(\mathbf{R}_{fa}\mathbf{A}_{a})^{\mathsf{T}}\mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}}\mathbf{R}_{fa}\mathbf{I}_{n_{a}} = \mathbf{J}_{sf}^{\mathsf{T}}\mathbf{M}_{fa}\mathbf{I}_{n_{a}}$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{R}_{fa}^{\mathsf{T}}(\mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}})^{\mathsf{T}}(\mathbf{R}_{fa}\mathbf{A}_{a}) = \mathbf{M}_{fa}^{\mathsf{T}}\mathbf{J}_{sf}$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{R}_{fa}^{\mathsf{T}}\mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}}\mathbf{R}_{fa}\mathbf{A}_{a} = \mathbf{M}_{fa}^{\mathsf{T}}\mathbf{J}_{sf}.$$

L'équation à résoudre, est finalement

$$\boldsymbol{R}_{fa}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{M}_{ff}^{\mu^{-1}}\boldsymbol{R}_{fa}\boldsymbol{A}_{a} = \boldsymbol{M}_{fa}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{J}_{sf}.$$
(2.54)

Afin d'assurer l'unicité de la solution de cette équation, on peut appliquer une jauge de la forme suivante

$$\boldsymbol{W}_{a}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}_{a}=0, \qquad (2.55)$$

avec W_a le vecteur des fonctions d'arête [Albanese and Rubinacci, 1990]. Il est à noter que l'utilisation d'une telle jauge n'est plus nécessaire dès lors qu'une méthode de type gradient conjugué est utilisée pour la résolution [Ren, 1996], à condition que

$$\boldsymbol{D}_{vf}\boldsymbol{J}_{sf} = \boldsymbol{0} \tag{2.56}$$

2.2.1.2 Formulation Ω discrète

On rappelle l'expression de la formulation Ω dans le domaine continu : Trouver Ω dans l'espace jaugé $\widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ tel que

$$a(\Omega, \Omega') = l(\Omega'), \ \forall \Omega' \in \widetilde{H}(\mathbf{grad}, D).$$

$$(2.57)$$

avec *a* la forme bilinéaire coercive continue sur $\widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ telle que

$$a: (x, y) \mapsto \langle \mu \operatorname{grad}(x) | \operatorname{grad}(y) \rangle_D$$
(2.58)

et *l* la forme linéaire continue sur $\widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ telle que

$$l: x \mapsto \langle H_s | \operatorname{grad}(x) \rangle. \tag{2.59}$$

En suivant un raisonnement semblable à celui de la formulation *A*, on obtient l'équation suivante

$$\boldsymbol{G}_{an}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{M}_{aa}^{\mu^{-1}}\boldsymbol{G}_{an}\boldsymbol{\Omega}_{n} = \boldsymbol{M}_{an}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{H}_{sa}.$$
(2.60)

2.2.2 Magnétoharmonique

2.2.2.1 Formulation $A - \varphi$ discrète

On rappelle l'expression de la formulation $A - \varphi$ dans le domaine continu : Trouver $(A, \varphi) \in \widetilde{H}(\mathbf{rot}, D) \times \widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ tels que

$$a((\boldsymbol{A},\boldsymbol{\varphi}),(\boldsymbol{A'},\boldsymbol{\varphi})) = l(\boldsymbol{A'},\boldsymbol{\varphi'}), \quad \forall (\boldsymbol{A'},\boldsymbol{\varphi'}) \in \widetilde{H}(\mathbf{rot},D) \times \widetilde{H}(\mathbf{grad},D),$$
(2.61)

avec *a* l'application bilinéaire coercive continue définie sur $\widetilde{H}(\mathbf{rot}, D) \times \widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ par

$$a: ((\mathbf{A}, \varphi), (\mathbf{A'}, \varphi)) \mapsto \frac{1}{\mu} \langle \operatorname{rot}(A) | \operatorname{rot}(A') \rangle_{D} + \langle \sigma (j \omega A + \operatorname{grad}(\varphi)) | A' + \operatorname{grad}(\varphi') \rangle_{D_{c}}, \qquad (2.62)$$

et *l* l'application linéaire continue définie sur $\widetilde{H}(\mathbf{rot}, D) \times \widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ par

$$l: (\mathbf{A}', \varphi') \mapsto \langle \mathbf{J}_s | \mathbf{A}' \rangle. \tag{2.63}$$

En suivant un raisonnement semblable à celui des formulations A et Ω , on obtient l'équation suivante

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{fa}^{\mathsf{T}} \mathbf{M}_{ff}^{\mu^{-1}} \mathbf{R}_{fa} + j\omega \mathbf{M}_{aa}^{\sigma} & \mathbf{M}_{aa}^{\sigma} \mathbf{G}_{an} \\ j\omega \mathbf{G}_{an}^{\mathsf{T}} \mathbf{M}_{aa}^{\sigma} & \mathbf{G}_{an}^{\mathsf{T}} \mathbf{M}_{aa}^{\sigma} \mathbf{G}_{an} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{a} \\ \varphi_{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{fa}^{\mathsf{T}} \mathbf{J}_{sf} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$
(2.64)

2.2.2.2 Formulation $T - \Omega$ discrète

On rappelle l'expression de la formulation $T - \Omega$ harmonique dans le domaine continu : Trouver $(\mathbf{T}, \Omega) \in \widetilde{H}(\mathbf{rot}, D) \times \widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ tel que

$$a((\mathbf{T},\Omega),(\mathbf{T}',\Omega')) = l((\mathbf{T}',\Omega')), \quad \forall (\mathbf{T}',\Omega') \in \widetilde{H}(\mathbf{rot},D) \times \widetilde{H}(\mathbf{grad},D),$$
(2.65)

avec *a* la forme bilinéaire coercive continue sur $\widetilde{H}(\mathbf{rot}, D) \times \widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ telle que

$$\begin{aligned} a((\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\Omega}), (\boldsymbol{T}', \boldsymbol{\Omega}')) &:= \left\langle \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot}(\boldsymbol{T}) \middle| \operatorname{rot}(\boldsymbol{T}')) \right\rangle_{D_c} \\ &+ \left\langle \mu j \omega \left(\boldsymbol{T} - \operatorname{grad}(\boldsymbol{\Omega}) \right) \middle| \boldsymbol{T}' - \operatorname{grad}(\boldsymbol{\Omega}') \right\rangle_{D_c} \\ &+ \left\langle \mu j \omega \operatorname{grad}(\boldsymbol{\Omega}) \middle| \operatorname{grad}(\boldsymbol{\Omega}') \right\rangle_{D_{nc}} \end{aligned}$$

et *l* la forme linéaire continue sur $\widetilde{H}(\mathbf{rot}, D) \times \widetilde{H}(\mathbf{grad}, D)$ telle que

$$l((\mathbf{T}', \Omega')) := -\langle \mu j \omega \mathbf{H}_s | \mathbf{T}' - \mathbf{grad}(\Omega') \rangle_{D_d} + \langle \mu j \omega \mathbf{H}_s | \mathbf{grad}(\Omega') \rangle_{D_{nc}},$$

En suivant un raisonnement semblable à celui de la formulation $A - \varphi$, on obtient l'équation suivante

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{fa}^{\mathsf{T}} \mathbf{M}_{ff}^{\sigma^{-1}} \mathbf{R}_{fa} + j\omega \mathbf{M}_{aa}^{\sigma} & -j\omega \mathbf{M}_{aa}^{\sigma} \mathbf{G}_{an} \\ \mathbf{G}_{an}^{\mathsf{T}} \mathbf{M}_{aa}^{\sigma} & \mathbf{G}_{an}^{\mathsf{T}} \mathbf{M}_{aa}^{\sigma} \mathbf{G}_{an} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{a} \\ \Omega_{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -j\omega \mathbf{M}_{aa}^{\mu} \mathbf{H}_{sa} \\ j\omega \mathbf{G}_{an}^{\mathsf{T}} \mathbf{M}_{aa}^{\mu} \mathbf{H}_{sa} \end{pmatrix}$$
(2.66)

2.3 Estimateurs et indicateurs d'erreur

Un intérêt de la Méthode des Éléments Finis est de disposer d'outils permettant de contrôler l'erreur numérique : les Estimateurs d'Erreurs (EE). Ils peuvent être répartis en deux familles : les EE *a priori* et les EE *a posteriori*. Ceux de la première famille n'utilisent pas la solution approchée et nécessitent la connaissance de la régularité de la solution exacte. Ceux de la seconde famille s'appuient sur la solution approchée et les données du problème. On utilisera exclusivement ces derniers. En effet, les diverses équations à vérifier et à résoudre intervenant directement dans leur définition, les estimateurs d'erreur *a posteriori*, qui s'appuient sur un résultat, sont plus proches de la physique du modèle que les estimateurs *a priori*, qui s'appuient souvent sur des considérations géométriques des éléments.

2.3.1 Définitions

Soit l'énoncé général, d'un problème Éléments Finis, suivant :

Trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$a(u_h, v_h) = l(v_h) \,\forall v_h \in V_h \tag{2.67}$$

avec *a* une forme bilinéaire coercive, *l* une forme linéaire, u_h la solution discrète de ce problème, v_h une fonction test discrète et V_h l'espace discret associé à ce problème. La solution exacte du problème continu est notée *u* et appartient à l'espace *V*.

On notera

$$e = u - u_h \tag{2.68}$$

l'erreur numérique commise lors de la résolution de ce problème. On appellera *erreur au sens de l'énergie* la quantité

$$\varepsilon = a(e, e) \tag{2.69}$$

que l'on écrira tantôt ε_T pour indiquer qu'elle est évaluée localement sur l'élément $T \in \mathcal{E}$, tantôt ε_G pour indiquer qu'elle est évaluée globalement, sur l'ensemble du domaine.

On dit d'un estimateur d'erreur η qu'il est **fiable** si son estimation d'erreur globale η_G majore l'erreur globale ε_G

$$\varepsilon_G \le \eta_G. \tag{2.70}$$

Cette propriété assure que si l'estimateur converge vers 0 alors l'erreur globale converge elle aussi vers 0. On dit d'un estimateur d'erreur η qu'il est **localement efficace** si son estimation d'erreur locale $\eta_{\mathcal{P}(T)}$ minore l'erreur locale $\varepsilon_{\mathcal{P}(T)}$

$$\eta_{\mathcal{P}(T)} \le \varepsilon_{\mathcal{P}(T)} \tag{2.71}$$

où

$$\eta_{\mathcal{P}(T)}^2 = \sum_{T \in \mathcal{P}(T)} \eta_T^2 \tag{2.72}$$

et $\varepsilon_{\mathcal{P}(T)}$ est l'erreur sur $\mathcal{P}(T)$ avec $\mathcal{P}(T)$ le *patch* (cf. figure 0.1) de l'élément *T*. Cette seconde propriété est fondamentale pour le raffinement de maillage car elle assure la pertinence de l'utilisation de l'estimateur comme indicateur local de l'erreur. En effet, l'EE sous estime localement l'erreur donc, si dans certaines zones du maillage, l'estimation d'erreur locale est grande, alors l'erreur sera elle aussi importante. Comme nous ne disposons pas de la solution exacte (si cela était le cas, alors il n'y aurait pas nécessité à résoudre le problème par la MEF), il n'est pas possible de déterminer ε . Par contre, il est possible de mettre en oeuvre des estimateurs d'erreur qui permettent d'approcher cette quantité. Dans ce qui va suivre, certaines catégories d'estimateurs d'erreur *a posteriori* seront présentés.

2.3.2 Estimateur d'erreur hiérarchique

Introduit par Bank et Weiser en 1985 [Bank and Weiser, 1985], les estimateurs d'erreur hiérarchiques reposent sur l'enrichissement de l'espace d'approximation V_h par un autre espace W_h . On obtient alors un espace $\widetilde{V}_h = V_h + W_h$. La solution exacte u étant mieux approchée sur \widetilde{V}_h , on mesure alors l'écart entre la solution u_h calculée sur V_h et \widetilde{u}_h calculée sur \widetilde{V}_h et on s'en sert pour estimer l'erreur $u - u_h$. La méthode développée par Bank et Weiser permet de ne pas faire le calcul sur \widetilde{V}_h . L'espace W_h est choisi de façon à ce que l'on ait $\widetilde{V}_h = V_h \oplus W_h$. Puis on résout le problème suivant :

Trouver $\eta_h \in W_h$ tel que

$$a(\eta_h, w_h) = r(w_h), \qquad \forall w_h \in W_h$$

L'estimation d'erreur est η_h . Par exemple, en magnétostatique, le problème à résoudre est [Dular, 2009] :

$$\underbrace{\mu^{-1} \langle \operatorname{rot}(\eta_h) | \operatorname{rot}(w_h) \rangle_D}_{a(\eta_h, w_h)} = \underbrace{\langle J_s | w_h \rangle_D - \mu^{-1} \langle \operatorname{rot}(A_h) | \operatorname{rot}(w_h) \rangle_D}_{r(w_h)}, \qquad \forall w_h \in W_h$$

L'estimateur d'erreur ainsi obtenu est fiable et efficace.

2.3.3 Estimateur d'erreur équilibré

Formulé pour des problèmes d'électrostatique et de magnétostatique pour la première fois par Oden et Reddy en 1974 [Oden and Reddy, 1974], les Estimateurs d'Erreur Équilibrés (EEE) sont basés sur la non-vérification des lois de comportement entre deux problèmes duaux. Les deux problèmes duaux en question sont par exemple, en magnétostatique, la formulation en potentiel vecteur **A** et celle en scalaire Ω [Cendes and Shenton, 1985]. La loi de comportement à considérer dans ce cas là est (1.5), où **B** provient de la formulation A et H de la formulation Ω ,

$$\boldsymbol{B}_A = \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{H}_{\Omega}. \tag{2.73}$$

La dualité entre ces deux problèmes vient du fait que l'erreur, au sens de l'énergie, venant de la méthode en **A**,

$$\varepsilon_A = A - A_h, \tag{2.74}$$

est orthogonale à celle en Ω ,

$$\varepsilon_{\Omega} = \Omega - \Omega_h. \tag{2.75}$$

En notant l'énergie magnétique

$$E_{mag}: (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}) \mapsto \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{B} | \boldsymbol{H} \rangle_D.$$
(2.76)

on montre l'orthogonalité entre ε_A et ε_Ω au sens de cette énergie.

$$2 E_{mag}(B_h^{(A)} - B, H_h^{(\Omega)} - H) = \left\langle B_h^{(A)} - B \left| H_h^{(\Omega)} - H \right\rangle_D$$

= $\langle \operatorname{rot}(\varepsilon_A) \left| -\operatorname{grad}(\varepsilon_\Omega) \right\rangle$
= $\left\langle \varepsilon_A \left| -\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(\varepsilon_\Omega)) \right\rangle_D - \left\langle \operatorname{rot}(\varepsilon_A) \times n \left| -\operatorname{grad}(\varepsilon_\Omega) \right\rangle_{\partial D}$

qui s'annule puisque $\operatorname{grad}(W^0) \subset \operatorname{Ker} \operatorname{rot}(W^1)$ et que $\operatorname{rot}(A_h - A) \times n$ est nul sur Γ_B (cf. équation (1.47)) et que $\Omega - \Omega_h$ est nulle sur Γ_H (cf. équation (1.67)).

2.3.3.1 Magnétostatique

Un exemple fiable et efficace d'EEE en magnétostatique est repris de [Tang et al., 2013]. Il nécessite la résolution des formulations A et Ω . L'expression de l'estimation d'erreur globale est la suivante :

$$\eta_G^2 = \sum_{T \in \mathcal{E}} \eta_T^2 = \sum_{T \in \mathcal{E}} \left\| \mu^{-1/2} \boldsymbol{B}_h^{(\boldsymbol{A})} - \mu^{1/2} \boldsymbol{H}_h^{(\boldsymbol{\Omega})} \right\|_{L^2(T)}^2.$$
(2.77)

Elle estime la somme des erreurs des formulations A et Ω au sens de l'énergie. Cette erreur, pour la formulation A (resp. Ω), est égale à $E_{mag}(B_h^{(A)} - B, H_h^{(A)} - H)$ (resp. $E_{mag}(B_h^{(\Omega)} - B, H_h^{(\Omega)} - H)$). La somme de ces erreurs est reliée aux erreurs $\varepsilon_A = A - A_h$ et $\varepsilon_{\Omega} = \Omega - \Omega_h$.

$$\varepsilon_G^2 = E_{mag}(\boldsymbol{B}_h^{(A)} - \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}_h^{(A)} - \boldsymbol{H}) + E_{mag}(\boldsymbol{B}_h^{(\Omega)} - \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}_h^{(\Omega)} - \boldsymbol{H})$$
(2.78)

$$= E_{mag}(\boldsymbol{B}_{h}^{(A)} - \boldsymbol{B}, \mu^{-1}(\boldsymbol{B}_{h}^{(A)} - \boldsymbol{B})) + E_{mag}(\mu(\boldsymbol{H}_{h}^{(\Omega)} - \boldsymbol{H}), \boldsymbol{H}_{h}^{(\Omega)} - \boldsymbol{H})$$
(2.79)

$$= \frac{1}{2} \left(\left\| \mu^{-1/2} (\boldsymbol{B}_{h}^{(\boldsymbol{A})} - \boldsymbol{B}) \right\|_{L^{2}(D)}^{2} + \left\| \mu^{1/2} (\boldsymbol{H}_{h}^{(\Omega)} - \boldsymbol{H}) \right\|_{L^{2}(D)}^{2} \right)$$
(2.80)

$$= \frac{1}{2} \left(\left\| \mu^{-1/2} \operatorname{rot}(\varepsilon_A) \right\|_{L^2(D)}^2 + \left\| \mu^{1/2} \operatorname{grad}(\varepsilon_\Omega) \right\|_{L^2(D)}^2 \right)$$
(2.81)

où $B_h^{(A)} = \operatorname{rot}(A_h)$ vient de la formulation en potentiel vecteur A et $H_h^{(\Omega)} = H_s - \operatorname{grad}(\Omega_h)$ vient de la formulation en potentiel scalaire Ω . Concernant la fiabilité de

cet estimateur, on observe l'égalité suivante entre l'estimation d'erreur globale η_D et l'erreur ε :

$$\begin{split} \eta_{G}^{2} &= \sum_{T \in \mathcal{E}} \eta_{T}^{2} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{E}} \left\| \mu^{-1/2} \mathbf{B}_{h}^{(A)} - \mu^{1/2} \mathbf{H}_{h}^{(\Omega)} \right\|_{L^{2}(T)}^{2} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{E}} \left\| \mu^{-1/2} \mathbf{B}_{h}^{(A)} - \mu^{-1/2} (\mathbf{B} - \mu \mathbf{H}) - \mu^{1/2} \mathbf{H}_{h}^{(\Omega)} \right\|_{L^{2}(T)}^{2} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{E}} \left\| \mu^{-1/2} (\mathbf{B}_{h}^{(A)} - \mathbf{B}) \right\|_{L^{2}(T)}^{2} + \left\| \mu^{1/2} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_{h}^{(\Omega)}) \right\|_{L^{2}(T)}^{2} + 2 \left\langle \mu^{-1/2} (\mathbf{B}_{h}^{(A)} - \mathbf{B}) \right| \mu^{1/2} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_{h}^{(\Omega)}) \right\rangle_{D} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{E}} \left\| \mu^{-1/2} \operatorname{rot}(\varepsilon_{A}) \right\|_{L^{2}(T)}^{2} + \left\| \mu^{1/2} \operatorname{grad}(\varepsilon_{\Omega}) \right\|_{L^{2}(T)}^{2} + 2 \left\langle \operatorname{rot}(\varepsilon_{A}) \left| \operatorname{grad}(\varepsilon_{\Omega}) \right\rangle_{D} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{E}} \left\| \mu^{-1/2} \operatorname{rot}(\varepsilon_{A}) \right\|_{L^{2}(T)}^{2} + \left\| \mu^{1/2} \operatorname{grad}(\varepsilon_{\Omega}) \right\|_{L^{2}(T)}^{2} \end{split}$$

L'erreur globale ε_G est donc égale à l'estimation d'erreur équilibré globale η_G à un facteur $\sqrt{2}$ près.

2.3.3.2 Magnétoharmonique

La version magnétoharmonique, elle aussi fiable et efficace, de l'EEE est reprise de [Creusé et al., 2015]. La résolution au préalable des formulations en potentiels $A - \varphi$ et $T - \Omega$ est une étape nécessaire dans le processus d'obtention de cet estimateur. L'estimation d'erreur globale peut être décomposée en deux contributions ; une électrique et une autre magnétique. L'estimation d'erreur globale s'exprime de la façon suivante

$$\eta_G^2 = \sum_{T \in \mathcal{E}} \eta_{\text{magnétique},T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{E} \cap D_c} \eta_{\text{électrique},T}^2$$
(2.82)

avec

$$\eta_{\text{magnétique},T}^{2} = \mu \left\| \mu^{-1} \boldsymbol{B}_{h} - \boldsymbol{H}_{h} \right\|_{L^{2}(T)}^{2}$$
$$\eta_{\text{électrique},T}^{2} = (\omega \sigma)^{-1} \left\| \boldsymbol{J}_{h} - \sigma \boldsymbol{E}_{h} \right\|_{L^{2}(T)}^{2}$$

On peut remarquer que la contribution magnétique seule équivaut à l'estimateur magnétostatique (2.77). Les différents champs discrets utilisés dans le calcul de l'estimateur sont, par formulation,

la formulation
$$(\mathbf{A} - \varphi)$$
 donne :
$$\begin{cases} \mathbf{B}_h &= \operatorname{rot}(\mathbf{A}_h) \\ \mathbf{E}_h &= -(j\omega\mathbf{A}_h + \operatorname{grad}(\varphi_h)) \end{cases}$$
la formulation $(\mathbf{T} - \Omega)$ donne :
$$\begin{cases} \mathbf{H}_h &= \mathbf{H}_{sh} + \operatorname{rot}(\mathbf{T}_h) - \operatorname{grad}(\Omega_h) \\ \mathbf{J}_h &= \operatorname{rot}(\mathbf{T}_h) \end{cases}$$

L'erreur locale, au sens de l'énergie, sur l'élément T s'exprime sous la forme suivante

$$\varepsilon_T^2 = \left\| \mu^{1/2} (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}_h) \right\|_{L^2(T)}^2 + \left\| \mu^{1/2} (\boldsymbol{H}_H h) \right\|_{L^2(T)}^2 + \left\| \omega^{-1/2} \sigma^{1/2} (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_h) \right\|_{L^2(T)}^2 + \left\| (\omega \sigma)^{-1/2} (\boldsymbol{J} - \boldsymbol{J}_h) \right\|_{L^2(T)}^2.$$
(2.83)

Elle est reliée à l'estimation d'erreur locale η_T par [Creusé et al., 2015]

$$\eta_T^2 \le 2\varepsilon_T^2,\tag{2.84}$$

où

$$\eta_T^2 = \eta_{\text{magnétique},T}^2 + \eta_{\text{électrique},T}^2$$
(2.85)

Concernant l'erreur globale

$$\varepsilon_G^2 = \sum_{T \in \mathcal{E}} \varepsilon_T^2, \tag{2.86}$$

il n'y a pas d'égalité avec l'estimation d'erreur globale

$$\eta_G^2 = \sum_{T \in \mathcal{E}} \eta_T^2 \tag{2.87}$$

, contrairement à l'estimateur équilibré magnétostatique. On obtient la relation suivante [Creusé et al., 2015] :

$$\eta_G^2 = \varepsilon_G^2 + t.o.e. \tag{2.88}$$

où t.o.e. est un terme d'ordre élevé.

2.3.4 Estimateur d'erreur résiduel

Quatre Estimateur d'Erreur Résiduels (EER) seront présentés ici. Chacun nécessite la résolution d'une formulation, à savoir la formulation en potentiel A, Ω , $A - \varphi$ ou $T - \Omega$. Afin de donner une brève explication sur la formulation de ce type d'estimateur, on reprend les notations définies en 2.3.1.

Les estimateurs équilibrés de la section précédente sont basés sur la non vérification des lois de comportement. Les EER que l'on présentera ci-après sont basés sur le fait que la norme, associée à l'espace V, de l'erreur e est équivalente à la norme du résidu r [Babuška I. and Rheinboldt W. C., 1978].

Les EER que l'on utilisera sont fiables et efficaces. Ils sont donnés dans la thèse de Zuqi Tang [Zuqi Tang, 2012, Tang et al., 2013]. Ces EER sont basés sur l'évaluation des grandeurs énergétiques faiblement vérifiées par la formulation utilisée. Parmi ces grandeurs on trouve le résidu, l'erreur de discrétisation des termes sources et les sauts des composantes à toutes les interfaces des éléments.

Pour chacun de ces estimateurs, on exprimera le détail des différentes contributions locales. Ces contributions sont des indicateurs d'erreur; ils ne sont pas directement reliés à l'erreur numérique de la résolution de la formulation. Ils ne sont donc pas forcément fiables ni efficaces. Cependant, la somme de ces contributions locales donne un estimateur local efficace et la somme des estimations locales, qui est l'estimateur global, est fiable.

2.3.4.1 EER appliqué à la formulation A

En magnétostatique, pour la formulation potentiel vecteur A, on doit vérifier les sauts de la composante tangentielle de H et l'équation à résoudre. Cela revient à évaluer quatre termes qui contribuent à la construction de l'estimateur local :

$$\eta_T^2 = \eta_{T,1}^2 + \eta_{T,2}^2 + \sum_{F \in \partial T \cap \mathcal{F}_{int}(D_h)} \eta_{F,int,1}^2 + \sum_{F \in \partial T \cap \Gamma_H} \eta_{F,\Gamma_H,1}^2$$
(2.89)

où les contributions locales sont

$$\eta_{T,1} = h_T \left\| J_{sh} - \operatorname{rot}(\mu^{-1} \operatorname{rot}(A_h)) \right\|_{L^2(T)}$$
(2.90)

$$\eta_{T,2} = h_T \left\| J_s - J_{sh} \right\|_{L^2(T)}$$
(2.91)

$$\eta_{F,int,1} = h_F^{1/2} \left\| \left[\mathbf{n} \times \mu^{-1} \operatorname{rot}(\mathbf{A}_h) \right]_F \right\|_{L^2(F)}$$
(2.92)

$$\eta_{F,\Gamma_{H},1} = h_{F}^{1/2} \left\| \boldsymbol{n} \times \mu^{-1} \operatorname{rot}(\boldsymbol{A}_{h}) \right\|_{L^{2}(F)}$$
(2.93)

Le résidu volumique, de l'équation (1.41), est évalué par (2.90). Ensuite, l'erreur de discrétisation du terme source est évalué par (2.91). Finalement, la condition limite $H \times n = 0$ sur Γ_H est évaluée par (2.93), et la conservation de la composante tangentielle de H par (2.92).

2.3.4.2 EER appliqué à la formulation Ω

En magnétostatique, pour la formulation potentiel scalaire Ω , on doit vérifier les sauts de la composante normale de *B* et l'équation à résoudre. Cela revient à évaluer trois termes qui contribuent à la construction de l'estimateur local :

$$\eta_T^2 = \eta_{T,3}^2 + \sum_{F \in \partial T \cap \mathcal{F}_{int}} \eta_{F,int,2}^2 + \sum_{F \in \partial T \cap \Gamma_B} \eta_{F,\Gamma_B,2}^2$$
(2.94)

où les contributions locales sont

$$\eta_{T,3} = h_T \left\| \operatorname{div}(\mu(H_s - \operatorname{grad}(\Omega_h))) \right\|_{L^2(T)}$$
(2.95)

$$\eta_{F,int,2} = h_F^{1/2} \left\| \left[\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\mu} (\boldsymbol{H}_s - \mathbf{grad}(\Omega_h)) \right]_F \right\|_{L^2(F)}$$
(2.96)

$$\eta_{F,\Gamma_B,2} = h_F^{1/2} \left\| \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\mu} (\boldsymbol{H}_s - \operatorname{\mathbf{grad}}(\Omega_h)) \right\|_{L^2(F)}$$
(2.97)

Le résidu volumique, de l'équation (1.58), est évalué par (2.95). Ensuite, la condition limite $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ_B est évaluée par (2.97), et la conservation de la composante normale de \mathbf{B} par (2.96).

2.3.4.3 EER appliqué à la formulation $A - \varphi$

Dans le cas de la formulation magnétoharmonique $A-\varphi$, par rapport au cas magnétostatique A, s'ajoute de nouvelles grandeurs à évaluer car il faut prendre en compte le domaine conducteur. On voit donc apparaître un nouveau membre dans l'équation à résoudre (1.105). Il faut aussi vérifier que la divergence de J soit nulle dans le domaine et évaluer la continuité de sa composante normale dans le domaine conducteur. Cela amène à l'expression suivante

$$\eta_{T}^{2} = \eta_{T,4}^{2} + \eta_{T,2}^{2} + \eta_{T,6}^{2} + \sum_{F \subset \partial T \cap \mathcal{F}_{int} \setminus \partial D_{c}} (\eta_{F,int,1}^{2} + \eta_{F,int,3}^{2}) + \sum_{F \in \partial T \cap \Gamma_{H}} \eta_{F,\Gamma_{H},1}^{2} + \sum_{F \in \partial T \cap \Gamma_{J}} \eta_{F,\Gamma_{J},3}^{2}$$
(2.98)

où les différentes contributions sont

$$\eta_{T,4} = h_T \left\| \boldsymbol{J}_{sh} - \operatorname{rot}(\boldsymbol{\mu}^{-1} \operatorname{rot}(\boldsymbol{A}_h)) - \sigma(j\omega \boldsymbol{A}_h + \operatorname{grad}(\boldsymbol{\varphi}_h) \right\|_{L^2(T)},$$
(2.99)

$$\eta_{T,2} = h_T \left\| J_s - J_{sh} \right\|_{L^2(T)},$$
(2.100)

$$\eta_{T,6} = h_T \left\| \operatorname{div}(\sigma(j\omega A_h) + \operatorname{grad}(\varphi_h)) \right\|_{L^2(T)},$$
(2.101)

$$\eta_{F,int,1} = h_F^{1/2} \left\| \left[\mathbf{n} \times \mu^{-1} \operatorname{rot}(\mathbf{A}_h) \right]_F \right\|_{L^2(F)},$$
(2.102)

$$\eta_{F,int,3} = h_F^{1/2} \left\| \left[\sigma(j\omega A_h + \operatorname{grad}(\varphi_h)) \cdot \boldsymbol{n} \right]_F \right\|_{L^2(F)},$$
(2.103)

$$\eta_{F,\Gamma_{H},1} = h_{F}^{1/2} \left\| \boldsymbol{n} \times \mu^{-1} \operatorname{rot}((\boldsymbol{A}_{h})) \right\|_{L^{2}(F)},$$
(2.104)

$$\eta_{F,\Gamma_{J},3} = h_F^{1/2} \left\| \sigma(j\omega A_h + \operatorname{grad}(\varphi_h)) \cdot \boldsymbol{n} \right\|_{L^2(F)}$$
(2.105)

2.3.4.4 EER appliqué à la formulation $T - \Omega$

Dans le cas de la formulation magnétoharmonique $T - \Omega$ par rapport au cas magnétostatique Ω , s'ajoute de nouvelles grandeurs à évaluer car il faut prendre en compte le domaine conducteur. On voit donc apparaître l'équation à résoudre (1.104). Il faut aussi évaluer la continuité de la composante tangentielle de E dans le domaine conducteur. Cela amène à l'expression suivante

$$\eta_T^2 = \eta_{T,7}^2 + \eta_{T,8}^2 + \sum_{F \subset \partial T \setminus \Gamma_E} (\eta_{F,int,4}^2 + \eta_{F,int,5}^2) + \sum_{\partial T \cap \Gamma_E} \eta_{F,\Gamma_E,4}^2 \quad \text{si } T \in D_c$$
$$\eta_T^2 = \eta_{T,8}^2 + \sum_{F \subset \partial T \setminus \Gamma_B} \eta_{F,int,5}^2 + \sum_{\partial T \cap \Gamma_B} \eta_{F,\Gamma_B,5}^2 \quad \text{si } T \in D_{nc}$$

où les différentes contributions sont les suivantes

$$\eta_{T,7} = h_T \left\| -\operatorname{rot}(\sigma^{-1}\operatorname{rot}(T_h)) - j\omega\mu H_h \right\|_{L^2(T)}, \qquad (2.106)$$

$$\eta_{T,8} = h_T \left\| \operatorname{div}(j\omega\mu H_h)) \right\|_{L^2(T)},$$
(2.107)

$$\eta_{F,int,4} = h_F^{1/2} \left\| \left[\mathbf{n} \times \sigma^{-1} \operatorname{rot}(\mathbf{T}_h) \right]_F \right\|_{L^2(F)},$$
(2.108)

$$\eta_{F,int,5} = h_F^{1/2} \omega \left\| [\mathbf{n} \cdot \mu \mathbf{H}_h]_F \right\|_{L^2(F)},$$
(2.109)

$$\eta_{F,\Gamma_{E},4} = h_{F}^{1/2} \left\| \boldsymbol{n} \times \sigma^{-1} \operatorname{rot}(\boldsymbol{T}_{h}) \right\|_{L^{2}(F)}, \qquad (2.110)$$

$$\eta_{F,\Gamma_{B},5} = h_F^{1/2} \omega \left\| \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{H}_h \right\|_{L^2(F)}$$
(2.111)

2.3.4.5 Synthèse

Les tableaux ci-dessous résument les résultats disponibles. Lorsqu'une grandeur est estimée, on indiquera le terme de l'estimateur qui permet de la contrôler. Lorsqu'une grandeur est vérifiée (\checkmark) cela signifiera qu'elle est imposée au sens fort dans la formulation utilisée et qu'elle vérifie la condition aux limites de l'équation.

		formulations :	A	Ω
Vérification des	$rot(H) = J_s$	(cf. eq. (2.90))	$\eta_{T,1}$	\checkmark
équations locales	$\operatorname{div}(\boldsymbol{B}) = 0$	(cf. eq. (2.95))	\checkmark	η _{Τ,3}
Conservation de la	$[B \cdot n]$	(cf. eq. (2.96))	\checkmark	$\eta_{F,int,2}$
composante normale				
Conservation de la	$[H \cdot n]$	(cf. eq. (2.92))	$\eta_{F,int,1}$	\checkmark
composante tangen-				
tielle				
Conditions limites	$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}=0$	(cf. eq. (2.97))	\checkmark	$\eta_{F,\Gamma_B,2}$
Conditions minites	$H \times n = 0$	(cf. eq. (2.93))	$\eta_{F,\Gamma_{H},1}$	\checkmark

 TABLE 2.2 – Estimateurs résiduels ; magnétostatique

Тавге 23 -	Estimateurs	résiduels	• magnétoharm	onique
TABLE 2.5	Lotinateuro	residueis,		lonique

		formulations :	$A - \varphi$	$T - \Omega$
Vérification des	rot(H)=J	(cf. eq. (2.99))	$\eta_{T,4}$	\checkmark
équations locales	$\mathbf{rot}(\mathbf{E}) = -j\omega\mathbf{B}$	(cf. eq. (2.106))	\checkmark	$\eta_{T,7}$
Conservation de la	$[B \cdot n]$	(cf. eq. (2.109))	\checkmark	$\eta_{F,int,5}$
composante normale	$[J \cdot n]$	(cf. eq. (2.103))	$\eta_{F,int,3}$	\checkmark
Conservation de la	$[H \times n]$	(cf. eq. (2.102))	$\eta_{F,int,1}$	\checkmark
composante tangen-	$[E \times n]$	(cf. eq. (2.108))	\checkmark	$\eta_{F,int,4}$
tielle	$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}=0$	(cf. eq. (2.111))	\checkmark	$\eta_{F,\Gamma_B,5}$
Conditions limites	$H \times n = 0$	(cf. eq. (2.104))	$\eta_{F,\Gamma_{H},1}$	\checkmark
Conditions minites	$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}=0$	(cf. eq. (2.105))	$\eta_{F,\Gamma_J,3}$	\checkmark
	$E \times n = 0$	(cf. eq. (2.110))	\checkmark	$\eta_{F,\Gamma_{E},4}$

2.3.5 Indicateurs d'erreur

Les estimateurs d'erreur définis précédemment sont reliés à la solution exacte. Cela a permis de démontrer leur fiabilité et leur efficacité. Lorsqu'il n'existe pas de lien direct entre l'estimateur et la solution exacte, on emploie le terme d' « indicateur d'erreur ». Les propriétés de fiabilité et d'efficacité sont donc plus difficile à évaluer. Il existe plusieurs sortes d'indicateur ; une présentation non exhaustive est réalisée cidessous.

2.3.5.1 Lissage de solution

Introduit par Zienkiewicz et Zhu en 1987 pour des problèmes d'élasticité linéaire, l'indicateur, communément appelé ZZ, est basé sur la reconstruction du gradient de u_h

afin d'approcher localement le gradient de u [Zienkiewicz and Zhu, 1987]. Le gradient de u_h étant constant par élément, on l'interpole (aux nœuds dans l'article [Zienkiewicz and Zhu, 1987]) et on prend leur différence comme indicateur. Concernant les équations de Maxwell on peut citer [Nicaise, 2005] dans lequel la formulation en champ électrique est utilisé et où l'étape de reconstruction se fait aux nœuds. L'expression de l'estimateur local est

$$eta_T^2 = \|R(u_h) - u_h\|_{L^2(T)}^2 + \|R(\mathbf{rot}(u_h)) - \mathbf{rot}(u_h)\|_{L^2(T)}^2$$
(2.112)

avec

$$R(u_h) = \sum_{x \in \mathcal{N}(D_h)} \sum_{T \in \mathcal{V}_3^0(x)} \alpha_{T,x} u_{h|T}(x)$$
(2.113)

l'opérateur de reconstruction et $(\alpha)_{T,x}$ choisis tels que

$$\sum_{T \in \mathcal{V}_3^0(x)} \alpha_{T,x} = 1$$
$$\alpha_{T,x} \ge 0$$

2.3.5.2 Saut normal et tangentiel

L'indicateur de saut permet de contrôler la continuité normale ou tangentielle des grandeurs considérées. Par exemple, pour la formulation en potentiels $A-\varphi$ [Ren et al., 2013], $\|[\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}]_F\|_{L^2(F)}^2$ contrôle la continuité de la composante normale de \mathbf{J} à travers les facettes du maillage. et $\|[\mathbf{n} \times \mathbf{H}]_F\|_{L^2(F)}^2$ celle tangentielle de \mathbf{H} . Ce genre d'indicateur a été vu précédemment, en magnétostatique par exemple, comme terme d'estimateur résiduel (cf. équation (2.102) et (2.96)), mais il ne permet pas à lui seul de construire un estimateur fiable et efficace.

2.3.5.3 Discontinuité du gradient

Un cas particulier de saut normal est la discontinuité du gradient. En effet, en prenant $\mathbf{H}_s = \mathbf{0}$ dans l'équation (2.96) on obtient un indicateur sur le saut normal du gradient de Ω_h . Plus généralement, l'indicateur s'exprime ainsi (cf. [Golias and Tsiboukis, 1993]) :

$$\eta_S = \int_S |(\mathbf{grad}(u_h^{(1)}) - \mathbf{grad}(u_h^{(2)})) \cdot n|^2$$

où l'on peut choisir de garder la valeur maximale de η_S par élément

$$\eta_T = \max_{S \subset T} \eta_S, \tag{2.114}$$

afin de ne pas sous évaluer l'erreur.

2.3.5.4 Perturbation de l'énergie

L'énergie considérée ici est $F_{T^{(i)}} = a(u_h, u_h)_{|T^{(i)}}$ calculée sur l'élément Ten utilisant une formulation avec des fonctions d'approximation de degré différent. L'indicateur est alors (cf. [Golias and Tsiboukis, 1993])

$$\eta_T = F_{T^{(1)}} - F_{T^{(2)}}$$

et nécessite donc deux résolutions : une à l'ordre 1 et une autre à l'ordre 2. On peut y voir une ressemblance avec l'estimateur hiérarchique.

2.3.5.5 Perturbation nodale

Plutôt que d'augmenter l'ordre des éléments, comme pour la perturbation de l'énergie, on augmente, de manière imbriquée, le nombre d'éléments. On effectue donc un h-raffinement uniforme. On note :

 $- M_1$ issu de M_0

 $- u_h^{(0)} \text{ calculée sur } M_0$ - $u_h^{(1)} \text{ calculée sur } M_1$ - $I(u_h^{(0)})$ l'interpolée, aux nœuds, de $u_h^{(0)}$ sur M_1

l'indicateur est alors (cf. [Golias and Tsiboukis, 1993])

$$\eta_T = \operatorname{vol}(T) \sum_{x \in \mathcal{V}_0^3(T)} |u_h^{(1)}(x) - I(u_h^{(0)})(x)|$$

Il est basé sur l'écart entre l'interpolée de la solution du maillage M_0 et la solution du maillage M_1 , ce qui nécessite deux résolutions.

Synthèse 2.3.6

Nous avons vu qu'il existe deux grandes familles d'outils mathématiques pour récupérer une information sur l'erreur numérique. Les indicateurs d'erreur, facile à mettre en oeuvre, ne possède pas les propriétés d'efficacité et de fiabilité que l'on rencontre chez les estimateurs d'erreur. Dans notre application, le contrôle de l'erreur étant primordiale, nous privilégierons donc l'usage d'estimateurs d'erreur.

Adaptation de maillage 2.4

La solution numérique obtenue par la MEF peut être améliorée, et ainsi converger vers la solution exacte du problème, en agissant sur le maillage ou les fonctions de bases. Classiquement, ce résultat est obtenu par l'augmentation uniforme du nombre d'éléments dans le maillage, ou du degré des fonctions d'interpolations. Cependant, il n'est pas toujours nécessaire de respecter cette uniformité dans le raffinement de maillage, l'erreur numérique n'ayant pas forcément une répartition uniforme à travers les éléments du maillage. C'est là qu'intervient la notion d'adaptation de maillage [Chengjun Li et al., 1994][Li et al., 1994][Dular, 2009]. On cherchera à faire correspondre la répartition de l'erreur numérique à la géométrie du maillage de manière à répartir uniformément l'erreur à travers le maillage. Les techniques qui permettent d'apporter des modifications sur le maillage agissent classiquement sur le degré des éléments, la position des nœuds et l'ajout ou la suppression de nœuds. Pour utiliser ces techniques, il faut que les éléments à raffiner ait été préalablement sélectionnés en utilisant la répartition de l'erreur estimée par les méthodes proposées au 2.3. Ainsi, l'adaptation de maillage se réalise en deux temps : la sélection d'éléments puis leur raffinement.

Dans ce qui suit, il sera présenté diverses méthodes de sélections d'éléments, puis les principales techniques de raffinement de maillage et enfin la technique qui aura été retenue dans le développement de la méthode d'adaptation de maillage de cette thèse.

2.4.1 Sélection des éléments

L'expertise dans la MEF combinée à celle de la physique du système donne une connaissance *a priori* des zones nécessitant une plus grande finesse dans leur modélisation discrète. On peut donc relever ici une première méthode de sélection des éléments en vu de leur raffinement : la sélection par zone géométrique. Cette méthode est utilisé par le logiciel de raffinement de maillage HOMARD [EDF, 1996]. Cependant, dans des cas où la géométrie du système est complexe, l'expertise peut ne plus être suffisante.

La sélection d'éléments, plutôt que d'être faite *a priori*, peut être guidée par un estimateur d'erreur. Dans ce cas, on regarde la valeur locale η_T d'estimation d'erreur sur chaque élément et on décide d'un seuil, global, de sélection *a*. Tous les éléments vérifiant $\eta_T \ge a$ seront sélectionnés pour être découpés. La problématique du choix du critère de sélection est illustré sur le graphique 2.4 représentant un exemple d'histogramme de l'erreur estimée sur chaque élément du maillage. Tous les éléments à droite de *a* (*i.e.* ayant une estimation $\eta_T \ge a$) sont sélectionnés, mais comment choisir *a*? Il existe des méthodes plus ou moins complexes pour déterminer ce seuil. Cependant, à chaque fois, l'utilisateur doit décider, selon son expérience, de la valeur d'un paramètre. Les méthodes disponibles dans le logiciel HOMARD [EDF, 1996] sont

- η_{*T*} ≥ *a* : l'utilisateur choisit la valeur du seuil, *a*
- η_{*T*} ≥ *x*%η_{max} : l'utilisateur choisit *x* ∈ [0, 100]
- $-\eta_T \ge \eta_{mov} + a\sigma$: l'utilisateur choisit *a*; σ est l'écart-type
- − les éléments sont rangés par valeur décroissante d'estimation d'erreur puis x% sont sélectionnés. L'utilisateur choisit $x \in [0, 100]$

On peut aussi citer [Golias and Tsiboukis, 1993]

 $-\eta_T \ge a = b\eta_{moy}$ où η_{moy} est la moyenne empirique des η_T sur les éléments du



FIGURE 2.4 – Histogramme de répartition d'estimation d'erreur

maillage *i.e.*, $\eta_{moy} = \frac{1}{n_E} \sum_{T \in \mathcal{E}} \eta_T$; l'utilisateur choisit $b \in [1, 1.2]$. Ces méthode sélectionnent donc les éléments à remailler mais ne font pas le lien entre la répartition d'erreur et les caractéristiques du maillage à obtenir.

2.4.2 Raffinement

Une fois que l'on connait les éléments à remailler, il faut modifier le maillage en conséquence. Il existe classiquement trois techniques de raffinement de maillage. Soit on bouge les nœuds, on les relocalise (on parle de r-raffinement), soit on augmente le nombre de nœuds en découpant les mailles (h-raffinement) ou soit on augmente le degré des fonctions d'interpolations (p-raffinement). Ces techniques peuvent être associées entre elles afin d'approcher au mieux la solution exacte.

2.4.2.1 h-raffinement

Une fois les éléments sélectionnés, il faut les découper. La découpe se fait généralement en ajoutant des nœuds sur les arêtes ou à l'intérieur de l'élément.

Pour la première option, pour des triangles, on peut citer la méthode de la bissection [Marmin, 1998] et la méthode de Bank [Bank, 1986] illustrée sur le graphique 2.5.

FIGURE 2.5 – Méthode de Bank



Concernant les quadrangles, on peut citer la méthode utilisée dans le logiciel HO-MARD que l'on peut considérer comme une extension de la méthode de Bank aux quadrangles (cf. graphique 2.6).

FIGURE 2.6 – Découpage de quadrangle



Pour la seconde option une méthode communément utilisée sur les triangles est de placer un nœud au centre (cf. graphique 2.7).





Cependant, les triangles fils ainsi générés ont tendance à devenir plus plats que le triangle parent, ce qui n'est pas conseillé (cf. [Shewchuk, 2002]). Ces méthodes peuvent s'étendre aux éléments volumiques en 3D. Par exemple, pour les tétraèdres :

- − méthode de Bank → octasection, comme dans le logiciel HOMARD (cf. graphique 2.8)
- bissection → découpe de l'élément en deux, comme illustrée sur le premier tétraèdre de la figure 2.13 [Jae Seop Ryu et al., 2001].
- nœud au centre → même procédé qu'en 2D : un nœud est ajouté au barycentre de l'élément et il est ensuite relié aux quatre sommets, créant ainsi quatre éléments.

FIGURE 2.8 – Octasection : tétraèdre



Pour les hexaèdres, on peut aussi citer l'octasection utilisée dans le logiciel HO-MARD (voir le graphique 2.9).

FIGURE 2.9 – Octasection : hexaèdre



Après avoir raffiné, se pose la question de la mise en conformité du maillage (dans le cas d'une résolution basée sur un maillage conforme). Il y a deux manières de procéder : le remaillage local ou l'utilisation d'éléments de transition.

La première option s'appuie sur les noeuds des éléments non conformes pour compléter le maillage par l'ajoût de nouveaux éléments suivant un algorithme de génération de maillage (par exemple l'algorihtme de Delaunay). Il n'y a donc plus forcément de parenté entre le maillage initial et le maillage adapté.

La seconde option permet de conserver cette parenté. Les éléments non conformes sont conservés et le raffinement est propagé. Une manière de faire est celle utilisée dans le logiciel HOMARD et sera décrite ci-dessous.

Pour illustrer la méthode, considérons le maillage, composé uniquement de triangles, M_0 du graphique 2.10. L'élément à raffiner est celui en vert. Cet élément est donc découpé en quatre (cf. graphique 2.11) ou en huit dans le cas 3D. Si l'on s'arrête à cette étape, le maillage n'est pas conforme (il y a un nœud au milieu d'une arête de l'élément rouge). Les éléments non conformes sont donc sélectionnés pour être raffinés. La façon de raffiner ces éléments dépendra du nombre de nœuds solitaires qu'ils possèdent. Dans notre cas, l'élément rouge va être découpé en deux pour en faire un élément de transition (voir graphique 2.12). Ainsi, le maillage M_1 est conforme. Pour les tétraèdres, il y a trois types d'éléments de transition ; voir le graphique 2.13. Pour les hexaèdres il y en a 64.







2.4.2.2 p-raffinement

La méthode de p-raffinement consiste à augmenter le degré des fonctions d'interpolations. Le nombre de degrés de liberté des éléments augmente donc lui aussi. Comme pour le h-raffinement, il faut d'abord sélectionner les éléments puis augmenter leur degré. Cette méthode perd cependant de son efficacité si les éléments sélectionnés sont proches des singularités du maillage. Pour pallier ce problème, on peut utiliser des quotients de polynômes [Webb, 2010].

2.4.2.3 r-raffinement





Le *r* de r-raffinement peut signifier *relocalisation*, voire *redistribution*. Dans tous les cas, l'idée principale de cette méthode est de déplacer les nœuds d'un maillage (cf. Fig. 2.14). La connectivité peut être conservée ou non. Dans le second cas, il est nécessaire de remailler localement. Les nouvelles coordonnées peuvent être obtenues en résolvant un problème d'optimisation *a posteriori* sans forcer la conservation de la connectivité [Dufour, S. et al., 2001]. Une autre manière de faire (cf. [Ryo et al., 1997]) est de déplacer les nœuds dans la zone définie par le polygone convexe dont les sommets sont les barycentres des éléments connectés à ces nœuds : sur le graphique 2.15 le nœud vert ne peut se déplacer que dans la zone verte. Par exemple, sur la figure 2.15, on associe à chaque triangle (T_1, T_2, T_3, T_4), de barycentre (b_1, b_2, b_3, b_4), un poids (p_1, p_2, p_3, p_4) positif. Le poids peut être obtenu, et c'est le cas dans [Ryo et al., 1997], en utilisant un indicateur d'erreur. Les nouvelles coordonnées du nœud N s'expriment ainsi :

$$\widetilde{N} = \sum_{i=1}^{4} c_i b_i, \qquad (2.115)$$

avec

$$c_i = \frac{p_i}{\sum_{j=1}^4 p_j}.$$
(2.116)

Les coefficients $(c_j)_{1 \le j \le 4}$ sont inférieurs à 1 et leur somme vaut 1. Donc, le nouveau nœud \widetilde{N} ne sortira pas de la zone précédemment définie.





2.4.2.4 hr-raffinement

Le *hr*-raffinement permet à la fois de déplacer et d'agir sur le nombre de nœuds du maillage. Cela reste donc une technique non-intrusive. C'est à dire qu'elle n'interagit pas avec le logiciel qui résout les équations du problème Élément Finis. On y trouve principalement trois opérateurs de modification de maillage : le déplacement de nœuds Fig. 2.16, la découpe d'arête Fig. 2.17 et la suppression d'arête Fig. 2.18

FIGURE 2.16 – Déplacement de nœuds



FIGURE 2.17 – Découpe d'arête



FIGURE 2.18 – Suppression d'arête



2.4.3 Carte de taille

Les méthodes de sélections d'élément présentées précédemment sont basées sur la détermination d'un seuil global *a*. Plutôt que chercher à déterminer ce seuil, qui est basé sur un raisonnement global, on pourrait s'intéresser à l'expression locale de l'erreur afin d'en tirer des informations sur la manière d'agir localement sur les caractéristiques géométriques des éléments [Dular et al., 2015]. En ce sens, la répartition de l'erreur est convertie en répartition de contraintes géométrique¹. On introduit ici la notion de *carte de taille*, qui est la répartition d'une métrique, définie sur chaque nœud, à travers le maillage.

Formulons ce qu'est une métrique. Tout d'abord, on rappelle l'expression du produit scalaire dans une base $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ de \mathbb{R}^3

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}^{\mathsf{T}} \mathbf{M}_{\mathcal{B}} \mathbf{y}$$
 (2.117)

avec $(M_{\mathcal{B}})_{i,j} = \boldsymbol{b}_i^{\mathsf{T}} \boldsymbol{b}_j$. La distance du point \boldsymbol{A} au point \boldsymbol{B} peut s'écrire

$$\left\| \overrightarrow{AB} \right\|_{\mathcal{B}} = \left\langle \overrightarrow{AB} \left| \overrightarrow{AB} \right\rangle_{\mathcal{B}}^{1/2}$$
(2.118)

La matrice $M_{\mathcal{B}}$ représente la métrique sur \mathbb{R}^3 dans la base \mathcal{B} . Cette métrique peut dépendre de la position. On définit alors la carte de taille qui à tout point x fait correspondre $M_{\mathcal{B}}(x)$. Ensuite, on définit la longueur moyenne du point A à B qui tient compte de la carte de taille :

$$\ell(\overrightarrow{AB}) = \int_0^1 \left\| \overrightarrow{AB} \right\|_{\mathcal{B}(A+t\overrightarrow{AB})} dt.$$
(2.119)

Par exemple, évaluons la longueur $\ell(\overrightarrow{AB})$ d'une arête AB pour une carte de taille ayant comme valeur *a* sur le nœud *A* et *b* sur le nœud *B*.Intéressons nous pour cela à l'expression de la matrice représentant la métrique. Celle-ci a été choisie isotrope. Dans ce cas, la matrice représentant la métrique est, par exemple pour le nœud *A*, de la forme suivante

$$\boldsymbol{M}_{\mathcal{B}(\boldsymbol{A})} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$
(2.120)

c'est à dire, proportionnelle à la matrice identité. Nous avons fait le choix de l'adaptation isotrope car l'élaboration d'une carte de taille anisotrope aurait nécessité des hypothèses de régularités supplémentaires sur les EE et donc des fonctions d'interpolations de degré supérieurs. Ainsi,

$$\ell(\overrightarrow{AB}) = \int_{0}^{1} \left\| \overrightarrow{AB} \right\|_{\mathcal{B}(A+t\overrightarrow{AB})} dt$$
(2.121)

$$= \int_{0}^{1} \left\langle \overrightarrow{AB} \right| (at + (1-t)b) \overrightarrow{IAB} \right\rangle dt \qquad (2.122)$$

$$= \left\| \overrightarrow{AB} \right\| \int_0^1 (at + (1-t)b)dt$$
 (2.123)

$$=\frac{a+b}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \tag{2.124}$$

^{1.} Nous ne nous intéressons qu'à ces sortes de contraintes car les deux techniques de raffinement retenues sont le r et le h raffinement.

Cette carte permet donc de fournir une mesure de la longueur d'arête qui sera utilisée comme critère de sélection. Par exemple, si la longueur d'une arête est trop grande selon cette métrique, elle sera découpée, et inversement, si elle est trop petite elle sera supprimée. La carte de taille est utilisée conjointement avec des techniques de *hr*-raffinement [Inria, 2004].

Le logiciel d'adaptation de maillage 3D qui a été retenu est MMG, développé par l'équipe CARDAMOM de l'Inria de Bordeaux. Ce choix est basé sur des critères de maniabilités (le logiciel est open source), de performances et de réactivité et transparence du support. Détaillons l'objectif à atteindre dans l'algorithme de MMG. On note \mathcal{M} le maillage initial. Une carte de taille $\mathcal{C} : \mathbf{x} \mapsto M_{\mathcal{B}}(\mathbf{x})$ est définie sur \mathcal{M} . Ce dernier est modifié de façon à ce que chacune de ces arêtes tendent à être de longueur 1 relativement à la métrique \mathcal{C} . C'est à dire que chaque arête A_{ij} de \mathcal{M} est modifiée de façon à ce que le ratio

$$\frac{\left\|A_{ij}\right\|}{\ell(A_{ij})}\tag{2.125}$$

tende vers 1 au fil des itérations de l'algorithme.

Cette approche par carte de taille contrairement à l'approche par sélection d'éléments, qui reste linéaire, est plus riche puisqu'elle permet d'exploiter pleinement la répartition des éléments du maillage en précisant non seulement les zones à remailler mais aussi les contraintes géométriques à respecter par le maillage adapté.

2.4.4 Conclusion

Ce chapitre pose les bases qui serviront à développer une méthode d'adaptation de maillage dans le chapitre suivant. Ces bases sont d'une part les Estimateurs d'Erreur (EE) et d'autre part les techniques d'adaptation de maillage et plus particulièrement la carte de taille associée à l'algorithme de rh-raffinement du logiciel MMG [Inria, 2004].

Les Estimateurs d'Erreur Équilibré (EEE) serviront de point de départ, dans le développement de la méthode, au vu de leur propriété remarquable d'être proportionnels à l'erreur numérique. La méthode sera aussi appliquée aux Estimateurs d'Erreur Résiduel (EER) A, Ω , $A - \varphi$ et $T - \Omega$, qui sont fiables et efficaces et qui ne nécessitent la résolution que d'un problème Élément Finis. Ces estimateurs serviront à l'élaboration d'une carte de taille visant à la répartition uniforme de l'erreur à travers le maillage.

Chapitre 3

Méthode d'adaptation de maillage

Dans ce chapitre, une procédure d'adaptation de maillage sera mise en place et appliquée sur des exemples académiques. L'objectif de cette procédure est de répartir uniformément l'erreur numérique à travers le maillage adapté. Dans un premier temps, on proposera une méthode reliant la répartition de l'EE aux caractéristiques géométriques du maillage. Ensuite, la méthode sera testée sur deux exemples académiques.

3.1 Conception d'une méthode

L'estimateur choisi pour le développement de la méthode est l'EEE détaillé dans 2.3.3. Ce choix est motivé par le fait que l'estimation d'erreur globale (cf. équation(??)) est fortement liée à l'erreur globale (cf. équation2.88). On étendra ensuite l'utilisation de cette relation aux EER. Une fois le lien établi entre estimation d'erreur et contrainte géométrique, une carte de taille sera fabriquée. Pour des raisons techniques, cette carte s'exprimera sur les nœuds sous forme scalaire. Ce scalaire peut être considéré comme une longueur que l'on souhaiterait imposer sur les arêtes avoisinantes. En effet, la solution logicielle (MMG) qui a été retenue afin de réaliser l'adaptation de maillage prend comme donnée d'entrée une carte de taille exprimée sous cette forme.

Afin d'illustrer le fonctionnement de cette technique, considérons le maillage initial de la figure 3.1. Ce maillage est une discrétisation régulière d'un carré de côté de longueur unitaire 4.

Pour illustrer notre propos, nous allons considérer, dans la suite, plusieurs exemples de carte de taille.

Dans le premier cas, on impose comme carte de taille un champ scalaire uniforme de valeur 1 sur chaque nœud du maillage initial. Cette carte de taille est ensuite traitée par MMG et on obtient le maillage adapté de la figure 3.2. Puisque les longueurs des arêtes du bord du maillage sont elles aussi égales à 1, elles restent quasiment à l'identique dans le maillage adapté sur la figure 3.2. Les triangles du maillage adaptés tendent à être équilatéraux.

FIGURE 3.1 – Maillage initial; dimension : 4×4



FIGURE 3.2 – Maillage adapté par une carte de taille uniforme de valeur 1



Dans le deuxième cas, on impose un champ scalaire de valeur 2 ce qui a pour effet d'élargir les mailles et donc de réduire le nombre d'éléments. On obtient alors le maillage de la figure 3.3.

FIGURE 3.3 – Maillage adapté par une carte de taille uniforme de valeur 2



Le troisième cas est l'inverse du deuxième : la valeur est de 0.5, ce qui raffine de manière homogène le maillage en divisant les longueurs d'arêtes par 2, comme on peut le voir sur la figure 3.4.

La carte de taille du dernier cas est un champ scalaire uniforme égal à 1 sauf sur la diagonale (du coin inférieur gauche vers le coin supérieur droit) où la valeur est de 0.1. Le maillage ainsi obtenu est présenté sur la figure 3.5. On constate que le maillage est fortement raffiné sur la diagonale.

Comme on peut le voir ici, la carte de taille permet d'aller plus loin que la simple sélection d'élément à remailler, et donc d'avoir une approche linéaire. Elle permet de

FIGURE 3.4 – Maillage adapté par une carte de taille uniforme de valeur 0.5

FIGURE 3.5 – Maillage adapté par une carte de taille valant 0.1 sur la diagonale et 1 sur les autres nœuds.

moduler la taille des éléments en fonction de la position. Pour pouvoir exploiter cette propriété pour un remaillage efficace, il est nécessaire d'établir un lien entre la carte d'erreur et la carte de taille.

De l'EE à la carte de taille 3.1.1

Rappelons l'expression locale de cet estimateur (cf. équation (2.82))

$$\eta_T^2 = \mu \left\| \mu^{-1} \boldsymbol{B}_h^{(\boldsymbol{A}-\varphi)} - \boldsymbol{H}_h^{(\boldsymbol{T}-\Omega)} \right\|_{L^2(T)}^2 + (\omega\sigma)^{-1} \left\| \boldsymbol{J}_h^{(\boldsymbol{T}-\Omega)} - \sigma \boldsymbol{E}_h^{(\boldsymbol{A}-\varphi)} \right\|_{L^2(T)}^2, \tag{3.1}$$

où $B_h^{(A-\varphi)}$ et $E_h^{(A-\varphi)}$ (resp. $H_h^{(T-\Omega)}$ et $J_h^{(T-\Omega)}$) proviennent de la formulation $A-\varphi$ (resp. $T - \Omega$). Notons, pour alléger le développement de l'expression de l'estimation d'erreur locale,

$$\Delta \boldsymbol{H}_{h} = \boldsymbol{\mu}^{-1} \boldsymbol{B}_{h}^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\varphi})} - \boldsymbol{H}_{h}^{(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{\Omega})}$$
(3.2)

et

$$\Delta J_h = J_h^{(T-\Omega)} - \sigma E_h^{(A-\varphi)}$$
(3.3)

La contribution locale (3.1) s'écrit alors

$$\eta_T^2 = \mu \|\Delta H_h\|_{L^2(T)}^2 + (\omega\sigma)^{-1} \|\Delta J_h\|_{L^2(T)}^2.$$
(3.4)

Développons maintenant l'écriture des normes en utilisant une méthode de quadrature pour approcher le calcul des normes. Les normes sont approchées en utilisant



une formule de quadrature d'ordre 2 (cf. annexe D.1) sur l'élément *T*. Dans ce qui suivra, on notera x_i le *i*-ème point d'intégration sur l'élément *T* du maillage, \hat{x}_i le point d'intégration associé à x_i dans l'élément de référence et p_i le poids associé à \hat{x}_i .

$$\eta_T^2 = \mu \sum_{i=1}^4 p_i \operatorname{jac}(x_i) \|\Delta H_h(\hat{x}_i)\|^2 + (\omega \sigma)^{-1} \sum_{i=1}^4 p_i \operatorname{jac}(x_i) \|\Delta J_h(\hat{x}_i)\|^2.$$
(3.5)

Le terme jac(x_i) est le jacobien ¹ évalué au point x_i .

Dans notre cas, l'élément considéré est un tétraèdre. De plus, les fonctions d'interpolations du logiciel utilisé pour résoudre le problème Élément Finis 3D, code_Carmel, sont les polynômes de Lagrange d'ordre 1. On a donc un jacobien constant par élément. En effet, la jacobienne Jac(x) associée à l'élément T de sommets (N_1, N_2, N_3, N_4) évaluée au point x s'exprime de la façon suivante

$$\operatorname{Jac}(\boldsymbol{x}) = \left(\operatorname{\mathbf{grad}}\left(\hat{w}_{n}^{(1)}\right)(\boldsymbol{x}), \operatorname{\mathbf{grad}}\left(\hat{w}_{n}^{(2)}\right)(\boldsymbol{x}), \operatorname{\mathbf{grad}}\left(\hat{w}_{n}^{(3)}\right)(\boldsymbol{x}), \operatorname{\mathbf{grad}}\left(\hat{w}_{n}^{(4)}\right)(\boldsymbol{x})\right) \cdot (N_{1}, N_{2}, N_{3}, N_{4})^{\mathsf{T}}$$

$$(3.6)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (N_1, N_2, N_3, N_4)^{\mathsf{T}}$$
(3.7)

avec $\hat{w}_n^{(i)}$ la *i*-ème fonction nodale de l'élément de référence (cf. (A.1)).

Intéressons-nous à l'expression de ΔH_h et ΔJ_h . Le premier s'écrit

$$\Delta H_h = \mu^{-1} B_h^{(A-\varphi)} - H_h^{(T-\Omega)}$$
(3.8)

$$= \mu^{-1} \operatorname{rot}(A_h) - T_h + \operatorname{grad}(\Omega_h)$$
(3.9)

et le second

$$\Delta J_h = J_h^{(T-\Omega)} - \sigma E_h^{(A-\varphi)}$$
(3.10)

$$= \operatorname{rot}(T_h) + \sigma \omega j A_h + \operatorname{grad}(\varphi_h).$$
(3.11)

Les fonctions de base utilisées dans la résolution sont les polynômes de Lagrange d'ordre 1 (cf. annexe A). En appliquant l'opérateur gradient à la fonction nodale w_n , on obtient une constante. De même en appliquant l'opérateur rotationnel à la fonction d'arête w_a . Ainsi, les équations (3.9) et (3.11) sont équivalentes à la somme d'une constante et d'une fonction polynômiale vectorielle de degré 1.

Dans la suite on négligera la variation linéaire de ΔH_h et ΔJ_h , on fera l'hypothèse que ΔH_h et ΔJ_h sont constants par élément, et on choisira comme constante la moyenne sur les points d'intégration de l'élément notée respectivement $\langle \Delta H_h \rangle$ et $\langle \Delta J_h \rangle$. La contribution locale (3.1) s'écrit alors

$$\eta_T^2 \approx (\mu < \Delta H_h > +(\omega \sigma)^{-1} < \Delta J_h >) \sum_{i \in Q(T)} p_i jac(x_i).$$
(3.12)

^{1.} déterminant de la jacobienne de l'élément

Or la somme

$$\sum_{i=1}^{4} p_i jac(x_i) \tag{3.13}$$

est égale à 6 fois le volume de l'élément T, que l'on notera V_T . On obtient donc

$$\eta_T^2 = 6(\mu < \Delta \boldsymbol{H}_h > +(\omega\sigma)^{-1} < \Delta \boldsymbol{J}_h >) \boldsymbol{V}_T.$$
(3.14)

Notons, pour simplifier l'écriture,

$$C_T = 6(\mu < \Delta H_h > +(\omega\sigma)^{-1} < \Delta J_h >).$$
(3.15)

La constante, par élément, C_T a la dimension d'une densité volumique d'erreur quadratique puisque

$$C_T = \frac{\eta_T^2}{V_T}.$$
(3.16)

L'hypothèse que l'on a faite sur $\langle \Delta H_h \rangle$ et $\langle \Delta J_h \rangle$ nous a donc amené à relier le volume V_T d'un élément à l'estimation d'erreur locale η_T .

Notre objectif est d'avoir une erreur uniforme sur le maillage et donc une densité d'erreur uniforme sur le maillage. Cela conduit à ce que C_T soit constant sur l'ensemble du maillage. On définit alors une *estimation d'erreur cible* η_0 que chaque élément doit atteindre après une étape d'adaptation de maillage. Le volume adapté de T est noté \widetilde{V}_T . On rappelle que lon a fait l'hypothèse de négliger la variation linéaire de ΔH_h et ΔJ_h . Donc, par définition, C_T est constant par élément. Plus particulièrement, C_T doit vérifier l'équation (3.16) pour la valeur cible η_0 ,

$$C_T = \frac{\eta_0^2}{\widetilde{V}_T},\tag{3.17}$$

ce qui mène à l'expression du volume à atteindre pour l'élément T

$$\widetilde{V}_T = \left(\frac{\eta_0}{\eta_T}\right)^2 V_T. \tag{3.18}$$

Cette relation relie donc le volume V_T de chaque élément T au volume théorique V_T qu'il devrait avoir pour que son estimation d'erreur locale soit égale à η_0 . On utilisera le fait que cette relation est basée sur l'obtention d'une densité d'erreur constante à travers le maillage pour l'étendre aux autres EE à dispositions : les EE résiduels.

On peut donc désormais construire une carte de taille de volumes exprimés sur les éléments. Cependant, le logiciel utilisé pour modifier les maillages, MMG [Inria, 2004], nécessite en entrée une carte de taille de longueurs d'arête exprimées sur les nœuds.

Pour obtenir cette carte de taille d'arête sur les nœuds il faut convertir la carte de taille de volume par élément en longueur par nœud. La technique de raffinement choisie est isotrope (cf. section 2.4.3). On peut donc, puisqu'aucune direction n'étant privilégiée par rapport à une autre, exprimer la longueur d'arête recherchée e_T en utilisant la formule du volume d'un tétraèdre régulier :

$$V_T = \frac{\sqrt{2}}{12} e_T^3 \quad \Leftrightarrow e_T = \left(\frac{12}{\sqrt{2}} V_T\right)^{1/3} \tag{3.19}$$

Ensuite, pour transférer la carte de taille sur les nœuds, la moyenne des e_T est calculée autour de chaque nœud (cf. figure 3.6) :

FIGURE 3.6 – Calcul de e_n à partir des longueurs e_{T_i} du voisinage du noeud n.



$$e_n = \frac{1}{\#\mathcal{P}(n)} \sum_{T \in \mathcal{P}(n)} e_T \tag{3.20}$$

avec $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des éléments connectés au nœud n.

Une fois cette carte de taille calculée, le maillage est adapté par l'algorithme de rhraffinement du logiciel MMG. Ce logiciel prend donc en entrée la carte de taille et s'en sert comme critère de sélection d'arêtes à découper ou supprimer. Il permet aussi de repositionner les nœuds de façon à approcher au mieux la géométrie du système.

3.1.2 Contrôle de la qualité des mailles

Le remaillage effectué par MMG est paramétré par des grandeurs que nous allons détailler par la suite. La propagation du h-raffinement à travers le maillage est contrôlé par un paramètre de gradation, que nous noterons hgrad, tel que hgrad > 1. Il permet d'imposer un encadrement du ratio entre les longueurs de deux arêtes qui sont connectées à un même nœud. En notant l_1 et l_2 les longueurs de deux arêtes reliées entre elles par un même nœud, cet encadrement s'exprime de la façon suivante

$$\frac{1}{\text{hgrad}} \le \frac{l_1}{l_2} \le \text{hgrad.}$$
(3.21)

On remarque directement que plus hgrad est grand, plus les variations de taille entre deux éléments adjacents s'accroissent.

Le repositionnement des nœuds sur les surfaces courbes, afin de mieux en approcher la géométrie, est contrôlé par le paramètre noté hausd. Il s'agit de la distance de Hausdorff entre la géométrie exacte (en pointillés sur la figure 3.7) et sa discrétisation (en trait plein sur la figure 3.7). Autrement dit, la distance maximale entre celles-ci. FIGURE 3.7 – Illustration, en rouge, de la distance de Hausdorff.



Ces deux paramètres, hgrad et hausd, peuvent être modifiés par l'utilisateur. Dans le cadre du développement de la méthode d'adaptation de maillage que l'on propose, on conservera la valeur par défaut du paramètre hgrad qui est de 1.1. Une étude de sensibilité sur ce paramètre (cf. figure E.1)) montre que l'on converge plus rapidement, *i.e.* en un minimum d'itérations avec cette valeur de paramètre. Concernant le paramètre hausd, il est le même pour tout le maillage. Plutôt que de choisir le paramètre par défaut, on va l'évaluer à chaque itération d'adaptation (sur chaque maillage adapté) selon la méthode suivante :

- 1. Les facettes des surfaces courbes (elles sont simples; il s'agit de sections cylindriques) dicrétisées sont sélectionnées
- 2. Sur chacune d'elle on calcule la distance du barycentre de chaque facette à la géométrie exacte
- 3. La plus petite distance est choisie comme paramètre hausd

Le fait de retenir le minimum permet de ne pas dégrader la précision de la discrétisation des surfaces courbe sur le maillage adapté.

La méthode proposée est itérative (cf. graphique 3.8). Une fois le maillage initial adapté, l'EE choisi est évalué sur ce nouveau maillage. Il convient alors de définir un critère d'arrêt. Comme l'objectif de la méthode est la répartition uniforme de l'erreur à travers le maillage, on peut s'intéresser à l'écart-type de l'EE local à travers le maillage, voire au coefficient de variation ² qui permet de mieux comparer l'évolution de la répartition de l'EE sur des maillages au nombre d'éléments différent.

^{2.} ratio écart-type/moyenne

FIGURE 3.8 – Schéma de la méthode d'adaptation de maillage



3.2 Validation

Afin de tester et de valider la méthode d'adaptation de maillage précédente, on l'appliquera tout d'abord à des cas simples pour lesquels la solution analytique est connue.

3.2.1 Cube de Rubinacci

3.2.1.1 Description du système

Le dispositif étudié consiste en un cube $[0,1]^3$ d'air traversé par un courant $J = (0,0,J_z)$ (cf. figure 3.9), où $J_z = 10^7 A/m^2$. On s'intéressera aux grandeurs statistiques de l'EE utilisé pour l'adaptation, à savoir l'estimation d'erreur globale η_G , l'estimation d'erreur locale moyenne η_m , l'écart type *s* des estimations d'erreur locales, le coefficient
FIGURE 3.9 – Cube de Rubinacci



de variation cv. On rappelle que ces grandeurs sont définies de la manière suivante :

$$\eta_G^2 = \sum_{T \in \mathcal{E}} \eta_T^2$$
$$\eta_m = \frac{1}{n_E} \sum_{T \in \mathcal{E}} \eta_T$$
$$s^2 = \frac{1}{n_E} \sum_{T \in \mathcal{E}} (\eta_T - \eta_m)^2$$
$$cv = \frac{s}{\eta_m}$$

La référence sera donnée par une série de maillages réguliers dont le nombre de d'éléments est multiplié par 8 d'une itération à la suivante, ce qui correspond à la division par 2 du rayon de la sphère circonscrite aux éléments. Ces maillages seront notés \mathcal{M}_1^r , \mathcal{M}_2^r , \mathcal{M}_3^r et \mathcal{M}_4^r avec respectivement 192,1536,12288 et 98304 éléments (cf. figure 3.10).

3.2.1.2 Résultats

Pour analyser l'influence du choix du maillage initial sur l'adaptation, nous effectuerons trois séries d'adaptation de maillage guidées par l'EEE. On notera $\mathcal{M}_i^{(j)}$ le *i*ème maillage de la *j*-ième série. Elles se différencient par leur maillage initial. La première série commence avec le maillage \mathcal{M}_1^r (celui à 192 éléments), la deuxième avec le maillage \mathcal{M}_2^r (1536 éléments) et la dernière avec le maillage \mathcal{M}_3^r (12288).

On reporte sur la figure 3.11 l'évolution de l'erreur en fonction du nombre d'éléments pour les maillages de références $(\mathcal{M}_i^r)_{1 \le i \le 4}$ et pour les trois séries de maillages adaptés. On retrouve la pente théorique de -1/3 en échelle logarithmique pour la MEF dans le tracé des résultats sur les maillages de référence. On observe que l'erreur diminue un peu plus vite pour les maillages adaptés, que pour les maillages de référence, à partir d'un millier d'éléments. Cependant, il y a un ralentissement dans l'augmentation du nombre d'élémentsqui s'explique par le fait que le coefficient de variation devient faible (cf. figure 3.12) et donc que l'erreur est répartie de manière presque



FIGURE 3.10 - Maillages réguliers. Nombre d'éléments : 192, 1536, 12288 et 98304

FIGURE 3.11 – Cube de Rubinacci : Évolution de η_G pour l'EEE





FIGURE 3.12 – Cube de R. : Évolution de *cv* pour l'EEE

homogène dans le maillage, ce qui n'est pas le cas pour la série de maillages de référence pour laquelle on constate l'augmentation du coefficient de variation. La méthode d'adaptation atteint donc son objectif qui est de répartir l'erreur de manière homogène à travers le maillage. On constate par ailleurs que l'on obtient des résultats très similaires avec les trois séries d'adaptation qui diffèrent, on le rappelle, par leur maillage initial. Cela laisse à penser que le maillage obtenu est peu dépendant du choix du maillage initial.

Observons maintenant la répartition de l'EEE sur les éléments. Celle-ci est représentée pour les maillages \mathcal{M}_1^r , \mathcal{M}_2^r , \mathcal{M}_3^r et \mathcal{M}_4^r sur la figure 3.14 avec la même échelle. On remarque que les valeurs maximales d'estimation d'erreur locale sont concentrées sur les côtés du cube parallèles à l'axe z pour chacun des maillages. Par contre, on ne retrouve pas ce phénomène sur les maillages adaptés de la figure 3.15, qui représente la répartition de l'EEE sur des maillages ayant un nombre d'éléments semblable pour chacune des séries de maillages de l'étude. L'EEE semble répartie de manière presque homogène, voire même semblable, sur les maillages adaptés. De plus, on remarque sur la figure 3.13, sur laquelle on a reporté l'écart-type s de chaque série de maillage en fonction du nombre d'éléments, que les trois séries d'adaptation de maillage tendent vers une même asymptote.







FIGURE 3.14 – Cube de Rubinacci : répartition de l'EEE sur les maillages \mathcal{M}_1^r , \mathcal{M}_2^r , \mathcal{M}_3^r et \mathcal{M}_4^r

FIGURE 3.15 – Cube de Rubinacci : répartition de l'EEE sur les maillages \mathcal{M}_4^r , $\mathcal{M}_{23}^{(1)}$ (103239 éléments), $\mathcal{M}_{20}^{(2)}$ (100395 éléments) et $\mathcal{M}_{10}^{(3)}$ (100867 éléments)



3.2.2 Effet de peau 1D

Ce cas-test a pour objectif de simuler l'effet de peau dans un conducteur.

3.2.2.1 Description du système

Le dispositif étudié consiste en un demi espace conducteur sur lequel est imposé un champ magnétique uniforme. Grâce aux symétries du problème, on peut restreindre l'étude à une barre conductrice devant laquelle est placée une section de bobine qui sert à imposer un champ magnétique constant sur la surface du conducteur (cf. figure 3.16). Les dimensions sont données ci-dessous. Les cotes figurent sur le graphique 3.17 dans le plan (**O**, **x**, **z**).

- Dimensions du dispositif :
 - Longueur (suivant (\mathbf{O}, \mathbf{x})) : 1 m
 - Hauteur (suivant (\mathbf{O}, \mathbf{z})) : 0.05 m
 - Profondeur (suivant (\mathbf{O}, \mathbf{y})) : 0.05 m
- Dimensions du conducteur :
 - Longueur : 0.4 m
 - Hauteur : 0.05 *m*
 - Profondeur : 0.05 *m*
- Dimensions de la bobine :
 - Longueur : 0.1 *m*
 - Hauteur : 0.05 m
 - Profondeur : 0.05 m

FIGURE 3.16 - Effet de peau 1D : schéma du système



TABLE 3.1 – Effet de peau 1D : Caractéristique des matériaux

	μ_r	$\sigma(Sm^{-1})$
Air	1	0
Bobine	1	0
Conducteur	1	10^{4}

– Distance Bobine/Conducteur : 0.25 m

FIGURE 3.17 – Effet de peau 1D : Géométrie du système et conditions aux limites



Afin d'imposer un champ magnétique uniforme à la surface du conducteur, la bobine génère une densité de courant source $\mathbf{J}_s = (0, J_s, 0)$ avec $J_s = 10^3 Am^{-2}$ selon l'axe(\mathbf{O}, \mathbf{y}). Avec un tel courant source dans la bobine, on obtient un champ magnétique $\mathbf{H} = (0, 0, H_z)$, avec $H_z = -100 Am^{-1}$, à la surface du conducteur conducteur (de 0.35 à 0.6*m* selon l'axe (\mathbf{O}, \mathbf{x}). La fréquence *f* du problème est fixée à $5 \cdot 10^3 Hz$ et le tableau 3.1 présente les caractéristiques des matériaux utilisés.

L'épaisseur de peau qui correspond à ces paramètres est

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\mu\sigma\pi f}} \approx 7.1176 \cdot 10^{-2} m \tag{3.22}$$

3.2.2.2 Résultats

Le maillage initial a été choisi de façon à être le plus grossier possible en respectant la géométrie du système. Cela afin d'éprouver la méthode d'adaptation en évitant de commencer avec un maillage donnant une approximation proche de la solution exacte. L'EE choisi est l'EE équilibré. L'estimation d'erreur globale η_G est affichée sur le graphique 3.21 pour chaque itération d'adaptation. On observe que η_G décroît au fil des itérations. Sa pente logarithmique tend vers -5/2, ce qui est meilleur que la pente théorique de la MEF 3D, c'est à dire -1/3. La solution approchée s'améliore donc au fil des itérations. Sur la figure 3.22 nous avons représenté l'évolution de H_h et de J_h à chaque étape du remaillage en la comparant à la solution analytique (disponible en annexe F). On constate que pour le maillage initial, l'approximation est très grossière. Par contre, le maillage adapté, au bout de 5 itérations, donne de très bons résultats et on constate bien que H_h et J_h convergent vers la solution exacte.

Intéressons-nous maintenant à la répartition de l'EE. Tout d'abord, on vérifie qualitativement sur la figure 3.18 que l'évolution de la répartition de l'EE tend à s'uniformiser au fil des itérations. Au départ, l'erreur est importante sur tout le maillage et non homogène. La première itération conduit à une réduction de l'erreur mais la répartition reste hétérogène. Cette hétérogénéité est visible sur le graphique 3.20, qui représente l'évolution du coefficient de variation cv en fonction du nombre d'éléments, où on observe une brusque augmentation du coefficient de variation. Ensuite, la répartition de l'EEE s'uniformise accompagnée d'une réduction de l'erreur globale η_G , de l'écart type *s* et du coefficient de variation cv. Ce dernier semble tendre vers une asymptote horizontale. La distribution d'erreur étant devenue presque homogène, la méthode d'adaptation n'effectue plus que des modifications de faible ampleur, il faudrait donc désormais utiliser un h-raffinement uniforme si l'on souhaite réduire plus rapidement l'erreur.

D'un point de vue physique, le phénomène à prendre en compte est l'effet de peau dans la plaque. On observe sur la figure 3.22 en effet la décroissance de la densité de courant dans la plaque tout au long de sa progression à travers celle-ci. Sans méthode automatique d'adaptation de maillage, par expérience, il faudrait mailler finement la zone de la plaque proche de la surface. On observe sur la figure 3.19, qui représente les maillage à chaque itération d'adaptation, que c'est exactement ce qu'il se produit. Le maillage de départ est le plus grossier possible. Puis, progressivement, la zone dans laquelle on observe l'effet de peau se raffine de plus en plus, laissant relâchées les autres mailles de plaque. De même, on constate un raffinement croissant de la bobine de manière à prendre en compte la variation linéaire du champ magnétique H.

FIGURE 3.18 – Effet de peau 1D : Cartes d'estimation d'erreur équilibré par itération ; l'échelle colorimétrique, qui est celle du maillage initial, est identique pour toutes les cartes



FIGURE 3.19 – Effet de peau 1D : Maillages par itération ; en bleu : l'air, en rouge : la plaque ; en orange : la bobine



FIGURE 3.20 – Effet de peau 1D : Évolution de l'écart-type de l'EEE (en haut) ; évolution du coefficient de variation de l'EEE (en bas)



FIGURE 3.21 – Effet de peau 1D : Évolution de l'EE équilibré global



FIGURE 3.22 – Effet de peau 1D : Partie réelle et imaginaire de la composante non nulle du champ H (en haut) et du champ J (en bas) tracées selon l'axe x. Les champs calculés sur le maillage initial sont en rouge, ceux de la dernière itération sont en vert, les étapes intermédiaires sont en bleu et la solution exacte en gris.



3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, une méthode de calcul de carte de taille a été présentée. Elle relie l'estimation d'erreur locale η_T de chaque élément *T* à ses caractéristiques géométriques avec pour objectif de répartir uniformément l'erreur dans le maillage. La carte de taille ainsi obtenue est ensuite traitée par le logiciel MMG afin d'opérer le remaillage.

La méthode d'adaptation de maillage a ensuite été appliquée sur deux exemples simples. Pour chacun des cas, il en a résulté une uniformisation de l'erreur, après l'adaptation de maillage, accompagnée d'une diminution de l'erreur globale.

Chapitre 4

Applications industrielles

Dans ce chapitre, nous nous proposons de tester la méthode d'adaptation de maillage par carte de taille développée dans le chapitre précédent sur des cas industriels de Contrôle Non Destructif (CND) par Courants de Foucault (CF). Dans un premier temps nous rappellerons en quoi consiste le CND CF. Ensuite on présentera les résultats de la méthode d'adaptation de maillage appliquée au problème 8 des Testing Electromagnetic Analysis Methods (TEAM) puis au problème 2 de la COnfédération FRançaise pour les Essais Non Destructifs (COFREND).

4.1 Adaptation de maillage pour le CND

4.1.1 Présentation du CND par courants de Foucault

Le Contrôle Non Destructif (CND) par Courants de Foucault (CF) [Zaoui et al., 2010][Louaayou et al., 2006][Bouzidi et al., 2012] est utilisé pour détecter et analyser les défauts des matériaux conducteurs. La sonde est formée :

- d'une bobine émettrice qui est parcourue par un courant périodique qui génère un champ électromagnétique variable en temps,
- d'une bobine réceptrice qui capte le champ créé par la bobine émettrice ainsi que la réponse du matériau conducteur. La bobine émettrice génère un champ variable qui va induire, dans le matériau conducteur à tester, des courants de Foucault. Ces courants de Foucault vont induire un champ de réaction qui va être capté par la bobine réceptrice

La tension *V* induite aux bornes de la bobine réceptrice constitue le signal de sortie de la sonde

$$V = j\omega\Phi \tag{4.1}$$

avec Φ le flux capté par la bobine réceptrice. On peut signaler que pour certaines sondes, les bobines émettrice et réceptrice peuvent être une et même bobine. L'expres-

sion du flux magnétique Φ capté par la bobine réceptrice est

$$\Phi = \int_D \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} dV \tag{4.2}$$

où A représente le potentiel vecteur magnétique et N représente le vecteur unitaire donnant la répartition de la densité de courant dans la bobine réceptrice traversée par un courant i sous la forme

$$J = iN \tag{4.3}$$

On peut montrer que la relation précédente (4.2) s'écrit aussi [Le Ménach et al., 2000] :

$$\Phi = \int_D \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{K} dV \tag{4.4}$$

avec K tel que

$$\operatorname{rot}(K) = N. \tag{4.5}$$

Cette expression permet de calculer le flux dans le cas de la formulation $T - \Omega$ alors que (4.2) permet de déterminer le flux dans le cas de la formulation $A - \varphi$. On obtient ainsi

$$\Phi_{A-\varphi} = \int_D A \cdot N \, dV \tag{4.6}$$

$$\Phi_{T-\Omega} = \int_{D} \mu(H_s - \operatorname{grad}(\Omega)) \cdot K dV$$
(4.7)

Si la pièce à tester ne possède pas de défauts (fissures) alors, le déplacement de la sonde ne provoquera pas de variation du signal de sortie du capteur puisque le matériau est homogène. Par contre, s'il y a un défaut, celui ci n'étant pas conducteur, il y aura une modification de la circulation des courants de Foucault du fait que le matériau n'est plus homogène. Cela conduit alors à une modification du champ de réaction, créé par les courants de Foucault, et donc du flux capté par la bobine réceptrice provoquant ainsi une variation de la tension de sortie. Cette variation, qui est fonction du déplacement de la sonde, va dépendre de la forme du défaut et constitue ce que l'on appelle sa signature. L'idée est alors d'exploiter cette signature de façon à remonter à la forme du défaut afin de pouvoir évaluer le risque de perforation ou de rupture de la pièce dû au défaut.

Il faut donc être capable de mettre en place une base de données permettant de faire le lien entre les différents défauts possibles et leurs signatures de manière à pouvoir, par une méthode inverse, déterminer le défaut en fonction de la signature mesurée. Pour établir cette base de données, on peut procéder expérimentalement en testant des échantillons avec des défauts parfaitement connus et calibrés. Cela peut entrainer des coûts importants en matériel, qui d'ailleurs est peu flexible (si l'on souhaite tester de nouveaux types de défauts ou de sondes il faut de nouveau les fabriquer, ce qui coûte du temps et de l'argent). La base de données peut aussi être construite par simulations afin de faire correspondre un défaut à sa signature. L'utilisation d'un modèle numérique est beaucoup plus rapide et beaucoup plus souple. Cela permet aussi de simuler de nombreux types de défauts et de sondes. Il s'avère néanmoins, pour ce type de problème, que l'erreur numérique est souvent du même ordre de grandeur que la quantité d'intérêt, qui est la tension aux bornes de la bobine réceptrice (*i.e.* le flux). Il est donc nécessaire de mettre en place une procédure qui permet d'une part d'évaluer l'erreur numérique et d'autre part de pouvoir la réduire de manière contrôlée. Nous nous proposons de mettre en œuvre la procédure d'adaptation de maillage basée sur les outils et méthodes que nous avons présentées dans les chapitres précédents.

La génération d'un maillage efficace, pour une étude par la MEF, peut occuper la moitié du temps total de celle-ci. C'est particulièrement vrai lorsqu'une très bonne précision est requise. L'augmentation du nombre d'éléments, qui va de paire avec l'augmentation de la précision, peut conduire à un processus de maillage nécessitant plus de ressources que celles disponibles pour le calcul. Ainsi, nous proposons de mettre en place une méthode limitant au maximum le nombre d'éléments et d'itérations pour la construction du maillage adapté.

4.1.2 Spécificité de la modélisation CND

L'une des spécificités de la modélisation d'une étude de CND CF est la prise en compte du balayage du matériau conducteur par la sonde. Ainsi, on peut être amené à générer plusieurs maillages : un par position de la sonde. Une autre de ses spécificités est la possibilité d'une faible amplitude du signal de la sonde (c'est le cas lorsque l'on observe un flux différentiel). On constate, dans certains cas, que cette amplitude est alors de l'ordre de grandeur de l'erreur numérique comme cela a été signalé précédemment. On obtient alors un signal simulé très bruité qui n'est pas nécessairement exploitable.

Pour pallier cette difficulté, on procède à un débruitage. Le processus s'effectue en deux temps : un premier calcul sur le maillage avec défaut où la fissure est représentée par un matériau non conducteur et non magnétique, et un second calcul sur le même maillage mais en ne prenant pas en compte le défaut (le matériau non conducteur est alors remplacé par les caractéristiques du matériau de la pièce que l'on cherche à tester) (cf. figures 4.1 et 4.2). On effectue ces deux calculs pour différentes positions de la sonde. Une fois ces deux calculs effectués, on retranche le flux capté par la sonde avec défaut (a.d.) au flux calculé sans défaut (s.d.). L'expérience montre que le résultat obtenu est un signal de meilleure qualité, limitant le bruit de maillage.

 $\sigma_{\rm mat{\acute e}riau}$

 $\mu_{
m mat{\acute e}riau}$



4.1.3 Estimateur d'erreur

Défaut

 $\sigma = \sigma_{\text{matériau}}$

 $\mu = \mu_{matériau}$

Nous avons introduit dans le chapitre 2 deux estimateurs d'erreur résiduel (cf. section 2.3.4 et un estimateur d'erreur équilibré (cf. section 2.3.3) tous trois dédiés à la magnétodynamique. Ces EE seront employés par la suite pour adapter le maillage. Il existe aussi un autre estimateur, basé sur une technique de débruitage qui permet de définir une variante de l'Estimateur d'Erreur Équilibré (EEE) : l'EEE Différentiel (EEED) [Krebs et al., 2009]. Cet estimateur nécessite la résolution des formulations $A - \varphi$ et $T - \Omega$ sur les maillages avec et sans défaut. L'expression de l'estimation locale est la suivante :

$$\eta_T^2 = \int_T \mu^{-1} \left\| \Delta \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{A}-\varphi} - \mu \Delta \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{T}-\Omega} \right\|^2 + \int_{\substack{T,\\T \in D_{c,h}}} (\sigma \omega)^{-1} \left\| \sigma \Delta \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{A}-\varphi} - \Delta \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{T}-\Omega} \right\|^2$$
(4.8)

où les champs sont calculés sur les maillages avec (a.d.) et sans (s.d.) défaut :

$$\Delta B_{A-\varphi} = B_{A-\varphi, \text{ a.d.}} - B_{A-\varphi, \text{ s.d.}} \qquad \Delta E_{A-\varphi} = E_{A-\varphi, \text{ a.d.}} - E_{A-\varphi, \text{ s.d.}}$$

$$\Delta H_{T-\Omega} = H_{T-\Omega, \text{ a.d.}} - H_{T-\Omega, \text{ s.d.}} \qquad \Delta J_{T-\Omega} = J_{T-\Omega, \text{ a.d.}} - J_{T-\Omega, \text{ s.d.}}$$
(4.9)

Cet estimateur permet en pratique de mieux isoler la variation de champ induite par l'introduction du défaut et donc de mieux orienter l'adaptation de maillage vers l'amélioration du calcul de la grandeur d'intérêt qui est la variation de la tension V (ou la variation de flux Φ) de la bobine émettrice due au défaut. Par contre, elle n'améliore pas nécessairement la qualité de la solution globale.

4.2 TEAM Problème 8

Nous nous proposons de traiter un premier cas de CND CF basé sur le TEAM Workshop 8 [TEAM 8, 1984], en mettant en oeuvre les outils developpées dans les chapitres précédents pour adapter au mieux le maillage.

4.2.1 Présentation

La géométrie du problème 8 est illustrée sur la figure 4.3. Le système se compose d'une plaque conductrice avec un défaut non traversant et d'une sonde. La sonde est constituée de trois bobines : une émettrice et deux réceptrices. On voit aussi une coupe de la sonde sur laquelle figure les deux flux des bobines réceptrices (figure 4.4). La quantité d'intérêt de l'étude est l'écart entre les flux magnétiques captés par les deux bobines réceptrices. En notant Φ_1 et Φ_2 les flux de ces deux bobines la quantité d'intérêt s'écrit donc

$$\Delta \Phi = \Phi_1 - \Phi_2. \tag{4.10}$$

On constate que lorsqu'il n'y a pas de défauts et si on se situe loin du bord de la plaque, les deux bobines réceptrices ont un comportement identiques ($\Phi_1 = \Phi_2$), le flux $\Delta \Phi$ est nul lors du déplacement de la sonde. Lorsqu'un défaut apparaît, leur comportement diffèrent, la grandeur d'intérêt $\Delta \Phi$ n'est plus nulle et va varier en fonction de la position. Le parcours de la sonde au-dessus de la plaque permet de déterminer une signature du défaut. Chaque point de la signature est la valeur complexe de la quantité d'intérêt en une position du parcours de la sonde. Autrement dit, les coordonnées d'un point de la signature représentent les parties réelle et imaginaire de la variation de flux $\Delta \Phi$.

Le parcours choisi est schématisé sur la figure 4.4; il commence en P_0 au-dessus du milieu du défaut (le rectangle rouge) et se termine en P_{25} (il y a donc 26 positions). Afin de simuler la signature, un maillage est réalisé pour chacune de ces positions. Ils seront ensuite adaptés indépendamment les uns des autres. Les estimateurs utilisés pour guider l'adaptation de maillage sont les Estimateurs d'Erreur Résiduels (EER) $A - \varphi$ (cf. section 2.3.4.3) et $T - \Omega$ (cf. section 2.3.4.4) ainsi que l' Estimateur d'Erreur Équilibré (EEE) (cf. section 2.3.3.2) et l'EEE Différentiel (EEED) (cf. section 4.1.3).



FIGURE 4.3 – TEAM problème 8 : Géométrie du système et conditions aux limites

FIGURE 4.4 – TEAM problème 8 : Positions de la sonde



4.2.2 Résultats

Le signal initial calculé par la formulation $A - \varphi$ (resp. $T - \Omega$) est tracé en trait plein (resp. pointillé) et en vert sur la figure 4.5. On y observe un écart important entre la



FIGURE 4.5 – TEAM problème 8 : Signal débruité (itération 0) ; maillages initiaux

formulation $A - \varphi$ et la formulation $T - \Omega$ qui représente une image de l'erreur numérique. On constate que cette erreur, caractérisée par l'écart entre les deux formulations, est du même ordre de grandeur que les grandeurs mesurées. L'adaptation de maillage se fait en utilisant chacun des quatre estimateurs, qui sont

- l'EER $A \varphi$, nécessitant la résolution de la formulation $A \varphi$
- l'EER $T \Omega$, nécessitant la résolution de la formulation $T \Omega$,
- l'EEE, nécessitant la résolution des formulations $A \varphi$ et $T \Omega$
- l'EEED, nécessitant la résolution des formulations $A-\varphi$ et $T-\Omega$ sur deux maillages : l'un avec le défaut et l'autre sans le défaut.

Les signaux obtenus après une itération d'adaptation, pour chacun des quatre estimateurs utilisés dans la conception de la carte de taille, sont tracés sur les figures 4.6, 4.7, 4.8 et 4.9.

Après une itération d'adaptation, quelque soit l'EE utilisé, on constate que la boucle apparaissant dans le cas de la formulation $T - \Omega$ avec le maillage initial disparaît. L'EE qui conduit à un écart minimum entre les signaux des deux formulations dès la première itération est l'EEED, laissant supposer que cet estimateur est le plus performant. Ensuite, c'est l'EER $A - \varphi$ qui donne de bons résultats. Les deux autres (EER $T - \Omega$ et EEE) ne sont pas très efficaces puisqu'on obtient encore un écart important entre les deux formulations. Cet écart après adaptation peut s'expliquer par le fait que l'EER

1.0<mark>1e-9</mark> 0.8 0.6 2 0.4 0.2 0.0 -0.2 0 2 4 6 1e-10 Re $A-\varphi$, ite 0 $A-\varphi$, ite 1, EER $A-\varphi$ • - $T-\Omega$, ite 0 $T{-}\Omega\text{, ite 1, EER }A{-}\varphi$ -

FIGURE 4.6 – TEAM problème 8 : Signal débruité, itération 1 avec l'EER $A-\varphi$; maillages initiaux et adaptés

FIGURE 4.7 – TEAM problème 8 : Signal débruité, itération 1 avec l'EER $T - \Omega$; maillages initiaux et adaptés



 $T - \Omega$ et l'EEE évaluent une erreur moins importante dans le matériau conducteur que l'EER *Ap* et l'EEED. Cela implique d'améliorer ou non le calcul des courants induits,

FIGURE 4.8 – TEAM problème 8 : Signal débruité, itération 1 avec l'EEE; maillages initiaux et adaptés



FIGURE 4.9 – TEAM problème 8 : Signal débruité, itération 1 avec l'EEED; maillages initiaux et adaptés



L'énergie magnétique et les pertes par effet Joule calculées par les formulations $A - \varphi$ et $T - \Omega$ en fonction de la position de la sonde sont reportées figure 4.10. Les courbes affichées sont celles des maillages initiaux et des maillages adaptés, une fois, par chacun des EE. L'adaptation de maillage permet la convergence en énergie quel que soit l'EE. En effet, l'écart entre formulation diminuent de manière drastique dès la première itération pour tous les EE utilisés.

Intéressons-nous maintenant à la répartition de l'erreur et vérifions si celle-ci est plus homogène une fois l'adaptation de maillage effectuée, qui est aussi l'un des objectifs recherché par la méthode d'adaptation de maillage. On considère pour cela l'écarttype empirique *s* et la moyenne empirique η_m de l'estimation d'erreur sur chacun des éléments :

$$\eta_m = \frac{1}{n_E} \sum_{T \in \mathcal{E}} \eta_T \tag{4.11}$$

$$s^{2} = \frac{1}{n_{E}} \sum_{T \in \mathcal{E}} (\eta_{T} - \eta_{m})^{2}$$
(4.12)

L'écart type quantifie l'écart à la moyenne. Effectivement, celui-ci nous donnera une image de la variabilité de l'erreur sur le maillage ; plus l'écart type sera faible plus nous pourrons considérer une répartition d'erreur uniforme, ce qui est le but recherché. Cependant, pour comparer des cartes d'erreur qui n'ont pas la même valeur moyenne, il est préférable d'observer le coefficient de variation cv qui représente sous forme réduite la variabilité autour de la moyenne :

$$cv = \frac{s}{\eta_m}.$$
(4.13)

On a reporté dans le tableau 4.1 les valeurs de l'estimation d'erreur globale η_G , σ et cv pour les itérations 0 et 1. On constate tout d'abord une réduction de l'EE globale η_G d'un facteur 3 à 6, selon l'EE, confirmant ici l'efficacité de la procédure de remaillage. De plus, le coefficient de variation diminue. On constate que pour l'EER $A-\varphi$ et l'EEED il est divisé par au moins 2. Ainsi, en plus de réduire l'erreur, la procédure d'adaptation permet de l'homogénéiser sur l'ensemble du maillage.

Intéressons nous maintenant au gain que nous apporte cette adaptation de maillage. Théoriquement, l'erreur décroit avec l'augmentation du nombre d'éléments. Cette augmentation se fait uniformément sur tout le maillage où l'on procéde à un h-raffinement régulier. L'erreur décroit en suivant une pente de -1/3 en échelle logarithmique (l'erreur est inversement proportionnelle au cube du rayon maximum des sphères circonscrites aux éléments). Ainsi, si on considère notre maillage M_0 avec $E_{M0} = 35 \cdot 10^3$ éléments et que l'on souhaite réduire l'erreur à une valeur égale à celle obtenue après une itération en utilisant l'EEED *i.e.* $\eta_G^{M_1} = 4.88 \cdot 10^{-5}$ alors, d'après ce qui précède sur la vitesse de convergence dans le cas d'un maillage uniforme,

$$E_{M_1} = \left(\frac{\eta_G^{M_1}}{\eta_G^{M_0}}\right)^{-3} E_{M_0}.$$
(4.14)

On obtient donc $3 \cdot 10^6$ éléments à comparer aux $5 \cdot 10^5$ éléments nécessaires dans le cas du maillage adapté.

Pour conclure, la procédure d'adaptation de maillage que nous proposons permet, comme le montre cet exemple, non seulement d'améliorer la qualité de la solution tout en limitant l'accroissement du nombre d'éléments, mais aussi d'améliorer la répartition de l'erreur sur l'ensemble du maillage.

Itáration 0						
	$EERA - \varphi$	$\mathrm{EER} T - \Omega$	EEE	EEED		
nombre d'éléments E_{M_0}	$35 \cdot 10^3$					
η _G	225.06	$1.44 \cdot 10^{-1}$	$7.89 \cdot 10^{-3}$	$2.15 \cdot 10^{-4}$		
S	1.19	$7.14 \cdot 10^{-4}$	$3.87 \cdot 10^{-5}$	$1.65 \cdot 10^{-5}$		
coeff. var.	7.04	2.61	2.33	137		
Itération 1						
	EERA – φ	$\mathrm{EER}\boldsymbol{T} - \boldsymbol{\Omega}$	EEE	EEED		
nombre d'éléments E_{M_1}	$375 \cdot 10^{3}$	$280 \cdot 10^{3}$	$300 \cdot 10^{3}$	$500 \cdot 10^{3}$		
η _G	67.34	$2.47 \cdot 10^{-2}$	$2.02 \cdot 10^{-3}$	$4.88\cdot10^{-5}$		
S	0.11	$3.82 \cdot 10^{-5}$	$3.03 \cdot 10^{-6}$	$1.27 \cdot 10^{-6}$		
coeff. var.	3.48	1.44	1.40	53.8		

TABLE 4.1 – TEAM problème 8 : Statistiques des EE



FIGURE 4.10 – TEAM problème 8 : pertes par effet Joule (en haut) et énergie magnétique (en bas) en fonction de la position de la sonde

4.3 COFREND Problème 2

Le problème 2 de la COFREND [Maurice et al., 2014][COFREND, 1967] est le second cas de CND CF que nous allons traiter. Des données expérimentales ainsi que des données de référence pour une simulation par Éléments Finis seront comparés aux résultats issus de l'adaptation de maillage.

4.3.1 Présentation

Le système est constitué d'une plaque d'inconel 600, d'une fissure dans cette plaque et d'une sonde à fonctions séparées. La sonde balaye la plaque en passant au milieu du défaut. La sonde (cf. figure 4.11) est constituée de deux bobines comprenant chacune



FIGURE 4.11 – COFREND problème 2 : Géométrie de la sonde

une ferrite cylindrique : une active et une réceptrice. Les dimensions de la plaque sont indiquées dans la figure 4.12, où la sonde est représenté aux positions initiale, centrale et finale. La position centrale sera appelée position O : le centre de l'entraxe des deux bobines est au-dessus du centre du défaut. Le système est au centre d'une boîte d'air, non visible sur la figure 4.12, mesurant 200 mm×200 mm×68.95 mm (soit respectivement 4 fois la largeur, 4 fois la longueur et 7 fois la hauteur de la plaque). La taille de la boîte d'air est assez grande pour considérer $B \cdot n = 0$ sur la frontière. La quantité d'intérêt est le flux magnétique Φ dans la bobine réceptrice. Lors de la mise en oeuvre pratique de la procédure de contrôle non destructif, une phase de calibrage est nécessaire.

Cette phase de calibrage consiste à effectuer un balayage sur un défaut de référence dont les dimensions sont données sur la figure 4.15. Ce balayage donne alors une va-



FIGURE 4.12 – COFREND problème 2 : Géométrie du système et conditions aux limites

riation du flux de la bobine réceptrice en fonction de la position comme celui donné sur la figure 4.13. On relève alors la grandeur $\Phi_{\max}^{réf}$ qui correspond à la valeur du flux Φ lorsque son module est maximal. La sonde est alors sur la position O. Ensuite, pour le défaut d'intérêt dont les dimensions sont données figure 4.16, on normalise le flux $\Phi^{intérêt}$ en fonction de la position *x* en travaillant sur

$$\Phi^{\text{cal}}(x) = \frac{\Phi^{\text{interet}}(x)}{\Phi^{\text{réf}}_{\text{max}}}$$
(4.15)

Cette quantité Φ^{cal} est la quantité d'intérêt que l'on cherche à calculer précisément en fonction de la position *x*.

Le balayage de la sonde est discrétisé en 41 positions. Nous avons remarqué qu'il était très important que les deux bobines aient un maillage initial identique. En effet, le bruit numérique introduit par une dissymétrie de maillage des bobines conduit à une déviation significative sur les résultats. Pour pallier cet effet, nous avons mis en place une procédure de maillage spécifique pour chaque position.



FIGURE 4.13 – Flux débruité de la bobine réceptrice ; défaut de référence.

FIGURE 4.14 – COFREND problème 2 : Bobine du maillage initial



Chaque position est maillée de la manière suivante :

1

- 1. génération d'un maillage hexaèdrique régulier pour les bobines (cf. figure 4.14), avec le même nombre d'hexaèdres dans chaque bobine
- 2. découpage de chaque hexaèdre en 5 tétraèdres.
- 3. génération d'un maillage tétraédrique libre pour le reste du maillage.

Mises à part les bobines, chaque partie du système n'est donc pas forcément maillée de manière identique sur chaque position. Durant le processus d'adaptation, chaque maillage de chaque position est entièrement adapté, indépendamment des autres positions.



FIGURE 4.15 – COFREND problème 2 : défaut de référence

FIGURE 4.16 – COFREND problème 2 : défaut d'intérêt



4.3.2 Résultats

4.3.2.1 Définition d'une référence

Afin de définir une référence permettant d'évaluer les résultats de l'adaptation de maillage, le logiciel métier C3D [Thomas and Goursaud, 2017], développé par EDF et dédié au contrôle non destructif par courants de Foucault, sera utilisé. Les formulations $A - \varphi$ et $T - \Omega$ sont résolues dans C3D. Les maillages peuvent être mixtes, *i.e.* comporter des hexaèdres, tétraèdres, pyramides, prismes. Le déplacement de la sonde est géré par la méthode du pas bloqué, le maillage est donc scindé en trois parties : la partie mobile contenant la sonde, la partie immobile contenant le matériau à tester et une partie tampon qui sera remaillé à chaque position (cf. figure 4.17).

On effectue un premier balayage avec C3D pour le défaut de référence pour déter-



FIGURE 4.17 – COFREND problème 2 : vue du système global

miner $\Phi_{\text{max}}^{\text{réf}}$. On calcule ensuite la quantité d'intérêt Φ^{cal} en O pour le défaut d'intérêt. Dans le tableau 4.2, on reporte le module et l'argument de Φ^{cal} obtenus par C3D avec les deux formulations et relevés expérimentalement.

L'écart, par rapport à l'expérience, sur l'argument du flux complexe est inférieur à 1°et l'écart relatif sur le module est inférieur à 8%. On observe sur la figure 4.18 l'évolution de la quantité d'intérêt Φ^{cal} , en fonction de la position de la sonde, mesurée et calculée par la formulation $T - \Omega$ (cette formulation a été choisi car elle donne un résultat plus proche de la mesure expérimentale que la formulation $A - \varphi$ cf. Tab. 4.2).

	Expérimental	C3D	
	_	$A - \varphi$	$T - \Omega$
Module	1.007	$9.205 \cdot 10^{-1}$	$9.357 \cdot 10^{-1}$
Argument	-16.11°	-16.86°	-16.60°

TABLE 4.2 – Module et argument de $\Phi^{cal}(O)$

On constate donc ici qu'un modèle éléments finis permet de bien représenter la réalité. Le maillage utilisé par C3D est très fin ($\approx 4.5 \cdot 10^6$ d'éléments, cf. 4.3; voir la figure 4.19 pour un aperçu de sa finesse) conduisant ainsi à des résultats très proches entre les deux formulations (cf. Tab. 4.2). On peut considérer que l'erreur numérique est

TABLE 4.3 – Nombre d'éléments dans les maillages calibrés par C3D dans le cas des défauts de références et d'intérêt.

	$\mathcal{M}_{ ext{intérêt}}^{ ext{C3D}}$	$\mathcal{M}_{ ext{reference}}^{ ext{C3D}}$
Nombre de nœuds	1 356 505	1 358 229
Nombre de tétraèdres	3983792	4003482
Nombre de pyramides	188544	188928
Nombre d'hexaèdres	589920	588640
Nombre total d'éléments	4762256	4781050

faible et donc on peut prendre ce modèle comme une référence. Nous comparerons donc les résultats obtenus par nos procédures de remaillage aux résultats de C3D. L'objectif est alors d'obtenir des résultats similaires avec un nombre beaucoup moins élevé d'éléments qui est ici de l'ordre de $4.5 \cdot 10^6$.



FIGURE 4.18 – Évolution de Φ^{cal} , en fonction de la position, mesuré expérimentalement et calculé par C3D

FIGURE 4.19 – Maillage calibré par C3D; défaut de référence



4.3.2.2 Adaptation de maillage

Quatre séries de maillages adaptés ont été réalisées. Chacune d'entre elles a été guidée par un estimateur d'erreur : EER $A - \varphi$, EER $T - \Omega$, EEE et EEED . Pour chacune de ces séries, on comparera les valeurs obtenues par le logiciel C3D à celles issues de l'adaptation de maillage. On s'intéressera plus particulièrement au module et à l'argument de la quantité d'intérêt Φ^{cal} (cf. équation (4.15)) évaluée sur la position O.

Comme nous l'avons vu précédemment, il est nécessaire d'effectuer une normalisation du flux pour déterminer la grandeur d'intérêt Φ^{cal} . On rappelle que le coefficient de normalisation $\Phi_{max}^{réf}$ correspond à la valeur maximale du flux capté par la sonde lors de son balayage au dessus de la plaque avec le défaut de référence. Nous avons donc réalisé un balayage avec le maillage initial selon l'axe (*Ox*) et (*Oy*) passant au dessus



FIGURE 4.20 – Balayage de la sonde suivant (Ox) et (Oy)

du défaut (cf. figure 4.20).

On constate que le flux ayant la norme maximale est obtenu pour la position O lorsque l'entraxe de la sonde est au milieu du défaut. Cette valeur $\Phi_{max}^{réf}$ est importante car elle joue un rôle dans le calcul de la grandeur d'intérêt Φ^{cal} (cf. équation (4.15)). Il sera nécessaire, lors de la phase de remaillage, d'adapter le maillage du problème :

– lorsque la sonde est placée sur la position O avec le défaut de référence pour calculer $\Phi_{\max}^{réf}$

 pour toutes les positions de la sonde lors d'un balayage avec le défaut d'intérêt ce qui permet de déterminer

$$\Phi^{\rm cal}(x) = \frac{\Phi^{\rm intérêt}(x)}{\Phi^{\rm réf}_{\rm max}}$$
(4.16)

Le processus d'adaptation de maillage est schématisé sur la figure 4.21

L'évolution du module de Φ^{cal} par itération d'adaptation (cf. figure 4.22) montre une nette convergence, quelle que soit la formulation ou l'estimateur, vers la valeur du module obtenu par le logiciel C3D. Ensuite, il n'y a guère d'amélioration obtenue avec la seconde itération, laissant supposer que l'on pourrait arrêter l'adaptation de maillage à la première itération. Pour tous les estimateurs utilisés, l'écart relatif sur le module est inférieur au seuil d'erreur relative de 5% dès la première itération. Le meilleur résultat, 1%, est obtenu en utilisant l' EER $A - \varphi$ (voir Tab. 4.4, premier sous tableau).

L'évolution de l'argument de la quantité d'intérêt, initialement et à la première itération, (cf. figure 4.23) montre que la formulation $A - \varphi$ ne permet pas d'atteindre la valeur de référence aussi bien que la formulation $T - \Omega$.

On a reporté sur la figure 4.24 le signal de la quantité d'intérêt calculé par la formulation $A - \varphi$ et $T - \Omega$ dans le cas d'une adaptation de maillage guidée par l'EEED. On



FIGURE 4.21 – COFREND Problème 2 : Processus d'adaptation de maillage. $M_i^{type}(x)$ est le maillage de l'itération *i* pour le défaut *type* avec la sonde sur la position *x*.

observe une nette améliorations de ces signaux, qui se rapprochent tous deux considérablement du signal de référence de C3D, ce qui permet de conclure sur l'efficacité de la méthode d'adaptation de maillage.

4.3.3 Conclusion

La méthode d'adaptation de maillage a été appliqué à un cas de CND CF. Quatre séries de maillages adaptés ont été réalisées. Les estimateurs résiduels et équilibrés ont été utilisés pour guider ces différentes adaptations. Tous les EE ont permis la convergence du module de la quantité d'intérêt vers la valeur de référence, et cela dès la première itération. L'argument de la quantité d'intérêt converge dans tous les cas. La formulation $T - \Omega$ donne de meilleurs résultats que la formulation $A - \varphi$, sur des maillages identiques. Les maillages obtenus par la méthode contiennent jusqu'à 15 fois moins d'éléments que le maillage de référence pour une erreur relative, sur la quantité d'intérêt, inférieure à 3%.

FIGURE 4.22 – Module de φ sur la position O au cours de l'adaptation utilisant respectivement de haut en bas et de gauche à droite l'EER $A - \varphi$, l'EER $T - \Omega$, l'EEE, et l'EEED



FIGURE 4.23 – Argument de Φ^{cal} sur la position O au cours de l'adaptation utilisant respectivement de haut en bas et de gauche à droite l'EER $A - \varphi$, l'EER $T - \Omega$, l'EEE, et l'EEED




FIGURE 4.24 – Signal, dans le plan complexe, de Φ^{cal} pour une itération d'adaptation guidée par l'EEED

TABLE 4.4 – Résultats de l'adaptation de maillage en position O pour les estimateurs résiduels ($A - \varphi$ et $T - \Omega$ dans le même sous tableau) et équilibrés. Écart relatif sur le module. Écart absolu sur l'argument.

– EER –								
Itération :	0		1		2			
Formulation :	$A - \varphi$	$T - \Omega$	$A - \varphi$	$T - \Omega$	$A - \varphi$	$T - \Omega$		
Nombre d'éléments	$50 \cdot 10^3$	$50 \cdot 10^{3}$	$250 \cdot 10^3$	$280 \cdot 10^{3}$	$1 \cdot 10^{6}$	$1 \cdot 10^{6}$		
Module	1.163	0.780	0.911	0.961	0.901	0.905		
Écart relatif	26.4%	16.6%	1.0%	2.7%	2.1%	3.3%		
Argument	-23.90°	-18.44°	-19.56°	-16.61 °	-19.24°	-17.18 °		
Écart absolu	7.04°	1.84°	2.70°	0.74°	2.38°	0.79°		
— EEE —								
Itération :	0		1		2			
Nombre d'éléments	$50 \cdot 10^3$		$260 \cdot 10^3$		$600 \cdot 10^{3}$			
Formulation :	$A - \varphi$	$T - \Omega$	$A - \varphi$	$T - \Omega$	$A - \varphi$	$T - \Omega$		
Module	1.163	0.780	0.899	0.955	0.922	0.934		
Écart relatif	26.4%	16.6%	2.3%	2.1%	0.2%	0.2%		
Argument	-23.90°	-18.44°	-19.9°	-16.9°	-19.5°	-17.6°		
Écart absolu	7.04°	1.84°	3.04°	0.30°	2.64°	1.00°		
_ EEED -								
Itération :	0		1		2			
Nombre d'éléments	$50 \cdot 10^3$		$370 \cdot 10^3$		$800 \cdot 10^{3}$			
Formulation :	$A - \varphi$	$T - \Omega$	$A - \varphi$	$T - \Omega$	$A - \varphi$	$T - \Omega$		
Module	1.163	0.780	0.940	0.950	0.954	0.957		
Écart relatif	26.4%	16.6%	2.1%	1.5%	3.7%	2.3%		
Argument	-23.90°	-18.44°	-19.40°	-17.55°	-19.18°	-17.45°		
Écart absolu	7.04°	1.84°	2.54°	0.95°	2.32°	0.85°		

Conclusion

La présente thèse a traité d'adaptation de maillage appliquée à l'analyse de dispositifs de CND CF par la méthode des éléments finis. La conception d'un maillage répondant à des critères strictes de précision numérique peut occuper jusqu'à 50% du temps de l'étude. En effet, l'expertise en Élément Finis peut être insuffisante pour des cas à géométrie complexe. L'objectif principal de la thèse est la conception et l'application de méthodes automatiques d'adaptation de maillage guidées par des estimateurs d'erreur garantissant ainsi un contrôle sur la précision numérique.

Tout d'abord, le premier chapitre installe le formalisme de la modélisation de problèmes d'électromagnétisme basse fréquence et plus particulièrement, les formulations en potentiels vecteur et scalaire $A - \varphi$ et $T - \Omega$ qui sont implémentées dans le logiciel éléments finis 3D code_Carmel [LAMEL, 1998].

Ensuite, le deuxième chapitre présente les outils qui ont servi de base au développement de méthodes d'adaptation de maillage. Dans un premier temps, un état de l'art sur les estimateurs d'erreurs *a posteriori* dédiés à l'électromagnétisme a été réalisé. Ces EE sont utilisés pour évaluer la qualité numérique d'une solution d'un problème Éléments Finis. Dans un deuxième temps, un état de l'art sur les techniques de raffinement de maillage a été réalisé. Ils permettent d'apporter des modifications, le plus souvent géométriques, au maillage afin d'améliorer la qualité de la solution. Ce chapitre conclut sur la technique qui aura été retenue, à savoir : le hr-raffinement piloté par carte de taille.

La méthode centrale de cette thèse est présentée dans le chapitre 3. On y explique son développement en partant de l'expression même de l'estimateur d'erreur jusqu'à la construction de la carte de taille. L'estimateur qui a été choisi pour ce développement est l'EEE car il est proportionnel à l'erreur globale. Son expression locale, par élément, est mise en relation avec les caractéristiques géométriques des éléments afin d'en déduire quelle serait leur taille idéale pour que l'erreur soit uniformément répartie à travers le maillage. Une fois cette carte de taille établie, elle est transmise à l'outil d'adaptation de maillage MMG [Inria, 2004] qui modifiera le maillage. La méthode est ensuite appliquée à des cas académiques.

Le dernier chapitre est consacré à l'application de la méthode sur des cas industriels. Il s'agit plus particulièrement de Contrôle Non Destructif par Courants de Foucault. On y présente tout d'abord le CND CF, ses spécificités en modélisation par la MEF et un estimateur d'erreur dédié à ce type de problème. L'objectif qui a été fixé pour le premier cas (TEAM Workshop 8) est la superposition des signaux calculés par les deux formulations $A - \varphi$ et $T - \Omega$. Les résultats de l'adaptation du deuxième cas, issus de la COFREND, sont comparés à ceux du logiciel métier C3D [Thomas and Goursaud, 2017] dédié au CND CF et aux mesures expérimentales réalisées par le CEA. La méthode appliquée aux deux cas de ce chapitre a donné de bons résultats et ce dès la première itération de l'algorithme d'adaptation.

Abordons maintenant les éventuelles perspectives suite à cette thèse. La méthode présentée au chapitre 3 ayant été testée principalement sur des cas de CND CF, on pourrait envisager son application sur d'autres dispositifs électriques tels que des transformateurs ou alternateurs. Cependant, si l'on souhaite observer le régime transitoire, et donc utiliser une résolution temporelle, il faudra enrichir le processus d'adaptation qui est exclusivement spatial.

Concernant la méthode en elle-même, on remarque qu'elle est basée sur une technique d'adaptation isotrope. Pour la faire évoluer sur une technique d'adaptation anisotrope, et donc avoir un maillage qui serait mieux adapté à la physique du problème (qui suivrait mieux les lignes de champs par exemple), on pourrait envisager une carte de taille basée sur la hessienne de l'estimateur d'erreur. Pour cela, il sera nécessaire d'augmenter le degré des fonctions de base.

On a pu observer dans le chapitre 3, dans le cas du cube de Rubinacci, que la méthode d'adaptation de maillage semblait être indépendante du maillage initial. Il serait intéressant de vérifier en détail dans quelle mesure les maillages adaptés sont semblables, pour différents maillages initiaux.

Annexe A

Éléments Finis

FIGURE A.1 – Élément de référence :



Fonction nodale au nœud i de l'élément de référence (cf. Fig. A.1) :

$$w_{i}(x, y, z) = \begin{cases} 1 - x - y - z, i = 1 \\ x & , i = 2 \\ y & , i = 3 \\ z & , i = 4 \end{cases}$$
(A.1)

TABLE A.1 – Table de connectivité nœuds/arêtes de l'élément de référence; les arêtes sont orientées du nœud n_d vers le nœud n_a

$$\begin{array}{c|cccc} {\rm n}^{\circ}{\rm d'ar{\rm \hat{e}te}} & n_d & n_a \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 4 \end{array}$$

Fonction d'arête sur l'arête *i* de l'élément de référence (cf. Tab. A.1 et Fig. A.1) : p° d'arête : 1 2 3 4 5 6

n°d'arête:

$$\begin{array}{c|c}
n°d'arête: \\
w_a(x,y,z) = \\
\begin{pmatrix}
1 & -y - z \\
x \\
x
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
y \\
1 - x - z \\
y
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
z \\
1 - x - y
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-y \\
z \\
1 - x - y
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-z \\
0 \\
x
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
0 \\
-z \\
y
\end{pmatrix}$$

Annexe B

Matrices d'incidence

B.1 Incidence noeud/arête

En partant de la définition de la fonction d'incidence (2.19) et en y injectant celle de la fonction d'arête (2.5), nous obtenons la relation

$$\operatorname{grad}(w_n) = \sum_{a \in \mathcal{A}} i(a, n) w_a.$$
(B.1)

Preuve : La définition de i(a, n) (2.19)permet de restreindre la somme de (B.1) au voisinage du noeud *n*. En notant $\mathcal{V}(n)$ les noeuds reliés à *n* par une seule arête, on obtient

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} i(a, n) w_a = \sum_{k \in \mathcal{V}(n)} \varepsilon \sigma i(A_{\sigma(kn)}, n) w_{A_{\sigma(kn)}}$$
(B.2)

avec σ la permutation qui prend en compte l'orientation de l'arête A_{ij} et ε sa signature. On utilise maintenant l'expression de A_{ij} (2.5)

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} i(a, n) w_a = \sum_{k \in \mathcal{V}(n)} \varepsilon(\sigma) i(A_{\sigma(kn)}, n) (w_{\sigma(k)} \operatorname{grad}(w_{\sigma(n)})) - w_{\sigma(n)} \operatorname{grad}(w_{\sigma(k)})).$$

En évaluant **grad**(w_n) sur chaque noeud de $\mathcal{V}(n)$ on obtient

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} i(a, n) w_a = \operatorname{grad}(w_n)$$
(B.3)

B.2 Incidence facette/arête

En partant de la définition de la fonction d'incidence (2.27) et en y injectant celle de la fonction de facette (2.10), nous obtenons la relation

$$\mathbf{rot}(w_a) = \sum_{f \in \mathcal{F}} i(f, a) w_f.$$
(B.4)

Preuve : La définition de i(f,a) (2.27) permet de restreindre la somme de (B.4) au voisinage de l'arête *a*, c'est à dire l'ensemble des facettes ayant en commun l'arête *a*. En notant $\mathcal{V}(a)$ les noeuds reliés à *a* par une seule facette, et *a* l'arête A_{mn} orientée du noeud N_m à N_n on obtient

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} i(f, a) w_f = \sum_{k \in \mathcal{V}(a)} \varepsilon \sigma i(F_{\sigma(kmn)}, a) w_{F_{\sigma(kmn)}}$$
(B.5)

avec σ la permutation qui prend en compte l'orientation de la facette $f = F_{kmn}$ et ε sa signature. On utilise maintenant l'expression de $w_{F_{kmn}}$ (2.10)

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} i(f, a) w_f = \sum_{k \in \mathcal{V}(a)} \varepsilon(\sigma) i(F_{\sigma(kmn)}, a) \cdot 2(w_k \operatorname{grad}(w_m) \times \operatorname{grad}(w_n) \\ + w_m \operatorname{grad}(w_n) \times \operatorname{grad}(w_k) \\ + w_n \operatorname{grad}(w_k) \times \operatorname{grad}(w_m)).$$

Par définition des fonctions nodales (A.1) on obtient

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} i(f, a) w_f = 2 \operatorname{grad}(w_m) \times \operatorname{grad}(w_n).$$
(B.6)

On va maintenant utiliser l'identité vectorielle (C.4) et la définition de w_a (2.5)) pour remonter au rotationnel de w_a :

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} i(f, a) w_f = 2 \operatorname{grad}(w_m) \times \operatorname{grad}(w_n)$$

$$= \operatorname{grad}(w_m) \times \operatorname{grad}(w_n) + \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(w_n)) w_m$$

$$= 0$$

$$- \operatorname{grad}(w_n) \times \operatorname{grad}(w_m) - \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(w_m)) w_n$$

$$= 0$$

$$= \operatorname{rot}(w_m \operatorname{grad}(w_n)) - \operatorname{rot}(w_n \operatorname{grad}(w_m))$$

$$= \operatorname{rot}(w_m \operatorname{grad}(w_n) - w_n \operatorname{grad}(w_m))$$

$$= \operatorname{rot}(w_a)$$

B.3 Incidence volume/facette

En partant de la définition de la fonction d'incidence (2.36) et en y injectant celle de la fonction de volume (2.15), nous obtenons la relation

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{w}_f) = \sum_{v \in \mathcal{E}} i(v, f) \, \boldsymbol{w}_v. \tag{B.7}$$

Annexe C

Formulaire

 $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u} \tag{C.1}$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{rot}(matru) - \boldsymbol{u} \cdot \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}) \tag{C.2}$$

$$\operatorname{div}(uv) = u\operatorname{div}(v) + \operatorname{grad}(u) \cdot v \tag{C.3}$$

$$rot(uv) = u rot(v) + grad(u) \times v$$
 (C.4)

$$\operatorname{div}(u\operatorname{grad}(v) \times \operatorname{grad}(w)) = \operatorname{grad}(a) \times \operatorname{grad}(b) \cdot \operatorname{grad}(c)$$
(C.5)

Annexe D

Formule de quadrature

Le tableau D.1 contient les points et poids d'intégration d'une formule de quadrature d'ordre 2 [Dhatt et al., 2012]. On rappelle l'expression de la formule d'intégration d'une fonction f sur le tétraèdre de référence :

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{1-x} \int_{0}^{1-x-y} f(x, y, z) dx dy dz = \sum_{i=1}^{n} p_{i} f(x_{i}, y_{i}, z_{i})$$
(D.1)

où *n* est le degré de la formule utilisée.

TABLE D.1 – Formule de quadrature à quatre points sur le tétraèdre de référence

i	(x_i, y_i, z_i)	p_i				
1	$(x_a, x_a, x_a)^{T}$	1/24				
2	$(x_a, x_a, x_b)^{T}$	1/24				
3	$(x_a, x_b, x_b)^{T}$	1/24				
4	$(x_b, x_a, x_b)^{T}$	1/24				
$x_a = (5 - \sqrt{5})/20 \approx 0.138$						
$x_b = (5 + 3\sqrt{5})/20 \approx 0.585$						

Annexe E

Sensibilité du paramètre hgrad

Afin d'évaluer l'impact du paramètre de gradation du logiciel MMG, plusieurs séries d'adaption de maillages ont été réalisées pour différentes valeurs de de ce paramètre. La solution exacte étant connue pour le cas de l'effet de peau 1D, on a reporté l'erreur relative obtenue à chaque itération pour chaque valeur de hgrad sur la figure E.1.

FIGURE E.1 – Convergences de l'erreur relative du cas académique de l'effet de peau 1D pour différentes valeurs de paramètre hgrad



Annexe F

Effet de peau 1D : Solutions analytiques

Le problème est invariant selon (\mathbf{O}, \mathbf{z}) et (\mathbf{O}, \mathbf{y}) . H est orienté selon (\mathbf{O}, \mathbf{z}) et J selon (\mathbf{O}, \mathbf{y}) . Les expressions analytiques des champs H, J, B et E sont données ci-dessous. Le terme non nul des champs H et B est non nul sera noté respectivement H_z et B_z . De même pour les champs E et J leur composante non nulle sera notée E_y et J_y .

$$H_{z}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x_{0} \leq x < x_{1} \\ -(x - x_{1})J_{s} \text{ si } x_{1} \leq x < x_{2} \\ -l_{b}J_{s} \text{ si } x_{2} \leq x < x_{3} \\ C_{1}e^{r_{1}(x - l_{c})} + C_{2}e^{r_{2}(x - l_{c})} \text{ si } x_{3} \leq x \leq x_{4} \end{cases}$$
(F.1)

$$J_{y}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x_{0} \leq x < x_{1} \\ J_{s} \text{ si } x_{1} \leq x < x_{2} \\ 0 \text{ si } x_{2} \leq x < x_{3} \\ -\left(r_{1}C_{1}e^{r_{1}(x-l_{c})} + r_{2}C_{2}e^{r_{2}(x-l_{c})}\right) \text{ si } x_{3} \leq x \leq x_{4} \end{cases}$$
(F.2)

$$B_{z}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x_{0} \leq x < x_{1} \\ -\mu_{0}l_{b}J_{s} \text{ si } x_{1} \leq x < x_{2} \\ -\mu_{0}l_{b}J_{s} \text{ si } x_{2} \leq x < x_{3} \\ \mu_{0}\left(C_{1}e^{r_{1}(x-l_{c})} + C_{2}e^{r_{2}(x-l_{c})}\right) \text{ si } x_{3} \leq x \leq x_{4} \end{cases}$$
(F.3)

$$E_{y}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x_{0} \leq x < x_{1} \\ 0 \text{ si } x_{1} \leq x < x_{2} \\ 0 \text{ si } x_{2} \leq x < x_{3} \\ -\sigma^{-1} \left(r_{1}C_{1}e^{r_{1}(x-l_{c})} + r_{2}C_{2}e^{r_{2}(x-l_{c})} \right) \text{ si } x_{3} \leq x \leq x_{4} \end{cases}$$
(F.4)

avec

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \qquad x_1 = 0.25, \qquad x_2 = 0.35, \qquad x_3 = 0.6, \qquad x_4 = 1, \\ l_c &= x_4 - x_3, \qquad l_b = x_2 - x_1, \\ \omega &= 2\pi f, \\ r_1 &= \frac{\sqrt{4\omega\mu_0\sigma}}{2} e^{i\pi/4}, \\ r_2 &= -r_1, \\ C_1 &= \frac{-0.1 J_s e^{0.4r_2}}{e^{0.4r_2} - e^{0.4r_1}}, \\ C_2 &= \frac{0.1 J_s e^{0.4r_1}}{e^{0.4r_2} - e^{0.4r_1}}. \end{aligned}$$



Bibliographie

- [Albanese and Rubinacci, 1990] Albanese, R. and Rubinacci, G. (1990). Magnetostatic field computations in terms of two-component vector potentials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29(3):515–532.
- [Babuška I. and Rheinboldt W. C., 1978] Babuška I. and Rheinboldt W. C. (1978). A-posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12(10):1597–1615.
- [Bank, 1986] Bank, R. E. (1986). A-posteriori error estimates. Adaptive local mesh refinement and multigrid iteration, pages 7–22. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- [Bank and Weiser, 1985] Bank, R. E. and Weiser, A. (1985). "some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations". *j-MATH-COMPUT*, 44(170):283– 301.
- [Bouzidi et al., 2012] Bouzidi, A., Maouche, B., Feliachi, M., and Berthiau, G. (2012). Pulsed eddy current non-destructive evaluation based on coupled electromagnetic quantities method. *EPJ Applied Physics*, 57(1).
- [Cendes and Shenton, 1985] Cendes, Z. and Shenton, D. (1985). Adaptive mesh refinement in the finite element computation of magnetic fields. *IEEE Transactions on Magnetics*, 21(5):1811–1816.
- [Chengjun Li et al., 1994] Chengjun Li, Zhuoxiang Ren, and Razek, A. (1994). An approach to adaptive mesh refinement for three-dimensional eddy-current computations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 30(1):113–117.
- [COFREND, 1967] COFREND (1967). Confédération française pour les essais non destructifs.
- [Creusé et al., 2015] Creusé, E., Nicaise, S., and Tittarelli, R. (2015). A guaranteed equilibrated error estimator for the A φ and T Ω magnetodynamic harmonic formulations of the Maxwell system. working paper or preprint.
- [Dhatt et al., 2012] Dhatt, G., Touzot, G., and Lefrançois, E. (2012). *Finite Element Method.* ISTE and WILEY.

- [Dufour, S. et al., 2001] Dufour, S., Vinsard, G., and Laporte, B. (2001). Mesh adaptation by modifying the node positions*. *Eur. Phys. J. AP*, 13(3):195–200.
- [Dular, 2009] Dular, P. (2009). A posteriori error estimation of finite element solutions via the direct use of higher order hierarchal test functions. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(3):1360–1363.
- [Dular et al., 2015] Dular, P., Le Ménach, Y., Tang, Z., Creusé, E., and Piriou, F. (2015). Finite element mesh adaptation strategy from residual and hierarchical error estimators in eddy current problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 51(3):1–4.
- [EDF, 1996] EDF (1996). Homard, a salome module for mesh adaptation.
- [Golias and Tsiboukis, 1993] Golias, N. A. and Tsiboukis, T. D. (1993). Adaptive refinement strategies in three dimensions. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(2):1886–1889.
- [Inria, 2004] Inria (2004). Mmg platform; robust, open-source & multidisciplinary software for remeshing. "www.mmgtools.org".
- [Jae Seop Ryu et al., 2001] Jae Seop Ryu, Yan Xiuke, Chang Seop Koh, Xie Dexin, and Song-Yop Hahn (2001). 3D adaptive finite element method with edge elements [for machine calculations]. In ICEMS'2001. Proceedings of the Fifth International Conference on Electrical Machines and Systems (IEEE Cat. No.01EX501), volume 2, pages 1174–1177 vol.2.
- [Krebs et al., 2009] Krebs, G., Abakar, A., and Clenet, S. (2009). Comparison of error estimators in eddy current testing. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(3):968–971.
- [LAMEL, 1998] LAMEL (1998). code_carmel, code avancé de recherche en modélisation electromagnétique.
- [Le Menach, 2012] Le Menach, Y. (2012). *Contribution à la modélisation numérique des phénomènes électromagnétique 3D en basse fréquence*. Hdr, Université Lille 1.
- [Le Ménach et al., 2000] Le Ménach, Y., Clénet, S., and Piriou, F. (2000). 3d compatible magnetostatic potential formulations coupled with electrical circuits. *COMPEL* -*The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 19(3):776–786.
- [Li et al., 1994] Li, C., Pichon, L., Ren, Z., and Razek, A. (1994). Modelling of a loaded cavity with automatic adaptive mesh refinement. In 1994 Second International Conference on Computation in Electromagnetics, pages 150–153.
- [Louaayou et al., 2006] Louaayou, M., Fouladgar, J., Saidi, T., and Berthiau, G. (2006). Electromagnetic stimulation in ndt thermography.
- [Marmin, 1998] Marmin, F. (1998). Contribution à l'étude des erreurs numériques dues à la méthode des éléments finis : application aux problèmes statiques d'électromagnétisme

2D. PhD thesis. Thèse de doctorat dirigée par Piriou, Francis Génie électrique Lille 1 1998.

- [Maurice et al., 2014] Maurice, L., Foucher, F., Sollier, T., Reboud, C., Deneuville, F., Trillon, A., and Thomas, P. (2014). Groupe de travail COFREND "modélisation du CND par Courants de Foucault" : Benchmarking pour la validation et la reconnaissance des codes de simulation. *Cofrend 2014*.
- [Nicaise, 2005] Nicaise, S. (2005). On zienkiewicz–zhu error estimators for maxwell's equations. *Comptes Rendus Mathematique*, 340(9):697 702.
- [Oden and Reddy, 1974] Oden, J. and Reddy, J. (1974). On dual-complementary variational principles in mathematical physics. *International Journal of Engineering Science*, 12(1):1 29.
- [Ren, 1996] Ren, Z. (1996). Auto-gauging of vector potential by iterative solvernumerical evidence. pages 119–124.
- [Ren et al., 2013] Ren, Z., Kalscheuer, T., Greenhalgh, S., and Maurer, H. (2013). A goal-oriented adaptive finite-element approach for plane wave 3-d electromagnetic modelling. *Geophysical Journal International*.
- [Ryo et al., 1997] Ryo, M., Vlatko, C., Kazufumi, K., and Hideo, Y. (1997). r-adaptive method for mesh improvements using directly magnetic flux density as an error norm estimator. *Applied Electromagnetics and Computational Technology, Proceedings* of the 4th Japan-Hungary Joint Seminar, 11:232–237.
- [Shewchuk, 2002] Shewchuk, J. R. (2002). What is a good linear finite element? interpolation, conditioning, anisotropy, and quality measures.
- [Tang et al., 2013] Tang, Z., Menach, Y. L., Creusé, E., Nicaise, S., Piriou, F., and Nemitz, N. (2013). Residual and equilibrated error estimators for magnetostatic problems solved by finite element method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 49(12):5715–5723.
- [TEAM 8, 1984] TEAM 8 (1984). Coil above a crack : A problem in non-destructive testing. www.compumag.org/jsite/images/stories/TEAM/probleme8.pdf.
- [Thomas and Goursaud, 2017] Thomas, P. and Goursaud, B. (2017). La simulation des CND-CF complexes à la portée des ingénieurs. *Cofrend 2017*.
- [Tittarelli et al., 2018] Tittarelli, R., Le Ménach, Y., Piriou, F., Creusé, E., Nicaise, S., and Ducreux, J. (2018). Comparison of numerical error estimators for eddy-current problems solved by fem. *IEEE Transactions on Magnetics*, 54(3):1–4.
- [Webb, 2010] Webb, J. P. (2010). A p -adaptive scheme for scalar fields, using highorder, singular finite elements. *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(8):3532–3538.

- [Zaoui et al., 2010] Zaoui, A., Menana, H., Feliachi, M., and Berthiau, G. (2010). Inverse problem in nondestructive testing using arrayed eddy current sensors. *Sensors*, 10(9):8696–8704.
- [Zienkiewicz and Zhu, 1987] Zienkiewicz, O. and Zhu, J. (1987). A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 24:337–357.
- [Zuqi Tang, 2012] Zuqi Tang (2012). Estimateurs d'erreur a posteriori résiduels en éléments finis pour la résolution de problèmes d'électromagnétisme en formulations potentielles. PhD thesis, Université Lille 1 Sciences et Technologies.

BIBLIOGRAPHIE

Application de techniques d'estimations d'erreur à l'analyse de dispositifs électromagnétiques basse fréquence

RESUME : Le contrôle non destructif par courants de Foucault est largement utilisé pour évaluer la santé de pièces faites de matériaux conducteurs. Cette méthode est facile à mettre en œuvre par contre le lien entre le signal de sortie du capteur de contrôle et le défaut au sein de la pièce n'est pas immédiat. Il est donc nécessaire d'avoir recours à la simulation pour établir une carte qui lie la forme du défaut au signal du capteur. La simulation est souvent basée sur la résolution des équations de la magnétodynamique en régime harmonique par la méthode de éléments finis. Il s'avère alors que le signal du capteur est de l'ordre de grandeur du bruit numérique. L'obtention de bons résultats nécessite alors l'utilisation d'un maillage très fin conduisant à des temps de calcul élevé empêchant une industrialisation de la méthode. Dans la thèse, nous proposons une méthode itérative couplant des estimateurs d'erreur numérique et des techniques d'adaptation de maillage par l'intermédiaire d'une carte de taille. Celle-ci permet d'établir un lien entre l'estimation d'erreur et les caractéristiques géométriques des éléments du maillage. Cette méthode permet d'obtenir automatiquement et en peu d'itérations un maillage adapté au problème traité à partir d'un maillage initial comportant peu d'éléments. Des exemples académiques et industriels ont été traités et montrent que la méthode permet d'obtenir des bons résultats avec des maillages adaptés comportant un nombre d'éléments beaucoup plus faible qu'avec une approche classique.

Mots clés : Adaptation de maillage, Estimation d'erreur, Contrôle non destructif

Application of error estimation techniques to the analysis of low frequency electromagnetic devices

ABSTRACT : Non-destructive eddy current testing is widely used to evaluate the health of parts made of conductive materials. This method is easy to implement however the relation between the output signal of the control sensor and the defect in the part is not straightforward. It is therefore necessary to use simulation to build a map that linking the shape of the defect to the sensor signal. The simulation is often based on the resolution of the equations of the magnetodynamics in the frequency domain by the finite element method. It turns out that the sensor signal is of the order of magnitude of the numerical noise. Obtaining good results then requires the use of a very fine mesh leading to high computation time preventing industrialization of the method. In the thesis, we propose an iterative method coupling numerical error estimators and mesh adaptation techniques through a size map. This map enables to link the error estimation and the geometric characteristics of the mesh element. This method makes it possible to obtain automatically and with few iterations an adapted mesh to the problem treated from an initial mesh with few elements. Academic and industrial examples have been treated and show that the method allows to obtain good results with adapted meshes with a much smaller number of elements than with the classical approach.

Keywords : Mesh Adaption, Error estimate, Non destructive testing



HESAM UNIVERSITÉ