

UNIVERSITÉ LILLE I  
ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES POUR  
L'INGÉNIEUR

Doctorat

Génie électrique

Abdelkader BENABOU

CONTRIBUTION À LA CARACTÉRISATION ET  
À LA MODÉLISATION DE MATÉRIAUX  
MAGNÉTIQUES EN VUE D'UNE  
IMPLANTATION DANS UN CODE DE CALCUL  
DE CHAMP

*Thèse dirigée par Mr. F. Piriou*

Soutenue le 16 Décembre 2002

**Devant le Jury composé de:**

Mme. A. Lebouc ...	Rapporteur
Mr. J.P. Masson ...	Rapporteur
Mr. J.A. Melkebeek	Examineur
Mr. J.P. Hautier ...	Examineur
Mr. S. Clénet .....	Examineur, Co-Directeur de Thèse
Mr. F. Piriou .....	Examineur, Directeur de Thèse



# Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse, Mr. le Professeur Francis Piriou, qui m'a accueilli au sein de son équipe au L2EP pour effectuer ces travaux de thèse. Je le remercie plus particulièrement pour sa confiance, compte tenu de ma formation initiale en Physique, pour mener à bien les objectifs que nous nous étions fixés.

De la même manière, je remercie Mr. le Professeur Stéphane Clénet, mon co-directeur de thèse, pour son encadrement de grande qualité, spécialement en ce qui concerne le travail scientifique, et ses qualités humaines.

D'autre part, ce travail de thèse ne serait pas ce qu'il est sans l'aide et les conseils de Jean-Jacques Franchaud, Ingénieur CNAM, qui m'a beaucoup apporté, notamment lors de la mise en place du banc expérimental.

Bien entendu, je n'oublie pas l'ensemble des doctorants du laboratoire qui ont contribué à entretenir une ambiance de travail dans la bonne humeur : Soufiane Taïbi, Thomas Henneron, Wahid Samet, Bogdan Vulturescu, Georges Marques, Joseph Pierquin, Sébastien Charlemagne, Hugo Sawezyn, Xavier Kestelyn, ... et le Technicien Olivier Ferla.

Enfin, je remercie Mr. le Professeur Philippe Lemoigne pour m'avoir donné l'opportunité d'effectuer des vacances à l'Ecole Centrale de Lille et Mr. Thierry Comunal, Professeur agrégé à l'USTL, pour l'aide qu'il m'a apporté dans la préparation des enseignements à l'USTL.



# Contribution à la caractérisation et à la modélisation de matériaux magnétiques en vue d'une implantation dans un code de calcul de champ

**Résumé :** Pour étudier les systèmes électromagnétiques on a de plus en plus recours à la modélisation numérique. Dans notre étude, nous nous sommes intéressés à la modélisation des matériaux ferromagnétiques utilisés dans les systèmes de conversion d'énergie électrique. La loi de comportement de ces matériaux, de nature hystérique, doit être prise en compte pour une modélisation plus fine. Ainsi, 3 matériaux (tôles FeSi, Ferrites et poudres de fer) ont été étudiés en régimes statique et dynamique. En régime statique, les modèles de Preisach et de Jiles-Atherton ont été comparés en terme de précision et de temps de calcul. Cette comparaison a été étendue à l'étude d'un système modélisé avec la méthode des éléments finis. En régime dynamique, deux modèles sont comparés : celui de Jiles-Atherton étendu à la dynamique et celui de l'équation de diffusion approximée en basse fréquence. Le premier est choisi pour une implantation dans le code éléments finis du laboratoire pour l'étude d'un transformateur.

**Mots clés :** Hystérésis magnétique, Preisach, Jiles-Atherton, régimes statique et dynamique, calcul de champ

**Discipline :** Génie électrique

---

L2EP, Bâtiment P2  
Université des Sciences et Technologies de Lille,  
59655 Villeneuve d'Ascq (FRANCE)



# Contribution to the characterization and the modelling of magnetic materials for an implantation in a field calculation code

**Abstract :** To study electromagnetic systems, numerical modelling is more and more used. In our study, we are interested in the ferromagnetic materials modelling used in electrical energy conversion systems. The hysteretical behavior law of these materials has to be taken into account for a more accurate modelling, especially for iron losses calculation. We have studied 3 kinds of materials (FeSi sheet steels, Ferrites and Iron Powder) in static and dynamic regimes. In the first case, the Preisach model and the Jiles-Atherton model have been compared in terms of accuracy and calculation time. This comparison has been extended to the study of a system modelled with the finite element method. In the dynamic regime, two models are compared : the frequency dependant Jiles-Atherton model and the diffusion equation approximated at low frequency. The first model, is chosen to be implemented in the laboratory finite element code to study a voltage transformer.

**Keywords :** Magnetic hysteresis, Preisach, Jiles-Atherton, static and dynamical behaviour, field calculation

**Discipline :** Electrical engineering

---

L2EP, Bâtiment P2  
Université des Sciences et Technologies de Lille,  
59655 Villeneuve d'Ascq (FRANCE)



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités</b>	<b>5</b>
1.1 Le modèle mathématique . . . . .	5
1.1.1 Equations de Maxwell . . . . .	5
1.1.2 Loi de comportement . . . . .	6
1.1.3 Les conditions aux limites . . . . .	7
1.2 Les formulations . . . . .	8
1.2.1 Les formulations de la magnétostatique . . . . .	8
1.2.1.1 La formulation en potentiel scalaire magnétique . . . . .	8
1.2.1.2 La formulation en potentiel vecteur magnétique . . . . .	9
1.2.2 Les formulations de la magnétodynamique . . . . .	10
1.2.2.1 La formulation en potentiels $A$ - $\varphi$ . . . . .	10
1.2.2.2 La formulation en potentiels $T$ - $\Omega$ . . . . .	11
1.2.2.3 Prise en compte de la loi de comportement non linéaire . . . . .	11
1.2.2.4 La formulation faible . . . . .	11
1.3 Résolution numérique . . . . .	12
1.3.1 Hypothèses 2D . . . . .	12
1.3.2 Discrétisation des inconnues . . . . .	13
1.3.3 Système matriciel . . . . .	14
1.4 Généralités sur les matériaux magnétiques . . . . .	15
1.4.1 Grandeurs magnétiques . . . . .	15
1.4.2 Le diamagnétisme . . . . .	16
1.4.3 Le paramagnétisme . . . . .	16
1.4.3.1 Approche microscopique . . . . .	17
1.4.3.2 Approche macroscopique . . . . .	18
1.4.4 Le ferromagnétisme . . . . .	20

1.4.4.1	L'anisotropie . . . . .	20
1.4.4.2	Approche microscopique avec l'énergie d'échange . . .	21
1.4.4.3	Approche macroscopique . . . . .	23
1.4.4.4	Configuration en domaines magnétiques [22] . . . . .	24
1.4.5	Mécanismes d'aimantation et hystérésis magnétique . . . . .	27
1.4.5.1	Approche macroscopique . . . . .	27
1.4.6	Classification des matériaux ferromagnétiques . . . . .	29
1.4.7	Les pertes dans la matière . . . . .	30
1.4.7.1	Expression générale des pertes . . . . .	31
1.4.7.2	Les pertes en régime statique . . . . .	31
1.4.7.3	Les pertes par dynamique de parois . . . . .	33
1.4.7.4	Les pertes par courants de Foucault . . . . .	35
1.5	Dispositif expérimental . . . . .	36
1.5.1	Matériaux étudiés . . . . .	36
1.5.2	Le banc expérimental . . . . .	38
<b>2</b>	<b>Etude des modèles statiques</b>	<b>41</b>
2.1	Introduction . . . . .	41
2.2	Présentation des Modèles . . . . .	42
2.2.1	Le modèle d'Ising . . . . .	42
2.2.1.1	Équation du modèle . . . . .	43
2.2.1.2	Introduction de l'agitation thermique . . . . .	45
2.2.1.3	Algorithme de programmation du modèle . . . . .	47
2.2.1.4	Premiers résultats . . . . .	50
2.2.1.5	Synthèse . . . . .	53
2.2.2	Le modèle de Preisach . . . . .	54
2.2.2.1	Définition . . . . .	54
2.2.2.2	Identification de la densité de Preisach . . . . .	56
2.2.2.3	Expression de l'aimantation à partir de la fonction d'Everett . . . . .	57
2.2.2.4	Détermination de la fonction d'Everett . . . . .	59
2.2.3	Le modèle de Jiles-Atherton . . . . .	59
2.2.3.1	Définition . . . . .	60
2.2.3.2	Résolution numérique du modèle . . . . .	63
2.2.3.3	Identification et optimisation des paramètres du mo- dèle de Jiles-Atherton . . . . .	67

2.3	Comparaison des modèles . . . . .	73
2.3.1	Procédures d'identification . . . . .	73
2.3.1.1	La fonction d'Everett . . . . .	73
2.3.1.2	Les paramètres du modèle de Jiles-Atherton . . . . .	76
2.3.2	Excitation sinusoïdale . . . . .	78
2.3.2.1	Pertes par hystérésis . . . . .	78
2.3.2.2	Evolution des champs rémanent et coercitif . . . . .	79
2.3.3	Excitation non sinusoïdale . . . . .	81
2.3.4	Etude de l'aspect calcul numérique . . . . .	84
2.3.4.1	Sensibilité numérique du modèle de Jiles-Atherton . . . . .	84
2.3.4.2	Temps de calcul . . . . .	85
2.4	Application à un système électromagnétique . . . . .	87
2.4.1	Système étudié . . . . .	87
2.4.2	Comparaison des résultats . . . . .	87
2.5	Synthèse . . . . .	91
<b>3</b>	<b>Etude des modèles dynamiques</b>	<b>95</b>
3.1	Introduction . . . . .	95
3.2	Modèle de Preisach étendu à la dynamique . . . . .	95
3.2.1	Théorie statistique de Bertotti . . . . .	96
3.2.2	Introduction du modèle de Preisach dynamique . . . . .	97
3.2.3	Discussion sur le modèle de Preisach dynamique . . . . .	98
3.3	Courants induits macroscopiques : équation de diffusion . . . . .	99
3.4	Modèle de Preisach dynamique et équation de diffusion . . . . .	100
3.5	Autres modèles . . . . .	101
3.5.1	Modèle du LEG . . . . .	101
3.5.2	Modèle de Preisach paramétré . . . . .	102
3.6	Le modèle dynamique de Jiles-Atherton . . . . .	102
3.6.1	Modèle original . . . . .	103
3.6.2	Extension au modèle $M(B)$ . . . . .	104
3.6.3	Résolution numérique des modèles . . . . .	105
3.6.4	Modèle dynamique de Jiles-Atherton et équation de diffusion . . . . .	106
3.7	Modèle de l'équation de diffusion basse fréquence pour les tôles . . . . .	107
3.8	Modèle dynamique pour des matériaux à facteur de forme inconnu . . . . .	109
3.8.1	Analyse . . . . .	109
3.8.2	Principe de la méthode pour la mesure de la conductivité . . . . .	110

3.8.3	Détermination de la résistivité par calcul de champ . . . . .	112
3.8.4	Mesures expérimentales . . . . .	113
3.9	Etude et comparaison des modèles dynamiques . . . . .	115
3.9.1	Identification . . . . .	115
3.9.1.1	Modèle dynamique de Jiles-Atherton . . . . .	115
3.9.1.2	Modèle de l'équation de diffusion basse fréquence . .	117
3.9.2	Restitution des cycles . . . . .	118
3.9.3	Estimation des pertes . . . . .	121
3.10	Applications en calcul de champ . . . . .	122
3.10.1	Application du modèle dynamique de Jiles-Atherton pour les tôles . . . . .	122
3.10.1.1	Système étudié . . . . .	122
3.10.1.2	Résultats . . . . .	123
3.10.2	Prise en compte de la conductivité dans le calcul de champ pour les poudres . . . . .	128
	<b>Conclusion générale</b>	<b>131</b>
	<b>A Hystérésis et fonction d'opposition</b>	<b>135</b>
	<b>B Identification de la fonction d'Everett</b>	<b>139</b>
B.1	Identification de la fonction d'Everett pour le modèle $M(H)$ . . . . .	139
B.2	Identification de la fonction d'Everett pour le modèle $M(B)$ . . . . .	143
	<b>C Modèle dynamique de Jiles-Atherton</b>	<b>145</b>
C.1	Modèle original $M(H)$ . . . . .	145
C.2	Développement du calcul pour un modèle $M(B)$ . . . . .	146

# Liste des tableaux

1.1	Susceptibilités de matériaux diamagnétiques à température ambiante.	16
1.2	Susceptibilités de matériaux paramagnétiques à température ambiante.	17
1.3	Températures de Curie pour quelques matériaux ferromagnétiques. . .	22
1.4	Caractéristiques physiques principales des matériaux étudiés. . . . .	37
2.1	Propriétés physiques des paramètres $\alpha, a, k, c$ et $M_{sat}$ . . . . .	64
2.2	Paramètres obtenus à partir des deux méthodes d'optimisation à 0,5 Hz. . . . .	74
2.3	Valeurs des paramètres pour le modèle de Jiles-Atherton. . . . .	78
2.4	Erreurs relatives maximum constatées sur l'estimation des pertes par hystérésis pour les 2 modèles (en %). . . . .	80
2.5	Temps de calcul pour les tôles FeSi (Station Digital DEC Alpha 500 à 400 MHz). . . . .	86
2.6	Comparaison des valeurs efficaces du courant entre expérience et calcul.	89
2.7	Evaluation des pertes par hystérésis par les 2 modèles. . . . .	90
2.8	Rapport des temps de calcul entre les 2 modèles (le temps de calcul du modèle de Jiles-Atherton a été pris comme référence pour chaque maillage). . . . .	91
2.9	Résumé des résultats . . . . .	92
3.1	Paramètres $D'_1$ et $D'_2$ calculés et optimisés. . . . .	116
3.2	Valeurs des paramètres pour le modèle dynamique de Jiles-Atherton.	116
3.3	Paramètre $\gamma$ calculé et optimisé. . . . .	117
3.4	Valeurs des paramètres pour le modèle de l'équation de diffusion basse fréquence. . . . .	118
3.5	Densité de pertes par hystérésis ( $W.Kg^{-1}$ ) à différentes fréquences pour $B_m = 1, 2$ et $1, 4$ Tesla. . . . .	121
3.6	Pertes fer totales en fonction de la fréquence pour $\Phi_{max} = 0,48 Wb$ . .	126
3.7	Pertes par courants induits dans la bobine à 60 Hz et 1 kHz ( $\Phi_{max} =$ $0,35 Wb$ ). . . . .	129



# Table des figures

1.1	Domaine d'étude. . . . .	7
1.2	Structure 2D à symétrie de translation. . . . .	13
1.3	Comportement diamagnétique. . . . .	16
1.4	Comportement paramagnétique. . . . .	17
1.5	Direction de facile aimantation des moments magnétiques atomiques selon les directions de la maille cubique. . . . .	21
1.6	Ordres ferromagnétique et paramagnétique des moments magnétiques atomiques. . . . .	22
1.7	Influence du paramètre $a$ sur la courbe anhystérétique. . . . .	24
1.8	Influence du paramètre $\alpha$ sur la courbe anhystérétique. . . . .	24
1.9	(a) Système avec aimantation uniforme (b) Structure en domaines avec aimantations antiparallèles. . . . .	25
1.10	Rotation des moments magnétiques dans une paroi de Bloch à $180^\circ$ . . . . .	26
1.11	A l'échelle macroscopique et sans champ extérieur, l'aimantation moyenne est nulle. . . . .	27
1.12	Cycle d'hystérésis, courbes de première aimantation et anhystérétique. . . . .	28
1.13	Les grandes classes de matériaux magnétiques industriels [21]. . . . .	29
1.14	Champ de blocage en fonction de la position $x$ de la paroi en champ extérieur croissant. . . . .	32
1.15	Apparition de courants induits locaux lors du déplacement de parois [23]. . . . .	32
1.16	Système de deux domaines séparés par une paroi à $180^\circ$ . . . . .	33
1.17	Apparition de courants induits dans les sections droites d'un échantillon torique et d'une plaque de tôle. . . . .	35
1.18	Gonflement du cycle d'hystérésis en régime dynamique. . . . .	36
1.19	Schéma synoptique du banc expérimental. . . . .	39
2.1	Réseau cristallin et moments magnétiques atomiques associés. . . . .	43
2.2	Moments magnétiques premiers voisins. . . . .	44

2.3	Exemple de variations d'énergie $\Delta E_i$ pour un moment magnétique $i$ .	46
2.4	État saturé positif. . . . .	48
2.5	État proche du point rémanent. . . . .	48
2.6	État intermédiaire à aimantation positive. . . . .	48
2.7	État proche du point coercitif. . . . .	49
2.8	État intermédiaire à aimantation négative. . . . .	49
2.9	État saturé négatif. . . . .	49
2.10	Influence du paramètre $J$ sur les champs coercitif et rémanent. . . . .	51
2.11	Influence du paramètre $\beta$ sur le champ rémanent. . . . .	51
2.12	Influence du pas $\Delta\theta$ sur la forme du cycle. . . . .	51
2.13	Simulation par le modèle d'Ising d'un cycle dans le cas des ferrites pour $J = 0,04$ et $\beta = 3$ . . . . .	52
2.14	Simulation par le modèle d'Ising d'un cycle dans le cas des tôles FeSi $J = 0,025$ et $\beta = 6,5$ . . . . .	52
2.15	(a) commutateur magnétique (b) plan de Preisach. . . . .	54
2.16	État magnétique dans le triangle de Preisach. . . . .	56
2.17	Triangle T(x,y) dans le plan de Preisach. . . . .	57
2.18	Saut brusque de paroi sous l'action d'un champ extérieur. . . . .	61
2.19	Déformation réversible d'une paroi sous champ extérieur [29]. . . . .	62
2.20	Comportement non physique au voisinage de la saturation d'un cycle majeur. . . . .	64
2.21	Ensemble des paramètres expérimentaux nécessaires au modèle . . . . .	68
2.22	Ferrites ; optimisation sur un cycle majeur ( $H_{max} = 206 \text{ A.m}^{-1}$ ). . . . .	70
2.23	Ferrites ; application sur un cycle mineur centré ( $H_{max} = 53 \text{ A.m}^{-1}$ ). . . . .	70
2.24	Ferrites ; restitution d'un cycle majeur centré à partir de l'optimi- sation sur une famille de cycles ( $H_{max} = 206 \text{ A.m}^{-1}$ ). . . . .	71
2.25	Ferrites ; restitution d'un cycle mineur centré à partir de l'optimi- sation sur une famille de cycles ( $H_{max} = 53 \text{ A.m}^{-1}$ ). . . . .	71
2.26	Ferrites ; résultat de l'optimisation sur la réponse à une excitation décroissante (avec $\omega = 38 \text{ s}^{-1}$ et $\tau = 0,2 \text{ s}$ ). . . . .	72
2.27	Ferrites ; restitution d'un cycle majeur centré à partir de l'optimi- sation sur la décroissance ( $H_{max} = 206 \text{ A.m}^{-1}$ ). . . . .	73
2.28	Ferrites ; restitution d'un cycle mineur centré à partir de l'optimi- sation sur la décroissance ( $H_{max} = 53 \text{ A.m}^{-1}$ ). . . . .	73
2.29	Ferrites N30 ; fonction d'Everett pour le modèle $M(H)$ . . . . .	75
2.30	Tôles FeSi ; fonction d'Everett pour le modèle $M(H)$ . . . . .	75

2.31	Poudres de fer ; fonction d'Everett pour le modèle $M(H)$ . . . . .	76
2.32	Ferrites N30 ; comparaison des cycles expérimentaux et calculés pour les deux modèles. . . . .	76
2.33	Tôles FeSi ; comparaison des cycles expérimentaux et calculés pour les deux modèles. . . . .	77
2.34	Poudres de fer ; comparaison des cycles expérimentaux et calculés pour les deux modèles. . . . .	77
2.35	Ferrites N30 : comparaison avec la mesure des pertes par hystérésis obtenues par les 2 modèles à 0,5 Hz. . . . .	79
2.36	Tôles FeSi : comparaison avec la mesure des pertes par hystérésis obtenues par les 2 modèles à 0,5 Hz. . . . .	79
2.37	Poudres de fer : comparaison avec la mesure des pertes par hystérésis obtenues par les 2 modèles à 0,5 Hz. . . . .	80
2.38	Compensation des pertes au niveau du coude de basculement dans le cas des poudres de fer. . . . .	80
2.39	Ferrites N30 ; évolution des champs rémanent et coercitif en fonction de $H_{max}$ à 0,5 Hz. . . . .	81
2.40	Tôles FeSi ; évolution des champs rémanent et coercitif en fonction de $H_{max}$ à 0,5 Hz. . . . .	81
2.41	Poudres de fer ; évolution des champs rémanent et coercitif en fonction de $H_{max}$ à 0,5 Hz. . . . .	82
2.42	Ferrites N30 ; comparaison des résultats théoriques et expérimentaux dans le cas des excitations A et B (évolution B(t) pour l'excitation A et évolution B(H) pour l'excitation B). . . . .	84
2.43	Tôles FeSi ; comparaison des résultats théoriques et expérimentaux dans le cas des excitations A et B (évolution B(t) pour l'excitation A et évolution B(H) pour l'excitation B). . . . .	84
2.44	Poudres de fer ; comparaison des résultats théoriques et expérimentaux dans le cas des excitations A et B (évolution B(t) pour l'excitation A et évolution B(H) pour l'excitation B). . . . .	85
2.45	Cycles calculés pour des pas de calcul donnant 200 points et 2000 points dans le cas du modèle de Jiles-Atherton (Ferrites N30). . . . .	86
2.46	Géométrie du système étudié et maillage associé (M1). . . . .	88
2.47	Cycles calculés par les 2 modèles pour le point P1. . . . .	88
2.48	Courant mesuré et courants obtenus par les 2 modèles dans le cas des maillage M1 et M2. . . . .	89

2.49	Allure de l'évolution de l'erreur en fonction du nombre d'éléments du maillage. . . . .	90
3.1	Commutateur magnétique dynamique. . . . .	98
3.2	Tôle de grandes dimensions ( $L \gg e$ et $l \gg e$ ). . . . .	99
3.3	Discrétisation de la section de la tôle. . . . .	101
3.4	Cycle d'hystérésis classique et contribution du champ classique. . .	109
3.5	Mesure de la conductivité sur un barreau. . . . .	110
3.6	Principe de la mesure de résistivité pour un échantillon torique. . .	111
3.7	Structure utilisée en calcul de champ pour déterminer la résistivité et maillage associé. . . . .	112
3.8	Densité de courant dans la section du tore (en $A.m^{-2}$ ) en éléments finis. . . . .	113
3.9	(a) Courant d'excitation $I_{exc}$ au primaire (b) tension d'alimentation au primaire. . . . .	114
3.10	(a) Courant $I_{macro}$ relevé dans l'échantillon de poudres de fer (b) tension relevée au secondaire. . . . .	114
3.11	Comparaison des mesures avec les prédictions des modèles pour $B_m = 1,2$ Tesla à 1, 50 et 100 Hz : (a) modèle dynamique de Jiles-Atherton (b) modèle de l'équation de diffusion basse fréquence. . . . .	119
3.12	Comparaison des mesures avec les prédictions des modèles pour $B_m = 1,2$ Tesla à 200 Hz : (a) modèle dynamique de Jiles-Atherton (b) modèle de l'équation de diffusion basse fréquence. . . . .	119
3.13	Cycles simulés et mesuré à 400 Hz pour $B_m = 1,3$ Tesla (JAD = modèle dynamique de Jiles-Atherton et EDBF = modèle de l'équation de diffusion basse fréquence). Les modèles n'arrivent pas à restituer le gonflement indiqué par les flèches. . . . .	120
3.14	Comparaison de l'évolution des champs coercitif et rémanent expérimentaux en fonction de la fréquence avec les prédictions des modèles pour $B_m = 1,2$ Tesla. . . . .	120
3.15	Structure du système étudié et maillage associé (on représente uniquement le maillage de la culasse et du bobinage). . . . .	123
3.16	Courant dans le bobinage primaire du transformateur à 220V-50Hz. . . . .	124
3.17	Flux global en fonction du courant pour 50, 100 et 200 Hz. . . . .	125
3.18	Forme d'onde du courant dans le bobinage primaire à 110V-50Hz. . . . .	125
3.19	Cycles relevés sur l'élément se trouvant au point P2 (coude) pour 50, 100 et 200 Hz. . . . .	125

3.20	Cycles relevés sur l'élément se trouvant au point P1 (colonne centrale) pour 50, 100 et 200 Hz. . . . .	125
3.21	Evolution des pertes fréquentielles calculées pour le modèle éléments finis et, à partir de $B_{moy}(t)$ , pour le modèle dynamique. . . . .	126
3.22	Section prise en compte par le modèle dynamique pour le calcul des pertes dans le transformateur. . . . .	127
A.1	Énergie potentielle du système. . . . .	135
A.2	Interprétation de l'origine de l'hystérésis grâce à la fonction d'opposition. . . . .	136
B.1	Branche d'hystérésis descendante et fonction d'Everett correspondante. . . . .	140
B.2	Faisceau des courbes d'Everett mesurées supportant la fonction d'Everett $E(H_m, H)$ . . . . .	140
B.3	Projection dans le plan $\Delta$ des courbes d'Everett. . . . .	141
B.4	Méthode d'interpolation <b>M1</b> utilisée pour calculer la fonction d'Everett dans le 1 <sup>er</sup> cas. . . . .	142
B.5	Méthode d'interpolation <b>M1</b> utilisée pour calculer la fonction d'Everett dans le 2 <sup>ème</sup> cas. . . . .	143
B.6	Principe de la méthode d'interpolation <b>M2</b> . . . . .	144
B.7	Cycles calculés à partir des méthodes <b>M1</b> et <b>M2</b> . . . . .	144



# Introduction générale

On commence à disposer aujourd'hui en génie électrique d'outils performants pour la modélisation des systèmes électromagnétiques. En effet, grâce à des méthodes telle que celle des éléments finis [1], il est possible d'étudier des systèmes complexes avant même de les fabriquer. Néanmoins, il est nécessaire de disposer de modèles fiables pour retranscrire un comportement réaliste du système étudié. Ainsi, le comportement électromagnétique global d'un système peut être représenté à l'aide du modèle mathématique des équations de Maxwell. Si nous nous intéressons de manière plus précise à la constitution des machines électriques en particulier, nous constatons que les matériaux utilisés pour la fabrication des noyaux magnétiques sont le lieu de la conversion de l'énergie électromagnétique. Ces matériaux étant en général ferromagnétiques, leur loi de comportement magnétique est fortement non linéaire et de type hystérétique. Toutefois, une première approche consiste à utiliser une loi de comportement non linéaire mais univoque (de type anhystérétique). Pour cela, on utilise soit une fonction analytique (équation de Marrocco par exemple [2]), soit une fonction interpolée sur la base de points expérimentaux. Les résultats ainsi obtenus permettent déjà de représenter de manière réaliste le comportement d'un système électromagnétique. Mais cette approche ne permet pas de prendre en compte les pertes d'origine ferromagnétiques. Le calcul de ces pertes (représentée par la surface du cycle d'hystérésis) peut être très utile lors de la phase de conception d'un système. Il existe des expressions empiriques qui permettent d'évaluer ces pertes *a posteriori*, c'est à dire en connaissant la répartition de l'induction dans le matériau. Toutefois, ces expressions doivent souvent être adaptées selon le système étudié et peuvent être très approximatives. A cela s'ajoute le fait qu'il apparaît une erreur supplémentaire ayant pour origine la loi de comportement univoque des matériaux magnétiques. Les grandeurs globales, telles qu'un courant dans un bobinage ou un couple, qui sont calculées à partir du modèle précédent

peuvent être très différentes de la réalité. On peut prendre par exemple la modélisation d'un transformateur où l'effet de rémanence (non pris en compte par un modèle univoque) conditionne fortement le régime transitoire lors de la mise sous tension.

Pour remédier à ces problèmes, il peut être nécessaire d'intégrer un modèle d'hystérésis dans le modèle de calcul de champ par éléments finis. Plusieurs types de modèles sont proposés dans la littérature [4]. Certains sont purement mathématiques [5, 6, 7], d'autres phénoménologiques [28] et peu sont basés sur des considérations physiques [29]. La multitude de modèles montre bien qu'il n'est pas aisé de retranscrire fidèlement la loi de comportement magnétique hystérétique. En effet, plusieurs paramètres physiques, ainsi que des aspects numériques, entrent en jeu.

Tout d'abord, il y a la diversité des matériaux utilisés dans les applications électromagnétiques. Ceci est d'autant plus vrai que, depuis quelques années, il y a un fort développement de systèmes électromagnétiques basés sur des matériaux nouveaux dans le domaine du génie électrique [25]. Rendre compte des lois de comportement de matériaux pouvant avoir des formes de cycles d'hystérésis totalement différentes, est une condition nécessaire pour un éventuel modèle d'hystérésis. Or, dans la plupart des travaux portant sur la modélisation de l'hystérésis, il s'agit de rendre compte de la loi de comportement des tôles utilisées pour la construction des machines électriques [53, 60, 62, 9, 10]. La modélisation de l'hystérésis magnétique des tôles, dans le cas d'un régime statique, est maintenant un domaine bien connu, notamment grâce au modèle de Preisach [28].

De plus, l'apparition à haute fréquence de courants induits entraîne la déformation du cycle d'hystérésis. Il est donc nécessaire de rendre compte aussi de cette contribution à la loi de comportement. En effet, le gonflement du cycle entraîne une augmentation des pertes qui doivent pouvoir être prise en compte. Ainsi, dans le cadre d'une étude en dynamique, il existe des extensions des modèles statiques pour prendre en compte l'effet des courants induits [60, 62, 52]. Encore une fois, il s'agit souvent d'une étude restreinte au cas de tôles.

Enfin, le dernier point concerne l'aspect numérique. La modélisation numérique en électromagnétisme par la méthode des éléments finis nécessite déjà des temps de calcul importants. Il ne s'agit pas d'alourdir les calculs par l'ajout d'un modèle d'hystérésis complexe. Or, les modèles proposés [53, 52], notamment pour la prise en compte du régime dynamique, sont souvent assez lourds à mettre en oeuvre.

Compte tenu des trois points précédemment décrits, nous nous proposons d'étudier et de comparer différents modèles sur trois matériaux magnétiques dont les lois de comportement sont différentes par leurs formes et leurs comportements en

régime dynamique. Cette étude est effectuée dans un premier temps en régime statique puis, dans un deuxième temps, en régime dynamique. La comparaison porte essentiellement sur la qualité de prédiction des cycles, l'estimation des pertes et bien sûr les aspects numériques (temps de calcul et facilité d'implantation dans un code de calcul éléments finis).

Nous présentons dans le premier chapitre le modèle mathématique des équations de Maxwell ainsi que sa mise en équation pour une résolution numérique basée sur le méthode des éléments finis. Nous rappellerons aussi quelques généralités sur le magnétisme suivies d'une description plus détaillée du ferromagnétisme et du processus d'aimantation hystérétique associé.

Au deuxième chapitre, nous développons les modèles statiques étudiés, à savoir les modèles d'Ising, de Preisach et de Jiles-Atherton. Les résultats de ceux-ci sont comparés avec les mesures relevées sur un banc expérimental pour diverses conditions d'excitation. Nous comparons également l'aspect numérique. Enfin, nous présentons une application en éléments finis dans le code de calcul EFL2EP du laboratoire afin de comparer les performances des modèles de Preisach et de Jiles-Atherton qui y ont été implantés.

Le dernier chapitre traite quant à lui de la prise en compte des phénomènes dynamiques dans un modèle d'hystérésis. Une description des modèles existants dans la littérature est effectuée. Deux modèles, qui constituent des extensions de modèles statiques, seront étudiés plus particulièrement et testés avec des relevés expérimentaux. Ces modèles sont celui de l'équation de diffusion approximée à basse fréquence et celui de Jiles-Atherton étendu à la dynamique. Ce dernier est choisi pour une intégration dans le code de calcul EFL2EP et testé sur un transformateur de tension à base de tôles. Enfin, nous effectuons une étude des pertes en régime dynamique par la prise en compte, en éléments finis, de la conductivité électrique des poudres de fer dans le cas d'une bobine.



# Chapitre 1

## Généralités

### 1.1 Le modèle mathématique

Dans cette partie nous allons aborder le modèle mathématique nécessaire pour la modélisation numérique d'un système électromagnétique. Nous présenterons les principales formulations utilisées pour la résolution d'un problème électromagnétique.

#### 1.1.1 Equations de Maxwell

On considère un système électromagnétique. Afin d'étudier ce système, nous définissons un domaine d'étude  $\mathcal{D}$  qui est souvent, en pratique, de taille finie. De plus, nous supposons celui-ci contractile (sans trou ni boucle) [8]. Les équations de Maxwell, qui définissent l'ensemble des phénomènes électromagnétiques dans ce domaine d'étude, sont données sous la forme suivante :

$$\mathbf{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.2)$$

où  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$  sont les vecteurs champ et induction électriques,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{B}$  les vecteurs champ et induction magnétiques,  $\mathbf{J}$  le vecteur de la densité de courant. Ces équations sont dites universelles, c'est-à-dire vraies quelque soit le système. En électrotechnique, la forme de ces équations est donnée pour le cas où les courants de déplacement (terme  $\partial_t\mathbf{D}$ ) sont négligés. L'équation (1.2) devient :

$$\mathbf{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.3)$$

On se trouve alors dans le cadre des hypothèses de la magnétostatique.

### 1.1.2 Loi de comportement

Les équations (1.1) et (1.2), qui font intervenir 4 grandeurs différentes, sont insuffisantes pour décrire entièrement le système. Ainsi, pour tenir compte des particularités d'un système (c'est-à-dire les différences de matériaux), il faudra introduire deux relations constitutives reliant les vecteurs ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{J}$ ). Outre le champ  $\mathbf{H}$  (resp.  $\mathbf{E}$ ), l'induction  $\mathbf{B}$  (resp.  $\mathbf{J}$ ) dépend de nombreux paramètres comme la température  $T$ . Les deux relations constitutives qui nous intéressent s'écrivent de manière générale :

$$\mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{H}, t, T, \dots) \quad (1.4)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{g}(\mathbf{E}, t, T, \dots) \quad (1.5)$$

où  $t$  désigne le temps. Toutefois, dans la loi de comportement (1.4), l'induction  $\mathbf{B}$  dépend fortement de  $\mathbf{H}$  à température constante. Dans la suite nous supposons que cette loi s'écrit :

$$\mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{H}, t) \quad (1.6)$$

Dans le cas de la relation (1.5), à température constante, la densité de courant est supposée proportionnelle à  $\mathbf{E}$  :

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \quad (1.7)$$

où  $\sigma$  désigne la conductivité électrique du matériau. La loi constitutive (1.7) n'est autre que la loi d'Ohm. Les deux lois constitutives peuvent ainsi être bâties à partir de mesures macroscopiques permettant de déterminer la conductivité et la loi (1.6). Nous aborderons de manière plus détaillée cet aspect dans la deuxième partie de ce chapitre. Dans la suite, nous nous intéresserons au développement des calculs du modèle mathématique dans le cas de la magnétostatique et de la magnétodynamique.

### 1.1.3 Les conditions aux limites

Afin d'assurer l'unicité de la solution du modèle mathématique regroupant les équations (1.1) et (1.3) ainsi que les lois de comportement (1.6) et (1.7), il est nécessaire de définir les conditions aux limites temporelles et spatiales associées aux champs.

Les conditions aux limites temporelles sont fixées grâce à la répartition initiale de l'induction ou du champ magnétique. En général, le champ  $\mathbf{H}$  est pris égal à zéro à l'instant initial. Les conditions aux limites spatiales sont quant à elles définies sur la frontière  $\Gamma$  du domaine d'étude  $\mathcal{D}$  (figure 1.1).

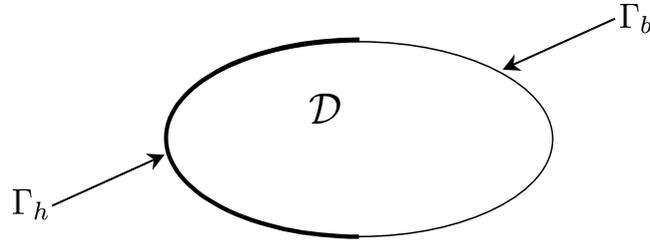


FIG. 1.1 - *Domaine d'étude.*

La frontière  $\Gamma$  est décomposée en deux parties  $\Gamma_b$  et  $\Gamma_h$  qui vérifient  $\Gamma = \Gamma_b \cup \Gamma_h$  et  $\Gamma_b \cap \Gamma_h = \emptyset$ . Nous avons sur ces frontières, respectivement, les conditions aux limites sur le champ magnétique et l'induction magnétique qui seront choisies homogènes :

$$\mathbf{H} \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma_h} = \mathbf{0} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_b} = 0 \quad (1.9)$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale de la frontière  $\Gamma$ .

En combinant (1.3) et (1.8) ainsi que (1.1) et (1.9), nous obtenons les conditions aux limites supplémentaires suivantes :

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_h} = 0 \quad (1.10)$$

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{n}|_{\Gamma_b} = \mathbf{0} \quad (1.11)$$

## 1.2 Les formulations

Pour résoudre ce système d'équations, nous utilisons des formulations en potentiels [3]. Dans la suite, nous introduisons ces formulations dans le cas :

- de la magnétostatique, où la répartition de la densité de courant  $\mathbf{J}$  est supposée connue. Le système ainsi peut être constitué de matériaux ferromagnétiques dont la conductivité est supposée nulle.

- de la magnétodynamique, où les effets des courants induits dans les matériaux conducteurs ne sont plus négligés.

### 1.2.1 Les formulations de la magnétostatique

Dans ce type de formulation, on considère la répartition de la densité de courant  $\mathbf{J}_0$  des inducteurs connue et uniforme. Le système d'équations à résoudre est :

$$\mathbf{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}_0 \quad (1.12)$$

$$\mathit{div}\mathbf{B} = 0 \quad (1.13)$$

où l'équation (1.13) découle de (1.1). La résolution se fait en ajoutant les conditions aux limites données par les équations (1.8) et (1.9) ainsi que la loi de comportement donnée par l'équation (1.6).

Ce système d'équations est rarement résolu de manière directe, on utilise généralement des potentiels avec les conditions aux limites associées. Deux types de formulation sont utilisées : la formulation en potentiel scalaire magnétique  $\Omega$  et la formulation en potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$ .

#### 1.2.1.1 La formulation en potentiel scalaire magnétique

La prise en compte des inducteurs, dont on connaît la densité de la distribution de courant  $\mathbf{J}_0$ , est effectuée grâce à l'introduction d'un champ source  $\mathbf{H}_s$  qui vérifie :

$$\mathbf{rot}\mathbf{H}_s = \mathbf{J}_0 \quad (1.14)$$

$$\text{avec } \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_s|_{\Gamma_h} = \mathbf{0}$$

Comme  $\mathbf{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_s) = \mathbf{0}$ , nous pouvons trouver un potentiel scalaire magnétique  $\Omega$  tel que :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s - \mathbf{grad}\Omega \quad (1.15)$$

Différentes méthodes peuvent être utilisées pour calculer le champ source analytiquement [11, 12] ou par des techniques numériques [13]. Le problème à résoudre devient :

$$\begin{aligned} \mathit{div}[\mathbf{f}(\mathbf{H}_s - \mathbf{grad}\Omega)] &= 0 \\ \text{avec } \mathbf{n} \cdot [\mathbf{f}(\mathbf{H}_s - \mathbf{grad}\Omega)]|_{\Gamma_b} &= 0 \\ \text{et } \Omega|_{\Gamma_h} &= 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Ce système représente la formulation en potentiel scalaire.

### 1.2.1.2 La formulation en potentiel vecteur magnétique

D'après (1.13), on peut écrire que l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  dérive d'un potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ . On a alors :

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot}\mathbf{A} \quad (1.17)$$

En associant les équations (1.12) et (1.17) on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}[\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{rot}\mathbf{A})] &= \mathbf{J}_0 \\ \text{avec } \mathbf{n} \wedge [\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{rot}\mathbf{A})]|_{\Gamma_h} &= \mathbf{0} \\ \text{et } \mathbf{n} \wedge \mathbf{A}|_{\Gamma_b} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  étant défini à un gradient près, il faut imposer une condition de jauge telle que celle donnée par l'équation (1.19). On assure ainsi l'unicité de la solution pour le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (1.19)$$

où  $\mathbf{w}$  est un champ de vecteurs dont les lignes de champ ne se referment pas et relient tous les points du domaine  $\mathcal{D}$  [14].

Une autre jauge possible est la jauge de Coulomb [15] donnée par (1.20). Celle-ci est mieux adaptée en 2D car elle est vérifiée automatiquement.

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (1.20)$$

Ainsi, les deux formulations en potentiel permettent de réduire le nombre d'inconnues puisque de deux ( $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{B}$ ) dans le cas du modèle mathématique initial, nous n'avons plus qu'une seule inconnue ( $\mathbf{A}$  ou  $\Omega$ ).

## 1.2.2 Les formulations de la magnétodynamique

La magnétodynamique est l'étude des phénomènes électromagnétiques non stationnaires. Ainsi, dans le domaine de l'électrotechnique, ce modèle est utilisé lorsque le système contient des matériaux conducteurs qui sont le siège de courants induits non négligeables. Les équations à résoudre sont les suivantes :

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.21)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_0 \quad (1.22)$$

où  $\mathbf{J}$  représente la densité de courants induits.

A ces équations s'ajoutent les équations constitutives (1.7) et (1.6) ainsi que les conditions aux limites données par les équations (1.8) à (1.11). Nous développerons dans la suite les formulations magnétodynamiques valables dans le cas des régions conductrices.

### 1.2.2.1 La formulation en potentiels $\mathbf{A}$ - $\varphi$

En utilisant l'équation (1.17), l'équation (1.21) nous permet d'écrire que :

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \operatorname{grad} \varphi\right) \quad (1.23)$$

où  $\varphi$  est un potentiel scalaire électrique.

La combinaison de cette équation avec l'équation (1.22) et la loi constitutive (1.7), nous permet d'obtenir la formulation suivante :

$$\operatorname{rot}[f^{-1}(\operatorname{rot} \mathbf{A})] + \sigma\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \operatorname{grad} \varphi\right) = \mathbf{0} \quad (1.24)$$

### 1.2.2.2 La formulation en potentiels $\mathbf{T}$ - $\Omega$

En définissant un potentiel vecteur électrique  $\mathbf{T}$  tel que  $\mathbf{rot}\mathbf{T} = \mathbf{J}$ , l'équation (1.22) permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \mathbf{T} + \mathbf{H}_s - \mathbf{grad}\Omega \\ \text{avec } \mathbf{rot}\mathbf{H}_s &= \mathbf{J}_0\end{aligned}\tag{1.25}$$

où  $\Omega$  est le potentiel scalaire magnétique défini en 1.2.1.1.

A partir des équations (1.25) et (1.21), on peut écrire :

$$\mathbf{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\mathbf{rot}\mathbf{T}\right) + \frac{\partial f(\mathbf{T} - \mathbf{grad}\Omega)}{\partial t} = \mathbf{0}\tag{1.26}$$

dans le cas où la résistivité n'est pas nulle.

### 1.2.2.3 Prise en compte de la loi de comportement non linéaire

Comme nous le verrons par la suite, la loi de comportement magnétique peut être non linéaire, voire non univoque (phénomène d'hystérésis). Il est alors nécessaire de reposer le problème sous une autre forme. La résolution numérique de l'équation (1.18) ne peut être effectuée avec la même méthode que celle utilisée dans le cas d'une loi de comportement univoque (méthode de Newton-Raphson par exemple). Nous avons choisi d'utiliser la méthode du point fixe déjà présentée dans [18] et que nous détaillons dans le cas de la formulation en potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ . La loi de comportement est donc réécrite sous la forme :

$$\mathbf{H} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{B}) = \nu_{PF}\mathbf{B} + \mathbf{M}_{PF}(\mathbf{B})\tag{1.27}$$

où la réductivité  $\nu_{PF}$  est une constante (prise égale à la réductivité du vide) et  $\mathbf{M}_{PF}(\mathbf{B})$  une aimantation "rémanente" dépendante de  $\mathbf{B}$ . Le système à résoudre, associé à la condition aux limites (1.8), devient :

$$\mathbf{rot}(\nu_{PF}\mathbf{rot}\mathbf{A}) = \mathbf{J}_0 - \mathbf{rot}\mathbf{M}_{PF}\tag{1.28}$$

### 1.2.2.4 La formulation faible

Afin de résoudre numériquement les formulations précédentes basées sur des équations aux dérivées partielles, nous employons des formulations faibles. Par exemple, dans le cas de la magnétostatique, il faut chercher le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  tel que :

$$\int_{\mathcal{D}} \nu_{PF}(\mathbf{rot}\mathbf{A}) \cdot \mathbf{rot}\mathbf{A}' d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{A}' d\mathcal{D} - \int_{\mathcal{D}} (\mathbf{rot}\mathbf{M}_{PF}) \cdot \mathbf{A}' d\mathcal{D} \quad (1.29)$$

où  $\mathbf{A}'$  représente des fonctions test. Dans la cas de la méthode de Galerkin [17], on utilise des fonctions test qui appartiennent au même espace que  $\mathbf{A}$ .

## 1.3 Résolution numérique

Les formulations présentées dans la partie 1.1 ne peuvent être résolues de manière analytique pour des systèmes électromagnétiques complexes. Il est donc nécessaire d'avoir recours à des méthodes numériques comme la Méthode des Éléments Finis qui contient deux types de discrétisation. La première traite de la discrétisation spatiale du domaine étudié à l'aide d'éléments géométriques simples. Ainsi, le domaine d'étude  $\mathcal{D}$  est divisé en triangles ou quadrilatères si  $\mathcal{D}$  est 2D et en tétraèdres, hexaèdres ou prismes si  $\mathcal{D}$  est 3D. L'autre discrétisation est celle des inconnues du système à l'aide de fonctions d'interpolations. Dans la suite, nous exposons les hypothèses pour une étude en 2D et dans le cadre de la formulation en potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ , car c'est la plus utilisée. Ensuite, les propriétés des fonctions d'interpolation des inconnues sont présentées.

### 1.3.1 Hypothèses 2D

Pour cette étude, nous allons nous restreindre au cas bidimensionnel plan. On considère que les systèmes étudiés possèdent une symétrie de translation suivant la troisième dimension ou une symétrie d'axe de révolution. Dans les deux cas précédents, la direction du vecteur  $\mathbf{J}$  de la densité de courant doit être perpendiculaire au plan d'étude. Le problème reste donc invariant suivant l'axe  $z$  dans les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  ou suivant la révolution d'axe  $z$  dans les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .

Dans les calculs suivants, nous ne considérons que le cas d'un système à symétrie de translation (figure 1.2). Mais une étude similaire peut être effectuée dans le cas axisymétrique. Dans un système à symétrie de translation, les courants sont orientés suivant l'axe  $(Oz)$ , soit  $\mathbf{J} = J(x, y)\mathbf{e}_z$ . On peut alors effectuer une simplification au niveau de la formulation en potentiel vecteur et choisir le vecteur  $\mathbf{A}$  qui est invariant selon l'axe  $z$ . Ainsi, on satisfait naturellement la jauge de Coulomb  $div \mathbf{A} = 0$ . Par conséquent, le problème à résoudre consiste à chercher une fonction scalaire  $A(x, y)$  et on déduit la répartition du potentiel vecteur par :

$$\mathbf{A}(x, y, z) = A(x, y)\mathbf{e}_z \quad (1.30)$$

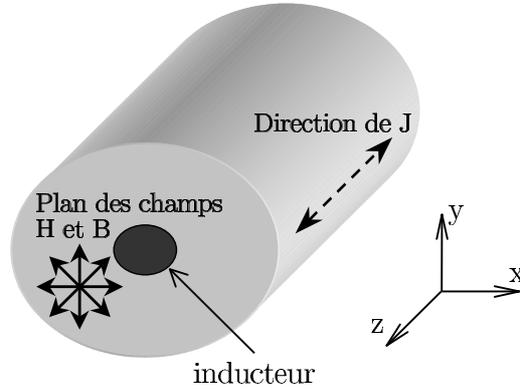


FIG. 1.2 - Structure 2D à symétrie de translation.

### 1.3.2 Discrétisation des inconnues

Il faut introduire ici les fonctions de discrétisation qui seront les mêmes pour les deux formulations en potentiel. A chaque noeud du maillage, on associe des fonctions de discrétisation  $\omega_n(x, y)$  telles que :

$$\begin{aligned} \omega_n(x_n, y_n) &= 1 \\ \omega_n(x_{n'}, y_{n'}) &= 0 \\ &\text{avec } n \neq n' \end{aligned} \quad (1.31)$$

avec  $(x_n, y_n)$  et  $(x_{n'}, y_{n'})$  les coordonnées des noeuds  $n$  et  $n'$ . Le potentiel inconnu est décomposé dans un espace de dimension finie de fonctions de base  $(\omega_n)_{1 \leq n \leq N}$  où  $N$  représente le nombre de noeuds du maillage. Pour le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ , nous aurons par exemple :

$$A(x, y) = \sum_{n=1}^N A_n \omega_n \quad (1.32)$$

où  $A_n$  représente le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  au noeud  $n$  du maillage. A l'aide de la méthode des éléments finis, on cherche les solutions  $(A_n)_{1 \leq n \leq N}$  qui permettent de vérifier au mieux les formulations faibles (1.29).

Il faut noter que, dans le cas de la magnétostatique à deux dimensions, le nombre d'inconnues est le même pour les deux formulations. Toutefois, la formulation en potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  est plus souvent utilisée que la formulation en potentiel scalaire  $\Omega$  qui nécessite le calcul d'un champ source  $\mathbf{H}_s$  [3]. Dans la suite, nous nous intéresserons uniquement au développement des calculs pour la formulation en potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ .

### 1.3.3 Système matriciel

Afin de résoudre le système (1.29), le potentiel vecteur est discrétisé à l'aide de la relation (1.32). La fonction  $\mathbf{A}'$  est choisie par la méthode de Galerkin qui consiste à prendre comme fonctions test l'ensemble des fonctions nodales  $\omega_n$  [17]. Nous obtenons alors le système matriciel suivant pour la méthode du point fixe :

$$[S_{PF}][A] = [J] - [M_{PF}] \quad (1.33)$$

où le vecteur  $[A]$  représente les valeurs nodales  $A_n$  du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  (Cf. (1.32)),  $[S_{PF}]$  une matrice carrée appelée matrice de raideur,  $[M_{PF}]$  et  $[J]$  des vecteurs qui prennent en compte l'aimantation  $\mathbf{M}_{PF}$  et la densité de courant  $\mathbf{J}$ . On peut noter que la matrice  $[S_{PF}]$  est constante puisque la réductivité  $\nu_{PF}$  est constante. Cette dernière doit aussi satisfaire certaines conditions pour assurer la convergence du calcul numérique [18]. Les non-linéarités introduites par la loi de comportement d'un matériau ferromagnétique sont reportées dans le terme source  $[M_{PF}]$  qui dépend de  $\mathbf{B}$  (i.e.  $\mathbf{A}$ ).

Afin de prendre en compte le couplage avec les équations de circuit d'un système dont les inducteurs sont parcourus par un courant  $i$ , un vecteur  $[D]$  tel que  $[J] = [D]i$  est introduit [19]. Nous obtenons alors le système :

$$\begin{bmatrix} S_{PF} & -D \\ 0 & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} A \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{PF} \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec  $u$  la tension imposée dans le circuit électrique et  $G$  qui est égal, à un coefficient près, à la transposée de  $D$ . Enfin, ce système peut être discrétisé temporellement par une méthode d'Euler implicite.

## 1.4 Généralités sur les matériaux magnétiques

### 1.4.1 Grandeurs magnétiques

Dans le vide, la relation linéaire  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  lie les grandeurs vectorielles champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$  et champ d'excitation magnétique  $\mathbf{H}$  avec  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide. Dans la matière, une nouvelle grandeur vectorielle, l'aimantation  $\mathbf{M}$ , apparaît pour traduire la réaction du milieu au champ électromagnétique. Ce comportement macroscopique résulte d'un comportement magnétique collectif au niveau atomique. Ainsi, de la même manière qu'un courant électrique circulant dans une spire produit un moment magnétique, le mouvement des électrons autour du noyau crée un moment magnétique appelé moment orbital. En plus de ce moment magnétique orbital, chaque électron porte un moment magnétique intrinsèque appelé moment magnétique de spin. Le moment magnétique total d'un atome est simplement la somme vectorielle des moments magnétiques orbital et de spin de chaque électron. A l'échelle macroscopique, l'aimantation  $\mathbf{M}$  du matériau est donnée par :

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial v} \quad (1.34)$$

où  $\mathcal{M}$  est la somme des moments magnétiques atomiques et  $\partial v$  l'élément de volume considéré. Ainsi, l'aimantation  $\mathbf{M}$  est introduite dans l'équation qui lie les grandeurs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  de la manière suivante :

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (1.35)$$

On définit aussi la polarisation du matériau par  $\mathbf{P} = \mu_0 \mathbf{M}$  et la susceptibilité magnétique  $\chi$  qui lie le champ  $\mathbf{H}$  avec l'aimantation  $\mathbf{M}$  par  $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ . On a alors :

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} \quad (1.36)$$

D'un point de vue magnétique, les matériaux se classent en trois grandes catégories : les matériaux paramagnétiques, diamagnétiques et ferromagnétiques. Nous nous intéresserons dans la suite plus particulièrement aux matériaux ferromagnétiques qui sont utilisés comme intermédiaire dans la conversion d'énergie en génie électrique. Toutefois, afin de bien comprendre le comportement magnétique de tels matériaux, il est intéressant de décrire celui des matériaux paramagnétiques.

Dans la suite, nous rappelons succinctement les propriétés des matériaux diamagnétiques. Ensuite, nous aborderons la description du paramagnétisme à l'échelle microscopique et macroscopique. Enfin, cette description nous permettra d'aborder l'étude du ferromagnétisme.

### 1.4.2 Le diamagnétisme

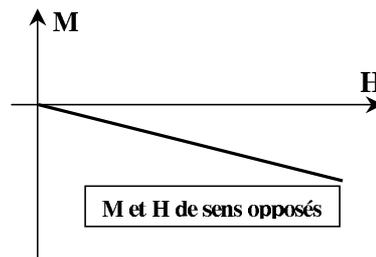
Dans les matériaux diamagnétiques, l'application d'un champ magnétique provoque un courant électronique moyen induit autour du noyau atomique. L'influence d'un champ extérieur est similaire à celle observée dans le cas d'un matériau paramagnétique (voir 1.4.3) mais champ et aimantation sont de sens contraires.

Le tableau 1.1 donne les susceptibilités de quelques matériaux diamagnétiques, dont la loi de comportement est linéaire (figure 1.3).

**TAB. 1.1** - *Susceptibilités de matériaux diamagnétiques à température ambiante.*

Matériaux	Susceptibilité $\chi$
Silicium	$-1,2 \cdot 10^{-6}$
Cuivre	$-1,08 \cdot 10^{-6}$
Plomb	$-1,4 \cdot 10^{-6}$

Ainsi, la susceptibilité étant très faible ( $|\chi| \ll 1$ ), nous pouvons assimiler la loi de comportement de ce type de matériaux à celle du vide  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  dans le cadre de l'étude des machines électriques.



**FIG. 1.3** - *Comportement diamagnétique.*

### 1.4.3 Le paramagnétisme

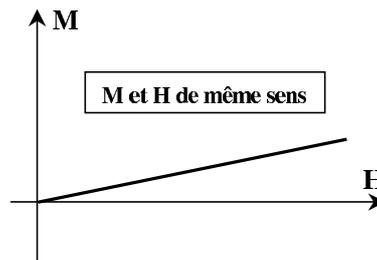
Le paramagnétisme est lié à l'existence d'un moment magnétique permanent que peuvent éventuellement porter les atomes ou les molécules. Ainsi, dans les matériaux

paramagnétiques, les vecteurs champ et aimantation sont de même sens et, si le champ extérieur disparaît, on observe une aimantation nulle.

On donne dans le tableau 1.2 les valeurs de susceptibilités pour quelques matériaux paramagnétiques. De la même manière que pour les matériaux diamagnétiques, la loi de comportement de tels matériaux est linéaire (figure 1.4) et nous pouvons utiliser la loi  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  en calcul de champ.

**TAB. 1.2** - *Susceptibilités de matériaux paramagnétiques à température ambiante.*

Matériaux	Susceptibilité $\chi$
Aluminium	$7,7 \cdot 10^{-6}$
Tungstène	$3,5 \cdot 10^{-6}$
Platine	$1,2 \cdot 10^{-5}$



**FIG. 1.4** - *Comportement paramagnétique.*

Comme cela a été précédemment décrit, les propriétés macroscopiques sont le résultat d'un comportement collectif au niveau microscopique. Nous allons donc nous intéresser à la description du paramagnétisme à l'échelle atomique.

#### 1.4.3.1 Approche microscopique

A l'échelle atomique, on peut considérer un solide comme une assemblée de  $N$  moments magnétiques  $\mathbf{S}_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) disposés régulièrement sur un réseau cristallin. Si ces moments magnétiques sont indépendants, donc sans interaction, et soumis à un champ externe  $\mathbf{H}$ , on peut écrire l'hamiltonien du système sous la forme :

$$\mathcal{H} = - \sum_{i=1}^N \mathbf{S}_i \mathbf{H} \quad (1.37)$$

A cette échelle, la physique quantique établit que les niveaux d'énergie que peut avoir une particule de moment magnétique  $\mathbf{S}$  sont quantifiés. Par conséquent, un

moment magnétique ne peut avoir toutes les orientations possibles et le produit scalaire  $\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{H}$  prend des valeurs discrètes. La quantification est introduite par l'intermédiaire du nombre quantique de spin qui est lié aux propriétés magnétiques intrinsèques de l'électron considéré. Nous avons l'expression du moment magnétique qui est  $\mathbf{S} = g\mu_B\mathcal{S}$  avec  $g$  le facteur de Landé,  $\mu_B$  le magnéton de Bohr et  $\mathcal{S}$  la variable vectorielle de spin. Le facteur de Landé fait intervenir les autres nombres quantiques qui caractérisent la dimension, la forme et l'orientation de l'orbitale (région de l'espace autour du noyau où se trouve l'électron). Le magnéton de Bohr s'écrit :

$$\mu_B = \frac{\hbar e}{2m} \quad (1.38)$$

où  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  avec  $h$  la constante de Plank ( $h = 6,62 \cdot 10^{-34} J \cdot s^{-1}$ ),  $e$  la charge de l'électron ( $e = 1,6 \cdot 10^{-19} Cb$ ) et  $m$  sa masse ( $m = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$ ).

La description précédente est suffisante pour expliquer le paramagnétisme à l'échelle microscopique. En effet, le couplage entre les moments magnétiques étant très faible, celui-ci peut-être omis dans un première approche. Toutefois, le développement précédent, basée sur des notions de physique quantique, est destinée à décrire le comportement et à donner les lois d'évolution des constituants microscopiques de la matière. D'autre part, la quantification ne permet pas une étude aisée des grandeurs magnétiques qui nous intéressent à l'échelle macroscopique. C'est pourquoi, dans le cadre de la physique classique (domaine continu), nous utilisons la théorie classique du paramagnétisme de Langevin pour expliquer le comportement macroscopique.

#### 1.4.3.2 Approche macroscopique

Considérons un système de moments magnétiques  $\mathbf{m}$  sans interaction et qui, en absence de champ magnétique extérieur, s'orientent dans toutes les directions. Dans ce cas, la résultante macroscopique de l'aimantation est nulle. Par contre, en présence d'un champ  $\mathbf{H}$ , l'énergie potentielle d'un moment magnétique est donnée par :

$$W_{para} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = -mB \cos(\theta) \quad (1.39)$$

avec  $\theta$  l'angle entre  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{B}$ . En moyenne, les moments magnétiques auront tendance à s'orienter dans la direction du champ. En supposant qu'ils sont libres de se réorienter, dans le traitement classique de la statistique de Boltzmann, la probabilité qu'un moment magnétique ait une orientation telle que  $\mathbf{m}$  fasse un angle  $\theta$  avec le champ  $\mathbf{B}$  est proportionnelle à [20] :

$$g(\theta) = \exp\left(-\frac{W_{para}}{kT}\right) \quad (1.40)$$

où  $k$  et  $T$  sont respectivement la constante de Boltzmann et la température. La valeur moyenne du moment magnétique sera proportionnelle à :

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\int_0^\pi \cos \theta g(\theta) \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi g(\theta) \sin \theta d\theta} \quad (1.41)$$

en posant  $x = \cos \theta$ ,  $z = \frac{mB}{kT}$  et  $dx = -\sin \theta d\theta$ , on obtient :

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\int_1^{-1} x e^{zx} dx}{\int_1^{-1} e^{zx} dx}$$

or :

$$\int_{-1}^1 x e^{zx} dx = \left[ \frac{x}{z} e^{zx} \right]_{-1}^1 - \frac{1}{z} \int_{-1}^1 e^{zx} dx = \frac{e^z + e^{-z}}{z} - \frac{1}{z^2} (e^z - e^{-z})$$

d'où :

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{chz}{shz} - \frac{1}{z} = \coth z - \frac{1}{z} = L(z) \quad (1.44)$$

où  $L(z)$  est la fonction de Langevin. L'aimantation totale pour une assemblée de moments magnétiques indépendants de densité  $N$  est donc donnée par :

$$M = NmL(z) = Nm \left[ \coth \left( \frac{\mu_0 m H}{kT} \right) - \frac{kT}{\mu_0 m H} \right] \quad (1.45)$$

Pour une valeur de  $H$  suffisamment élevée, presque tous les moments magnétiques sont alignés dans la direction de  $\mathbf{H}$  et la valeur de l'aimantation  $M$  vaut  $M \approx Nm = M_{sat}$ , c'est-à-dire l'aimantation à saturation.

Ainsi, à partir des propriétés microscopiques, nous avons déduit le comportement macroscopique d'un matériau paramagnétique. De la même façon, nous allons aborder la description du ferromagnétisme.

### 1.4.4 Le ferromagnétisme

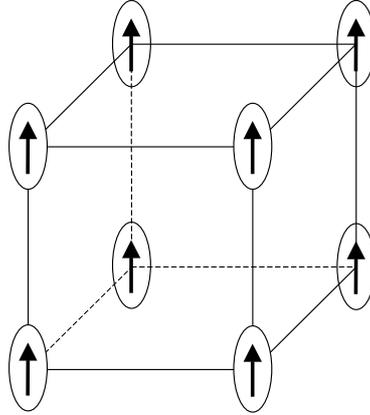
Dans la plupart des matériaux, l'ensemble des moments magnétiques sont orientés dans des directions aléatoires et le champ magnétique total résultant est nul. Par contre, les matériaux ferromagnétiques (Fer, Cobalt, Nickel et leurs alliages) présentent une aimantation spontanée à l'échelle macroscopique en l'absence de champ magnétique extérieur. La théorie du paramagnétisme ne permet pas d'expliquer ce constat, c'est pourquoi il est nécessaire de la compléter. Dans le paragraphe suivant, nous reprenons les résultats microscopique et macroscopique obtenus dans le cas de la description du paramagnétisme. Les deux descriptions sont complétées pour expliquer l'existence du ferromagnétisme.

#### 1.4.4.1 L'anisotropie

Dans un matériau anisotrope, les propriétés magnétiques dépendent de la direction suivant laquelle elles sont mesurées. Dans le cas des matériaux ferromagnétiques, l'anisotropie peut fortement influencer la loi de comportement. L'anisotropie peut avoir des origines diverses.

Tout d'abord, l'anisotropie peut-être d'origine cristallographique ou magnétocristalline. Cette origine est intrinsèque au matériau magnétique et se situe au niveau atomique. Dans les matériaux dont l'anisotropie est très prononcée, pour un atome donné, il existe un couplage important entre le moment magnétique de spin et les moments magnétiques orbitaux. A cela s'ajoutent des orbitales atomiques généralement non sphériques. Ceci entraîne un alignement des orbitales suivant une ou plusieurs directions cristallographiques préférentielles. Le couplage spin-orbite crée donc une direction d'aimantation préférentielle, dite direction de facile aimantation, pour les moments magnétiques atomiques (figure 1.5). Ainsi, écarter l'aimantation de cette direction coûte de l'énergie : c'est l'énergie d'anisotropie. Cette énergie dépend aussi de la structure cristallographique du matériau.

Enfin, l'anisotropie de contrainte qui est la conséquence d'un changement important dans la structure atomique lorsqu'un matériau est soumis à des contraintes mécaniques extérieures. Cette propriété est directement liée au phénomène de magnétostriction qui est utilisé pour les applications de capteurs et d'actionneurs magnétiques.



**FIG. 1.5** - Direction de facile aimantation des moments magnétiques atomiques selon les directions de la maille cubique.

#### 1.4.4.2 Approche microscopique avec l'énergie d'échange

Dans le cas du ferromagnétisme (ou de l'antiferromagnétisme [21]), il existe une interaction entre les moments magnétiques des atomes, appelée interaction d'échange et d'origine quantique. Celle-ci est de type électrostatique entre atomes proches voisins par l'intermédiaire d'électrons mis en commun. On peut écrire l'énergie d'échange en fonction des moments magnétiques  $\mathbf{S}_i$  et  $\mathbf{S}_j$  de deux atomes voisins :

$$W_{ij} = -2J_{ij}\mathbf{S}_i\mathbf{S}_j \quad (1.46)$$

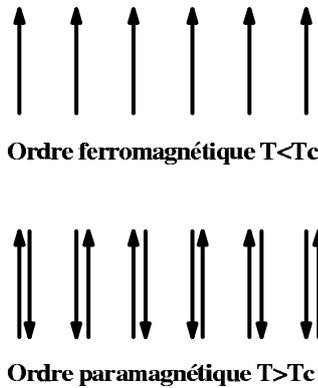
Dans cette expression, proposée par Heisenberg,  $J_{ij}$  désigne l'intégrale d'échange entre les atomes  $i$  et  $j$ . Selon le signe de ce facteur de couplage, on peut avoir soit un ordre ferromagnétique ( $J_{ij} > 0$ ) ou antiferromagnétique ( $J_{ij} < 0$ ). Le facteur  $J_{ij}$  décroît très vite avec la distance entre les atomes  $i$  et  $j$  et, comme nous le verrons dans le deuxième chapitre, seules les interactions entre proches voisins peuvent être prises en compte.

Si on considère le cas d'un matériau ferromagnétique, l'interaction d'échange tend à aligner les moments magnétiques atomiques dans une même direction pour minimiser l'énergie  $W_{ij}$ . Pour modifier la direction d'un moment magnétique, on peut soit appliquer un champ magnétique (dans ce cas, le moment magnétique s'aligne avec le champ magnétique) ou apporter de l'énergie en augmentant la température. Il existe une température  $T_c$ , dite température de Curie, au-dessus de laquelle le système devient paramagnétique. A haute température, l'énergie calorifique permet de vaincre l'interaction d'échange et les moments magnétiques prennent des directions aléatoires. Dans cette situation, le système perd ses propriétés ferromagnétiques et

devient paramagnétique (figure 1.6). A titre d'illustration, le tableau 1.3 donne les températures de Curie pour quelques matériaux ferromagnétiques.

**TAB. 1.3** - *Températures de Curie pour quelques matériaux ferromagnétiques.*

Matériaux	$T_c$ (°C)
Nickel	358
Fer	770
Cobalt	1115



**FIG. 1.6** - *Ordres ferromagnétique et paramagnétique des moments magnétiques atomiques.*

Ainsi, on peut construire l'hamiltonien  $\mathcal{H}$  d'un système ferromagnétique (ou antiferromagnétique) à partir d'un modèle microscopique, physiquement "sensé", du système de moments magnétiques. Comme pour la description du paramagnétisme, les variables vectorielles  $\mathbf{S}_i$  sont couplées au champ extérieur  $\mathbf{H}$ . A cela s'ajoute l'interaction de paires  $J_{ij}$  associée aux moments magnétiques  $\mathbf{S}_i$  et  $\mathbf{S}_j$ .

$$\mathcal{H} = -\mathbf{H} \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{S}_i - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \cdot \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \quad (1.47)$$

avec  $J_{ij} > 0$  puisque le couplage ferromagnétique est pris en compte dans le signe "-" devant la somme. Dans le paragraphe suivant, nous présentons la théorie du paramagnétisme de Langevin associée à la théorie du champ moléculaire pour expliquer l'existence du ferromagnétisme.

### 1.4.4.3 Approche macroscopique

Dans les développements des calculs concernant le paramagnétisme, nous avons négligé les interactions entre les moments magnétiques. La théorie du champ moléculaire, introduite en 1907 par P. Weiss, prend en compte les interactions entre les centres paramagnétiques d'un solide. P. Weiss émet l'hypothèse que ce sont les interactions entre moments magnétiques qui sont responsables de l'existence d'une aimantation spontanée dans certains solides ferromagnétiques en l'absence de champ extérieur. L'hypothèse de base consiste à dire que les interactions entre moments magnétiques donnent lieu à un champ magnétique  $\mathbf{H}_m$  dont l'effet s'ajoute à celui du champ extérieur  $\mathbf{H}$ . De plus, on suppose que  $\mathbf{H}_m$  est proportionnel à l'aimantation,  $\mathbf{H}_m = \alpha\mathbf{M}$ , de sorte que le champ effectif vu par un moment magnétique est :

$$\mathbf{H}_e = \mathbf{H} + \alpha\mathbf{M} \quad (1.48)$$

$\alpha$  étant un réel ("paramètre du champ moléculaire"). L'énergie potentielle d'un moment magnétique dans un tel système devient :

$$W_{ferro} = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_e = -m\mu_0(H + \alpha M) \cos(\theta) \quad (1.49)$$

La formule développée par Langevin est valable à condition de remplacer  $\mathbf{H}$  par  $\mathbf{H}_e$ . On obtient donc pour  $z = \frac{m\mu_0(H + \alpha M)}{kT}$  l'expression de l'aimantation suivante :

$$M = M_{sat} \left[ \coth \left( \frac{m\mu_0(H + \alpha M)}{kT} \right) - \frac{kT}{m\mu_0(H + \alpha M)} \right] \quad (1.50)$$

On remarque que cette équation est une équation autocohérente (c-à-d que  $M$  apparaît dans les deux membres de l'égalité). Il est aussi à noter que le système ferromagnétique a été considéré parfait, donc la courbe  $M(H)$  tracée à l'aide de l'équation (1.50) est la même que  $H$  soit croissant ou décroissant. Une telle loi de comportement est appelée courbe anhystérétique et sera notée  $M_{an}$  dans la suite. De plus on notera  $a = \frac{kT}{\mu_0 m}$  et l'équation devient :

$$M_{an} = M_{sat} \left[ \coth \left( \frac{H + \alpha M}{a} \right) - \frac{a}{H + \alpha M} \right] \quad (1.51)$$

Le paramètre  $a$  étant directement proportionnel à la température  $T$ , nous pouvons déjà étudier l'influence de celle-ci sur la loi de comportement (figure 1.7). De la même manière, l'influence du paramètre  $\alpha$  est reportée sur la figure 1.8.

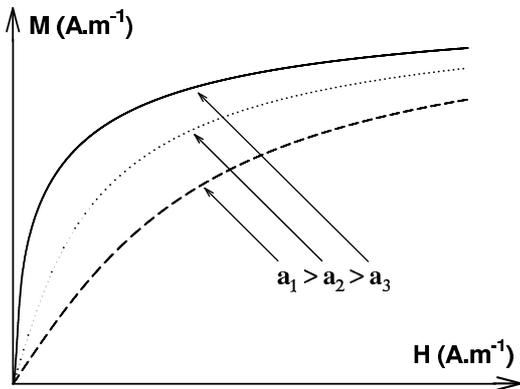


FIG. 1.7 - Influence du paramètre  $a$  sur la courbe anhystérique.

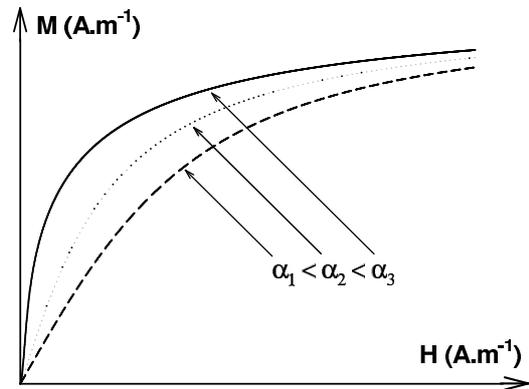


FIG. 1.8 - Influence du paramètre  $\alpha$  sur la courbe anhystérique.

Le comportement de la courbe anhystérique lorsque  $a$  augmente, i.e. la température augmente, est bien celui qu'on observe expérimentalement pour la loi de comportement d'un matériau ferromagnétique dont le niveau d'induction diminue lorsque la température augmente. Toutefois, dans la suite nous nous restreindrons au cas d'un système à température constante. La variation du paramètre  $\alpha$  est liée à la variation du couplage entre les moments magnétiques atomiques. Si ce paramètre est réduit, c'est le couplage entre les moments qui est aussi diminué. Nous constatons bien que dans la limite où le paramètre  $\alpha$  tend vers 0, donc réduction du couplage entre les moments, le système tend vers un comportement paramagnétique. Une valeur importante de ce paramètre entraîne une variation fortement non linéaire de la loi de comportement et, comme nous le verrons dans le 2<sup>ème</sup> chapitre, nous pouvons expliquer cela au niveau atomique par un phénomène d'avalanche lors du changement d'état du système puisque les moments sont fortement couplés.

#### 1.4.4.4 Configuration en domaines magnétiques [22]

En général, un échantillon de matériau ferromagnétique se subdivise en plusieurs domaines (*domaines de Weiss*) à l'intérieur desquels l'aimantation est uniforme. En effet, à l'intérieur de chaque domaine, les moments magnétiques sont maintenus parallèles par l'interaction d'échange. De plus, des domaines adjacents sont séparés par des parois (*parois de Bloch*) de quelques centaines à quelques milliers d'Angström ( $10^{-10}m$ ) où l'aimantation bascule d'une direction vers l'autre. L'aimantation macroscopique apparaît donc comme une grandeur statistique déduite du moment

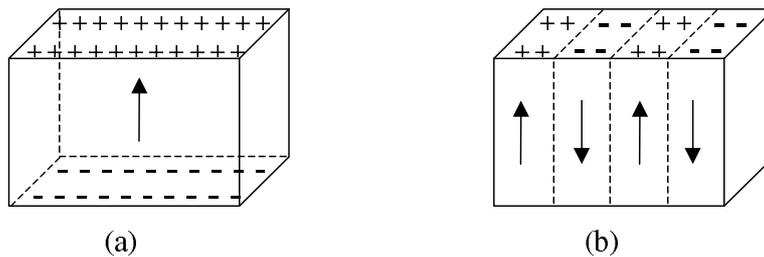
global mesuré sur un volume composé de plusieurs domaines.

### Domaines de Weiss

Nous avons vu qu'un système ferromagnétique est constitué d'une assemblée de moments magnétiques qui tendent à s'orienter parallèlement les uns aux autres sous l'effet des forces d'échanges. S'il n'existait que ce type d'interaction, tous les moments magnétiques seraient orientés parallèlement et le moment global du système serait le moment à saturation. Deux autres énergies viennent s'ajouter ou plutôt s'opposer à l'énergie d'échange : l'énergie magnétostatique et l'énergie d'anisotropie magnétocristalline. Cette dernière tend à aligner les moments selon des directions privilégiées (Cf. 1.4.4.1). L'énergie magnétostatique résulte quant à elle des interactions magnétiques entre les moments. En effet, chaque moment magnétique est soumis à un champ local créé par l'ensemble des autres moments magnétiques. L'énergie magnétostatique est composée d'une partie variable donnée par [21] :

$$W_m = -\frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}' dv \quad (1.52)$$

où  $V$  est le volume occupé par le système étudié et  $\mathbf{H}'$  le champ local. En l'absence de champ extérieur,  $\mathbf{H}'$  est dû à l'existence du champ démagnétisant créé par les moments de la structure. Ceux-ci sont la conséquence de l'apparition de masses magnétiques fictives au sein du matériau à cause de la divergence locale de l'aimantation. Considérons les deux cas présentés sur la figure 1.9.



**FIG. 1.9** - (a) *Système avec aimantation uniforme* (b) *Structure en domaines avec aimantations antiparallèles.*

Dans la configuration (a), les énergies d'échange et d'anisotropie sont minimisées si les moments magnétiques sont dirigés selon une direction de facile aimantation. Par contre, l'énergie magnétostatique est importante car les pôles magnétiques positifs et négatifs sont très éloignés les uns des autres. La configuration (b) permet

quant à elle de diminuer cette énergie magnétostatique mais l'énergie d'échange augmente puisqu'il existe maintenant des moments antiparallèles à l'interface entre les domaines. D'autre part, il existe aussi la contribution de l'énergie d'anisotropie magnétocristalline qui favorise l'orientation des moments magnétiques suivant une direction privilégiée du cristal pour minimiser l'énergie globale du système.

Ainsi, la compétition des différentes énergies qui ont des effets opposés, énergie d'échange pour l'alignement des moments magnétiques, magnétostatique pour des directions aléatoires et magnétocristalline pour les directions privilégiées, va entraîner la division en domaines de Weiss. La taille des domaines varie selon les matériaux, et pour un matériau donné, selon la qualité métallurgique. L'ordre de grandeur est typiquement de quelques dizaines de nanomètres à quelques centaines de microns (voir quelques *mm*).

### Parois de Bloch

La structure en domaines, précédemment décrite, engendre l'apparition de zones de transition entre les domaines voisins où l'orientation des moments magnétiques bascule d'une orientation vers une autre. La transition entre l'orientation d'un domaine et celle d'un domaine voisin n'est pas brutale mais se fait de manière progressive (figure 1.10). En effet, on montre que le coût énergétique d'une transition progressive est moindre que celui d'une transition brutale [21].

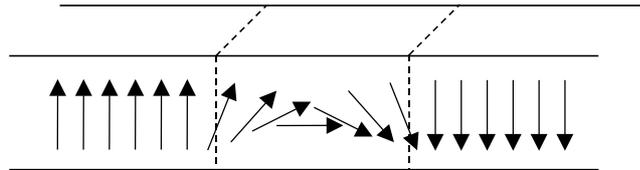


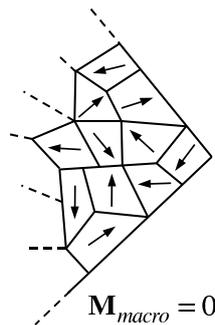
FIG. 1.10 - *Rotation des moments magnétiques dans une paroi de Bloch à 180°.*

Plus cette zone de transition est étalée et plus le coût énergétique sera moindre en terme d'énergie d'échange. Toutefois, il faut prendre en compte l'anisotropie magnétocristalline : plus la paroi de Bloch est large et plus il existe de moments magnétiques selon des directions défavorables. La largeur optimale de cette paroi est donc obtenue pour la minimisation de l'énergie globale.

## 1.4.5 Mécanismes d'aimantation et hystérésis magnétique

### 1.4.5.1 Approche macroscopique

Statistiquement, dans un matériau isotrope, les aimantations des domaines sont orientées dans les directions de facile aimantation et, en l'absence de champ extérieur, à l'échelle de plusieurs domaines l'aimantation moyenne est nulle (figure 1.11). Cet état est dit état désaimanté. Lorsqu'un champ magnétique extérieur est appliqué au système, on fournit une énergie qui tend à ligner les moments magnétiques. Les domaines dont l'aimantation est dans le même sens que celui du champ extérieur vont croître en volume au détriment des autres domaines. Ceci se traduit par un déplacement des parois de Bloch au sein du matériau. Par déplacement, on désigne ici le retournement des moments magnétiques à l'interface entre deux domaines. A l'échelle macroscopique ce processus peut être interprété comme un mouvement de paroi.



**FIG. 1.11** - A l'échelle macroscopique et sans champ extérieur, l'aimantation moyenne est nulle.

Il existe au sein du matériau de nombreuses imperfections à l'échelle microscopique qui entraînent un phénomène d'accrochage de parois lors de leurs déplacements. Ces imperfections sont, entre-autre, dues à des impuretés non magnétiques (carbures, nitrures, etc) et ferromagnétiques (cémentite) ainsi qu'aux contraintes de dislocation, de joints de grains et de traitements métallurgiques. Ces points particuliers constituent des sites d'ancrage et donc, d'un point de vue énergétique, des puits de potentiel pour les parois. Ce phénomène d'accrochage des parois contribue majoritairement au processus d'aimantation hystérétique.

De plus, les parois n'étant pas rigides, elles peuvent se déformer sur les sites d'ancrage. Ainsi, si l'augmentation du champ extérieur n'est pas suffisante pour décrocher la paroi, celle-ci se déformera sans entraîner de variation brutale pour

l'aimantation. Si le champ diminue jusqu'à la valeur correspondant au début de la déformation de la paroi, celle-ci reprend sa position initiale.

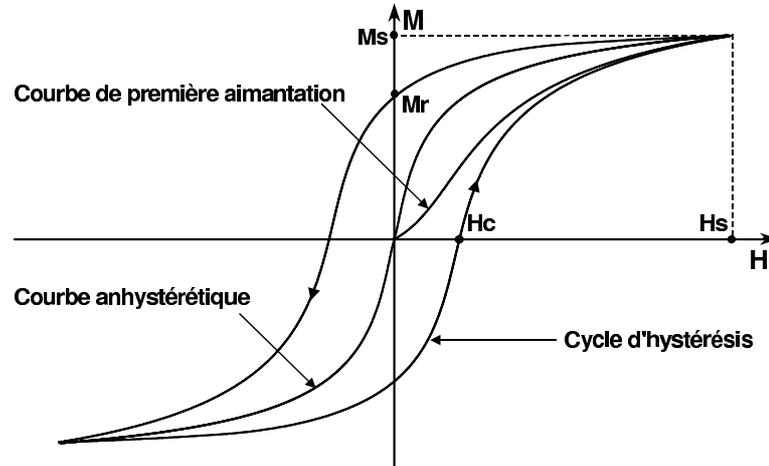


FIG. 1.12 - Cycle d'hystérésis, courbes de première aimantation et anhystérétique.

A l'échelle macroscopique, les deux contributions précédentes (sauts et déformations de parois) donnent lieu à un comportement hystérétique du matériau ferromagnétique. On définit par  $M(H)$  la loi de comportement hystérétique du matériau où  $H$  est l'excitation et  $M$  la réponse.

Si l'état initial du matériau est désaimanté, la loi de comportement  $M(H)$  va décrire la courbe de première aimantation tant que le champ  $H$  sera croissant. On remarque qu'au-delà d'un certain champ d'excitation  $H_s$ , l'aimantation varie très peu et tend asymptotiquement vers une valeur  $M_s$  appelée aimantation à saturation. Dans cet état, il n'existe plus de structure en domaines dans le système et le processus d'aimantation va consister en la rotation des moments magnétiques, qui se trouvent selon les directions de facile aimantation, vers la direction du champ magnétique extérieur. Une fois que le champ  $H$  commence à décroître, l'aimantation suit une courbe  $M(H)$  qui s'écarte de la courbe de première aimantation. On observe aussi que le parcours de  $M$  n'est pas le même selon que le champ est croissant ou décroissant. La totalité du parcours (une période du champ d'excitation) constitue le cycle d'hystérésis (figure 1.12). En plus du couple de saturation  $(H_s, M_s)$ , il existe deux autres points remarquables du cycle d'hystérésis : le champ coercitif  $H_c$ , champ pour lequel l'aimantation s'annule, et l'aimantation rémanente  $M_r$ , aimantation pour laquelle le champ est nul.

En l'absence de phénomène d'hystérésis, donc dans un matériau idéal sans impuretés où le déplacement des parois est réversible, la loi de comportement magnétique

du matériau est la courbe anhystérétique (figure 1.12), qui est donnée par l'équation (1.50) dans la théorie du champ moléculaire. Toutefois, ce type d'équation peut quand même donner lieu à un comportement hystérétique particulier, lié au couplage entre les moments magnétiques atomiques. Nous décrirons en détail ce cas dans le cadre du modèle d'Ising au deuxième chapitre (2.2.1).

### 1.4.6 Classification des matériaux ferromagnétiques

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressé de manière générale au comportement hystérétique des matériaux ferromagnétiques. Cependant, il faut noter qu'il existe de grandes disparités dans la loi de comportement d'un matériau à un autre. Ces différences se situent au niveau de plusieurs paramètres comme les plus notables : l'aimantation à saturation, l'aimantation rémanente, le champ coercitif, l'inclinaison et la surface du cycle d'hystérésis. Toutefois, on peut distinguer deux familles de matériaux magnétiques utilisées en génie électrique : les matériaux durs et les matériaux doux (figure 1.13). La classe de chaque type de matériau repose essentiellement sur les valeurs du champ coercitif et de l'aimantation rémanente qui lui sont associées.

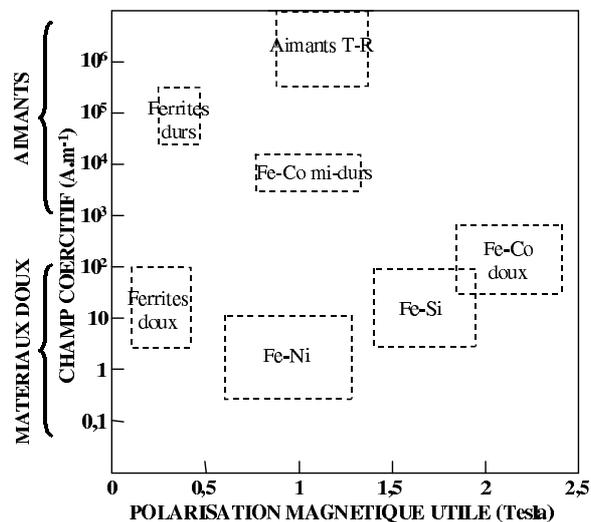


FIG. 1.13 - Les grandes classes de matériaux magnétiques industriels [21].

- Les matériaux durs

Dans ce type de matériaux, l'aimantation rémanente et le champ coercitif sont les paramètres physiques essentiels. En effet, ils possèdent une aimantation rémanente  $M_r$  très importante. En général, celle-ci est très difficile à annuler puisque  $H_c$  est aussi très important. Les matériaux magnétiques présentant ces propriétés sont souvent utilisés pour des applications de type aimants permanents. Dans ce cas, le cycle d'hystérésis est très large ( $H_c \geq 10^4 A/m$ ) et, dans le cas d'applications à aimants permanents,  $H_c$  devient le champ démagnétisant à ne pas dépasser.

- *Les matériaux doux*

Les matériaux doux possèdent la capacité de réagir à de faibles champs d'excitation. Ainsi, la susceptibilité initiale est très importante. De plus, leur aimantation rémanente est facile à annuler puisque  $H_c$  n'est pas très important. En effet, le cycle d'hystérésis associé à ce type de matériaux est étroit, voire même quasiment inexistant ( $H_c \leq 100 A/m$ ). Les matériaux magnétiques possédant ces propriétés sont très utilisés dans les applications où il est nécessaire de guider le flux magnétique (transformateurs ou moteurs). Les tôles de type FeSi sont les plus utilisées dans ce domaine.

### 1.4.7 Les pertes dans la matière

Tout système à base de matériaux magnétiques soumis à un champ d'excitation extérieur variable, subit des pertes énergétiques appelées pertes fer. On distingue deux phénomènes physiques principaux à l'origine de ces pertes : les pertes par hystérésis (déplacement de parois) et les pertes par courants de Foucault. Il faut toutefois noter que les pertes ont souvent la même origine, à savoir des courants induits mais à des échelles différentes (microscopique et macroscopique). En effet, les déplacements de parois entraînent l'apparition de courants induits microscopiques localisés alors que les courants de Foucault sont plutôt liés au fonctionnement en régime dynamique et se développent à l'échelle macroscopique.

On travaillera par la suite avec l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  liée à l'aimantation  $\mathbf{M}$  par l'équation (1.35).

### 1.4.7.1 Expression générale des pertes

Il apparaît que, lors d'un parcours complet du cycle d'hystérésis, l'énergie fournie au noyau pour  $H$  croissant est plus importante que l'énergie récupérée pour  $H$  décroissant : cette différence constitue les pertes par hystérésis.

On montre que, sur un cycle complet, le travail que doit fournir le milieu extérieur pour parcourir un cycle au sein du matériau, vaut par unité de volume ( $J/m^3$ ) :

$$W = \oint H.dB \quad (1.53)$$

Ce travail, converti en chaleur par le processus d'aimantation, représente les pertes totales volumiques par cycle. On en déduit aussi que, sous l'action d'un champ extérieur périodique de fréquence  $f$ , la puissance moyenne totale dissipée ( $W/m^3$ ) par le processus hystérétique est :

$$P_h = f \oint H.dB \quad (1.54)$$

Il faut noter que la forme du cycle peut fortement évoluer en régime dynamique, en conséquence de quoi le terme  $\oint H.dB$  dépend aussi de la fréquence. Dans la suite, nous allons décrire l'origine physique de ces pertes en distinguant le régime statique du régime dynamique. Nous introduirons ainsi de manière qualitative l'origine de ces pertes au niveau microscopique et macroscopique.

### 1.4.7.2 Les pertes en régime statique

On entend par régime statique l'absence de phénomènes dynamiques dus, entre autre, à l'apparition des courants de Foucault lorsque le matériau est soumis à une excitation fortement variable dans le temps. Les pertes par hystérésis en régime statique sont donc uniquement liées, de manière intrinsèque, aux propriétés physiques du matériau et à sa géométrie. Le phénomène d'hystérésis peut être expliqué à partir d'une fonction d'opposition (Annexe A) qui est liée à l'existence d'impuretés et de défauts au sein du système magnétique. On a vu que la présence de pôles magnétiques produit un champ démagnétisant qui s'oppose au champ extérieur. Ainsi, le retard des variations de l'aimantation  $M$  par rapport aux variations du champ magnétique  $H$  en régime statique est principalement dû à l'existence, au sein du matériau magnétique, d'un champ de blocage  $H_b$  induit par les deux phénomènes précédemment décrits.

Sur la figure 1.14, l'évolution du champ de blocage est donnée en fonction de la position  $x$  de la paroi dans le matériau. Ce champ s'oppose au déplacement des parois qui sont donc le lieu des variations de l'énergie magnétostatique. En effet, les parois se heurtent à des barrières de potentiel qu'elles ne franchissent qu'avec l'apport d'une énergie supplémentaire. Le champ extérieur  $H$  doit donc être supérieur au champ de blocage  $H_b$  régnant localement sur la paroi pour permettre à celle-ci de se mouvoir.

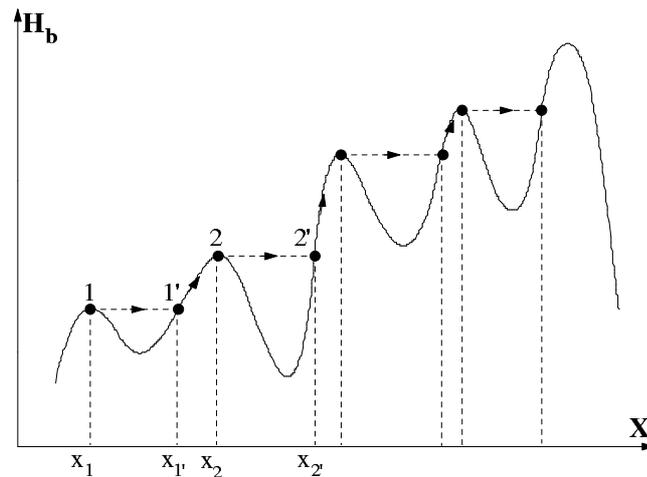


FIG. 1.14 - Champ de blocage en fonction de la position  $x$  de la paroi en champ extérieur croissant.

Comme indiqué au paragraphe 1.4.5.1, les déplacements de parois ne se font pas de manière continue mais par sauts brusques d'un site d'accrochage à un autre (sauts de Barkhausen). Ceux-ci engendrent donc des pertes ayant pour origine le développement de courants induits microscopiques localisés (figure 1.15) qui entraînent des variations de flux locales.

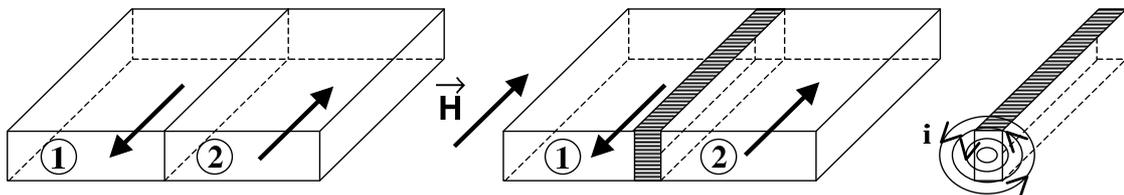


FIG. 1.15 - Apparition de courants induits locaux lors du déplacement de parois [23].

Sur la figure 1.15, on considère deux domaines 1 et 2 séparés par une paroi à  $180^\circ$ , i.e. d'aimantations opposées, soumis à un champ extérieur  $\mathbf{H}$ . Le domaine 2, dont l'aimantation est dans le même sens que le champ extérieur, gagne en volume par saut brusque de la paroi et il apparaît des courants induits locaux qui s'opposent

à la variation brutale d'aimantation. Nous développons dans le paragraphe suivant la théorie de Kittel sur le déplacement d'une paroi [24].

### 1.4.7.3 Les pertes par dynamique de parois

Considérons 2 domaines séparés par une paroi à  $180^\circ$ . La dynamique d'une telle paroi dans un circuit magnétique fermé d'épaisseur  $e$ , et découpé dans un monocristal en alliage FeSi (figure 1.16), a fait l'objet d'une étude de H.J. Williams et C. Kittel en 1950 [24].

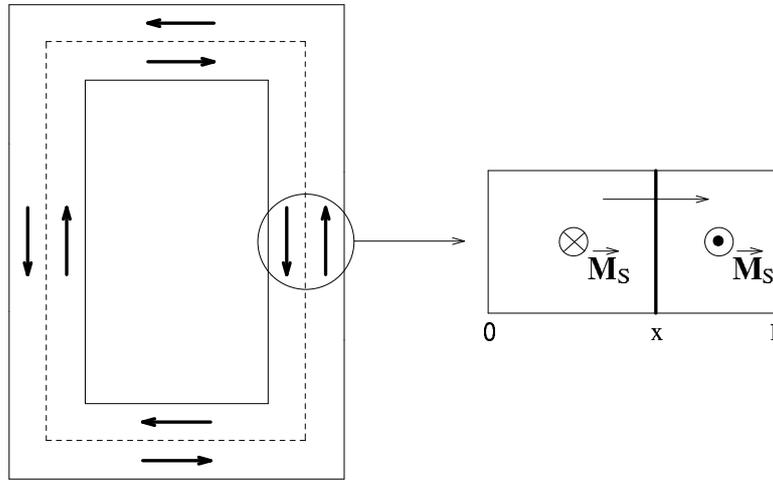


FIG. 1.16 - Système de deux domaines séparés par une paroi à  $180^\circ$ .

Ils postulent que lorsqu'un matériau ferromagnétique conducteur est soumis à un champ extérieur, celui-ci subit un freinage visqueux dont l'origine est l'apparition de courants induits lors du déplacement de la paroi. La dynamique de cette paroi est régie par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \eta[H_{surf}(t) - H_0] \text{ si } H_{surf} > H_0 \\ &= \eta[H_{surf}(t) + H_0] \text{ si } H_{surf} < -H_0 \end{aligned} \quad (1.55)$$

où  $H_{surf}(t)$  est le champ d'excitation régnant à la surface du système,  $H_0$  un champ seuil et  $\eta$  le coefficient de mobilité de paroi ( $A^{-1} \cdot m^2 \cdot s^{-1}$ ). Dans le cas particulier où  $0 < H_{surf} < H_0$ , la paroi reste immobile.

L'état d'aimantation du système est entièrement défini par la position  $x$  de la paroi. Le coefficient de mobilité  $\eta$ , qu'on peut assimiler au facteur d'amortissement dû aux courants induits, est donné par :

$$\eta = \frac{1}{2\mu_0 M_s \sigma G e} \quad (1.56)$$

où  $\sigma$  est la conductivité électrique et  $G$  est une constante de valeur 0,1356. La variation temporelle de l'aimantation totale dans le cadre de largeur  $l$  est proportionnelle à la variation temporelle du déplacement (équation 1.55) de la paroi :

$$\frac{dM}{dt} = \frac{2M_s}{l} \frac{dx}{dt} \quad (1.57)$$

Dans le cas d'une paroi de Bloch évoluant au sein d'un matériau composé de plusieurs domaines de Weiss, les phénomènes qui entrent en jeu sont plus complexes. Néanmoins, on peut généraliser le modèle d'une paroi isolée donné par l'équation (1.55) à une paroi subissant l'influence des autres parois qui constituent le système magnétique. D'où l'équation régissant le déplacement d'une telle paroi :

$$\frac{dx}{dt} = \eta[H(t) - H_b] \quad (1.58)$$

Le champ seuil  $H_0$  de l'équation (1.55) est remplacé par le champ de blocage  $H_b$ , introduit au paragraphe 1.4.7.2, tel que le champ  $H(t)$  agissant localement sur la paroi vérifie :

$$\begin{aligned} H(t) &= H_{surf}(t) - H_i(t) \\ \text{et } H(t) &> H_b(x, t) \end{aligned} \quad (1.59)$$

Le champ  $H_i(t)$  est le champ dû aux courants induits localisés qui sont la conséquence du mouvement des autres parois constituant le système magnétique. Ainsi, on montre que le taux de variation du champ surfacique  $H_{surf}(t)$  conduit à une force de frottement, assimilable à un amortissement visqueux, qui s'oppose aux mouvements des parois de Bloch.

Toutefois, il faut noter que dans les matériaux magnétiques à très faible conductivité électrique où il n'existe pas de freinage visqueux dû à des courants induits, la mobilité des parois n'est pas infinie. En effet, certaines forces de frottement, telle que le couplage des moments magnétiques atomiques cité précédemment, qui étaient noyées par l'action des courants induits, deviennent prépondérantes dans ce cas. Nous verrons au 2<sup>ème</sup> chapitre comment mettre en évidence ce phénomène.

#### 1.4.7.4 Les pertes par courants de Foucault

En régime dynamique, en plus des pertes qui trouvent leurs origines dans le processus statique et les courants induits microscopiques, il existe aussi des courants macroscopiques qui se développent dans l'ensemble du système et directement liés à la conductivité du matériau considéré.

En effet, le champ variable auquel il est soumis engendre une circulation de courant, dont on peut voir très simplement qu'elle se fait selon les sections droites du noyau (figure 1.17). L'utilisation de matériaux magnétiques à résistivité très élevée, les ferrites par exemple, permet de réduire les pertes ayant pour origine ces courants induits macroscopiques. Pour des matériaux tels que les tôles magnétiques à base de fer, la solution classique consiste à feuilletter le matériau afin de réduire ces courants macroscopiques. En effet, la circulation des courants de Foucault se faisant selon les sections droites, ce type de procédé augmente la résistance apparente dans l'épaisseur de la tôle. On peut aussi réduire la conductivité de tels matériaux en y adjoignant des impuretés telles que le Silicium dans les tôles FeSi ou le Nickel dans les tôles FeNi.

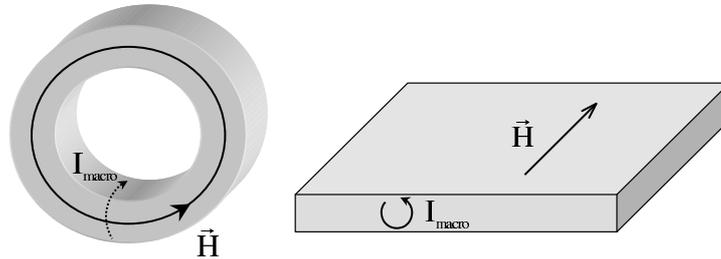


FIG. 1.17 - Apparition de courants induits dans les sections droites d'un échantillon torique et d'une plaque de tôle.

En régime dynamique, les courants de Foucault produisent un gonflement du cycle d'hystérésis plus ou moins notable selon le matériau étudié. Sur la figure 1.18, un exemple de comportement en régime dynamique est présenté.

Selon le principe de décomposition des pertes introduit par Bertotti [26], nous pouvons séparer les pertes totales en trois contributions telles que :

$$P_{moy} = P_{hyst} + P_{cl} + P_{exc} \quad (1.60)$$

où  $P_{hyst}$  représente les pertes statiques par hystérésis,  $P_{cl}$  représente les pertes classiques par courants induits macroscopiques et  $P_{exc}$  représente la contribution des pertes par excès qui sont liées au comportement dynamique des parois.

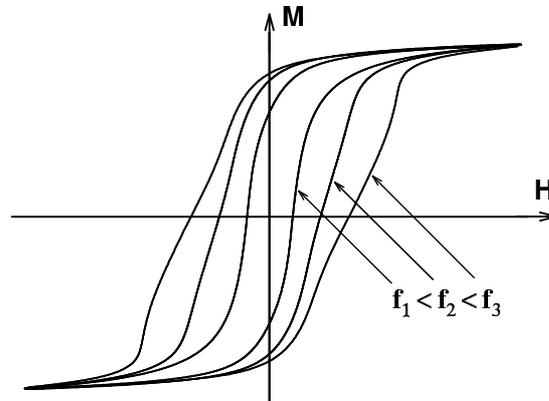


FIG. 1.18 - Gonflement du cycle d'hystérésis en régime dynamique.

## 1.5 Dispositif expérimental

Dans cette dernière partie du premier chapitre, nous allons présenter le banc expérimental qui a été développé pour la caractérisation des matériaux ferromagnétiques.

### 1.5.1 Matériaux étudiés

Le critère de choix des matériaux est principalement basé sur leurs lois de comportement. En effet, afin de mieux tester et comparer la robustesse des modèles utilisés (présentés aux 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> chapitres), les matériaux étudiés se devaient d'avoir des lois de comportement sensiblement différentes en termes de niveau d'induction, de forme du cycle d'hystérésis mais aussi de comportement en régime dynamique. Le choix s'est porté sur 3 matériaux qui sont :

- des ferrites,
- des tôles FeSi,
- des poudres de fer

Les ferrites sont des matériaux magnétiques doux oxyde-céramiques (cristaux mixtes de  $Fe_2O_3$ ,  $MnO$  et  $ZnO$ ). Contrairement à la plupart des métaux dont les résistivités sont de l'ordre de  $10^{-7}$  à  $10^{-6} \Omega.m$ , les ferrites ont des résistivités de 1 à  $10^5 \Omega.m$ . Dans ce cas, en régime dynamique, les courants de Foucault peuvent être le plus souvent négligés. C'est pourquoi, ce matériau est utilisé dans les montages

d'électronique de puissance où les fréquences de travail sont très élevées (plusieurs dizaines de  $kHz$ ). Les caractéristiques physiques des ferrites N30 (Siemens) étudiés dans le cadre de ce travail, sont données sur le tableau 1.4.

Les tôles sont quant à elles le matériau le plus utilisé pour la fabrication des machines électriques. Etant donné que ces matériaux sont soumis, dans la plupart des applications, à des fréquences de travail industrielles (50 et 60  $Hz$ ), ils doivent présenter des pertes minimales à ces fréquences afin d'optimiser au mieux le rendement des machines. Ceci conduit à des épaisseurs de tôles de l'ordre de quelques dixièmes de millimètres. Dans cette étude, nous avons utilisé des tôles UGINE (Fe V 400 - 50 HA) d'épaisseur 0,5 mm à grains non orientés. Les caractéristiques principales des tôles sont données sur le tableau 1.4.

Enfin, le troisième matériau étudié a été, jusqu'à il y a quelques années, rarement utilisé dans le domaine du génie électrique [25]. En effet, les évolutions récentes en termes de procédés de fabrication de poudres de fer, ont permis de développer des matériaux offrant de meilleures performances magnétiques pour des applications électrotechniques. Dans leur composition, les particules de fer pur ( $75 \mu m$  de dimension moyenne) sont isolées électriquement par une couche d'isolant afin de limiter le développement de courants de Foucault. La mise en forme des pièces par compression se fait généralement par agglomération avec un liant, ce qui permet de réaliser des formes relativement complexes. Ces matériaux autorisent une circulation du flux dans les trois dimensions, ce qui permet de reconsidérer la structure des machines électriques (le flux ne circule plus dans un plan). Néanmoins, l'existence d'entrefer entre les particules induit des performances magnétiques moindres (par rapport aux tôles). Les poudres de fer étudiées sont fabriquées par Quebec Metal Powder (type ATOMET EM1). Nous donnons aussi pour ce matériau quelques caractéristiques physiques intéressantes sur le tableau 1.4.

**TAB. 1.4** - *Caractéristiques physiques principales des matériaux étudiés.*

Matériaux	$T_c$ ( $^{\circ}C$ )	Résistivité ( $\Omega.m$ )	Masse volumique ( $kg.m^{-3}$ )	$B_r$ (Tesla)	$H_c$ ( $A.m^{-1}$ )	Pertes à 50Hz ( $W.kg^{-1}$ )
Ferrites N30	130	0,5	4800	0,085	11	0,11 (0,33 Tesla)
Tôles FeSi (3% Si)	400	$0,5.10^{-6}$	7650	0,8	55	3,3 (1,4 Tesla)
Poudres de fer	n.a.	$1890.10^{-6}$	7190	0,22	425	10 (1,1 Tesla)

### 1.5.2 Le banc expérimental

Afin de disposer de mesures expérimentales nécessaires à l'identification des modèles qui vont être présentés aux 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> chapitres, nous avons développé un banc expérimental (figure 1.19). Celui-ci est constitué de plusieurs appareils pour la mesure et le contrôle. Nous avons choisi la méthode de caractérisation basée sur l'étude d'un échantillon torique supportant un bobinage primaire et un bobinage secondaire. Un système d'alimentation permet d'imposer des formes d'ondes arbitraires de courant ou de tension au primaire. Ainsi, l'excitation  $H(t)$  est déterminée à partir de la mesure du courant  $I(t)$  au primaire (théorème d'Ampère, équation (1.61)) et l'induction  $B(t)$  à partir de l'intégration de la mesure de la tension  $V_s(t)$  au secondaire (loi de Faraday, équation (1.62)).

$$H_{moy}(t) = \frac{n_1 I(t)}{l_{moy}} \quad (1.61)$$

$$B(t) = -\frac{1}{n_2 S} \int V_s(t) dt \quad (1.62)$$

où  $n_1$  et  $n_2$  désignent respectivement les nombres de spires des bobinages primaire et secondaire.  $S$  est la section droite de l'échantillon torique.  $H_{moy}(t)$  désigne le champ moyen sur le parcours moyen  $l_{moy}$  (i.e. le périmètre moyen du tore). Celui-ci est déterminé à partir de l'expression suivante :

$$l_{moy} = 2\pi \left[ \frac{(R_2 - R_1)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right] \quad (1.63)$$

où  $R_1$  et  $R_2$  désignent respectivement les rayons intérieur et extérieur du tore.

Enfin, l'acquisition de ces grandeurs s'effectue via un oscilloscope numérique (12 bits de résolution verticale avec une profondeur mémoire pouvant atteindre 20000 échantillons par voie). Les données sont ensuite transférées à un PC pour le traitement. Ce dernier assure par ailleurs le pilotage du générateur et de l'oscilloscope.

Dans la suite, nous allons étudier des matériaux ferromagnétiques en régimes statique et dynamique. Dans le cas du régime statique, étant donnée les caractéristiques magnétiques différentes de chaque matériau, il faut fixer une fréquence en-dessous de laquelle les effets dynamiques peuvent être négligés. Les ferrites ne présentent pas de problème particulier puisque les phénomènes dynamiques ne sont mis en évidence qu'à plusieurs dizaines de  $kHz$ . Par contre, les tôles FeSi présentent un

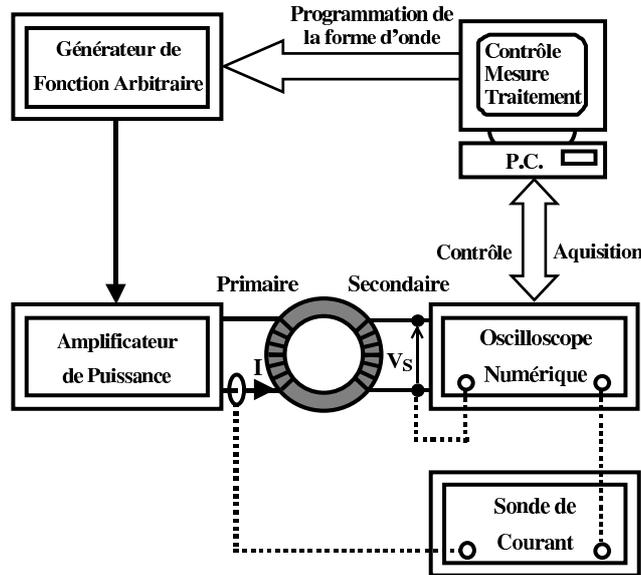


FIG. 1.19 - Schéma synoptique du banc expérimental.

comportement dynamique non négligeable pour des fréquences de travail de l'ordre de quelques  $Hz$ . Enfin, la loi de comportement des poudres de fer reste très stable jusqu'à plusieurs centaines de  $Hz$ . Nous fixons donc pour l'étude en régime statique, une fréquence de travail égale à  $0,5Hz$ .

D'autre part, dans le cadre de cette étude en régime statique, le banc expérimental ne dispose pas de système d'asservissement du courant ou de la tension. Toutefois, les impédances d'entrée des trois échantillons étant inférieures à  $1\text{ Ohm}$ , l'ajout d'une résistance de forte valeur ( $R=100\text{ Ohm}$ ) permet d'obtenir un courant primaire de forme sinusoïdale. Concernant l'étude en régime dynamique, les formes d'ondes obtenues expérimentalement sont utilisées pour l'identification des modèles.



# Chapitre 2

## Etude des modèles statiques

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons la description de deux types de modèles décrivant le phénomène d'hystérésis :

- les modèles microscopiques avec le modèle d'Ising [27],
- les modèles macroscopiques avec les modèles de Preisach [28] et de Jiles-Atherton [29].

Tout d'abord, nous présentons le modèle d'Ising qui décrit le ferromagnétisme à l'échelle atomique comme la conséquence de l'existence d'une interaction d'échange entre les moments magnétiques atomiques proches voisins. Nous décrirons le processus qui donne naissance à une loi de comportement hystérétique et nous analyserons les résultats obtenus. Ensuite, nous aborderons l'étude des deux modèles macroscopiques, à savoir les modèles de Preisach et de Jiles-Atherton. Ceux-ci font l'objet d'une étude plus approfondie pour la description du phénomène d'hystérésis tel que rencontré dans les matériaux employés en génie électrique.

Au chapitre précédent, nous avons vu que, selon la formulation utilisée dans le code de calcul éléments finis, il est nécessaire de disposer soit d'une loi de comportement  $M(H)$  (formulation en potentiel scalaire), soit d'une loi de comportement modèle  $M(B)$  (formulation en potentiel vecteur). Dans leurs formes d'origine, les deux modèles macroscopiques permettent de calculer l'aimantation à partir du champ magnétique  $H$ . Toutefois, nous montrerons que nous pouvons déduire une forme  $M(B)$  à partir des mêmes équations que celles utilisées pour les modèles  $M(H)$ .

Dans le cadre de ce chapitre, les conditions d'utilisation de ces modèles se réduisent à une étude en régime quasi-statique du comportement des matériaux magnétiques. Le travail de comparaison repose essentiellement sur l'étude et la caractérisation des matériaux présentés au premier chapitre qui sont :

- des ferrites N30,
- des tôles FeSi,
- des poudres de fer.

## 2.2 Présentation des Modèles

### 2.2.1 Le modèle d'Ising

Le comportement magnétique d'un matériau à l'échelle macroscopique trouve son origine dans ses propriétés microscopiques. Pour rendre compte du comportement macroscopique, il est nécessaire de prendre en compte un grand nombre d'éléments microscopiques et les lois physiques qui les régissent. Dans le cas qui nous intéresse, nous considérons un ensemble de moments magnétiques  $S_i$  dont la somme donne l'aimantation macroscopique  $M$ . A l'échelle microscopique, le comportement de ces moments est régi par les lois de la physique statistique.

Ainsi, en reprenant la description du ferromagnétisme à l'échelle atomique présentée au paragraphe 1.4.4.2, nous pouvons faire quelques hypothèses simplificatrices qui aboutissent au modèle d'Ising. Ce modèle, proposé en 1927, est à l'origine destiné à la description du phénomène ferromagnétique à l'échelle microscopique.

Dans ce modèle, on considère un réseau cristallin 2D régulier et constitué de  $N$  moments magnétiques de même nature. De plus, dans le modèle simple à deux niveaux, chaque noyau  $i$  du réseau possède un moment magnétique unitaire  $S_i$  pouvant prendre deux orientations possibles ( $S_i = \pm 1$ ). Bien entendu, cette description constitue une vision restrictive de la réalité puisque les moments magnétiques peuvent avoir plusieurs directions d'orientation possibles et des valeurs, bien que quantifiées, non unitaires et sur plusieurs niveaux. Néanmoins, un système magnétique tel que décrit par le modèle d'Ising est donné sur la figure 2.1. Nous notons que ce modèle est souvent utilisé pour représenter le comportement des particules magnétiques qu'on retrouve sur les films magnétiques minces destinés à l'enregistrement magnétique [30]. En effet, les hypothèses du modèle d'Ising peuvent être transposées à un tel système qui possède une structure 2D et une forte direction de

facile aimantation pour les particules magnétiques. Nous nous proposons d'étudier ce modèle afin de déterminer dans quelle mesure il peut (ou pas) être adapté pour une étude des matériaux magnétiques utilisés en électrotechnique.

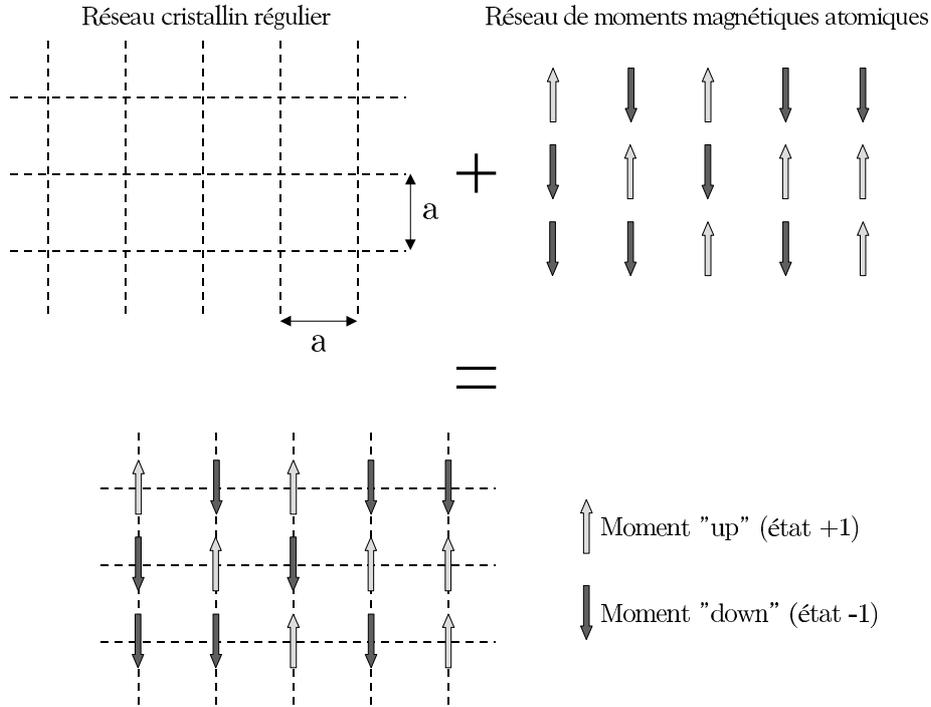


FIG. 2.1 - Réseau cristallin et moments magnétiques atomiques associés.

### 2.2.1.1 Équation du modèle

Nous ne considérerons que des variables scalaires puisque dans ce modèle le champ extérieur est supposé parallèle à la direction d'orientation des moments magnétiques. Par conséquent, à partir de l'expression de l'hamiltonien d'un système de moments magnétiques donné par l'équation 1.47 du paragraphe 1.4.4.2, le système ferromagnétique d'Ising soumis à un champ extérieur  $H$  a pour hamiltonien<sup>1</sup> [27] :

$$\mathcal{H}_{Ising} = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} S_i S_j - H \sum_{i=1}^N S_i \quad (2.1)$$

Afin de simplifier l'expression de cet hamiltonien, les interactions entre moments magnétiques sont supposées isotropes, c'est à dire qu'on considère que tous les sites du cristal sont équivalents. Ceci conduit à un facteur de couplage magnétique  $J$

<sup>1</sup>le modèle vectoriel a disparu de cette expression puisque on ne considère qu'une direction

identique pour toutes les paires  $(i, j)$ . D'autre part, l'énergie d'échange étant principalement due aux interactions entre les moments magnétiques proches voisins (figure 2.2), la sommation de la contribution des interactions de paires est effectuée sur les proches voisins. L'hamiltonien du système devient donc :

$$\mathcal{H}_{I_{sing}} = -J \sum_{i=1}^N \sum_{j \text{ voisins}} S_i S_j - H \sum_{i=1}^N S_i = - \sum_{i=1}^N S_i (H + J \sum_{j \text{ voisins}} S_j) \quad (2.2)$$

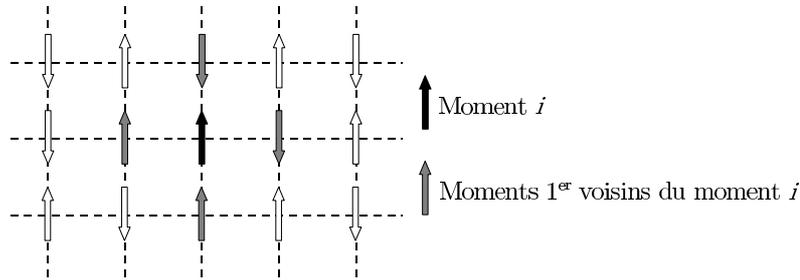


FIG. 2.2 - Moments magnétiques premiers voisins.

Le facteur de couplage  $J$  est bien entendu positif puisque le système considéré est ferromagnétique. Ainsi, la connaissance de l'état de chaque moment magnétique permet de définir l'état global du système. Toutefois, sous l'action d'un champ extérieur, les moments magnétiques peuvent basculer d'un état vers un autre. La dynamique de basculement d'un moment magnétique donné va dépendre du champ local auquel il est soumis. Si on reprend l'expression précédente de l'hamiltonien, nous pouvons en déduire le champ  $H_i$  auquel est soumis un moment magnétique  $i$  de la part des  $N - 1$  autres moments magnétiques et du champ extérieur :

$$H_i = H + J \sum_{j \text{ voisins}} S_j \quad (2.3)$$

A partir de cette équation, nous pouvons déterminer l'état d'un moment magnétique qui permet de minimiser l'hamiltonien (2.2) :

- si  $H_i > 0$  le moment  $S_i$  est "up" (+1)
- si  $H_i < 0$  le moment  $S_i$  est "down" (-1)

Une fois l'état de chaque moment magnétique connu, l'aimantation totale normalisée du système peut-être déterminée à partir de l'expression suivante :

$$M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i \quad (2.4)$$

### 2.2.1.2 Introduction de l'agitation thermique

Dans la description précédente, nous n'avons pas pris en compte le désordre introduit par l'agitation thermique. Or, dans un système réel, la température joue un rôle important dans le basculement des moments magnétiques. Il est donc nécessaire de compléter ce modèle par l'introduction de l'effet thermique. Ainsi, selon la physique statistique, un système plongé dans un bain thermique peut-être décrit par la dynamique de Glauber [31]. La probabilité  $P(S_i \rightarrow -S_i)$  pour que le moment magnétique  $S_i$  bascule vers l'état  $-S_i$  est donnée par :

$$P(S_i \rightarrow -S_i) = \frac{e^{-\beta\Delta E_i}}{1 + e^{-\beta\Delta E_i}} \quad (2.5)$$

où  $\beta = 1/kT$  avec  $k$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température (en Kelvin).  $\Delta E_i$  est la variation d'énergie du système si le moment magnétique  $S_i$  bascule. Sur la figure 2.3, on donne des exemples de variation d'énergie pour trois configurations possibles des proches voisins. De manière générale, nous pouvons écrire la variation d'énergie du moment magnétique comme suit :

$$\Delta E_i = 2S_i \left( H + J \sum_{j \text{ voisins}} S_j \right) \quad (2.6)$$

où les valeurs de moments magnétiques  $S_j$  sont celles d'avant le basculement. Par exemple, dans le premier cas de la figure 2.3, on représente l'état du moment magnétique  $i$  et de ses 1<sup>er</sup> voisins avant le basculement. L'énergie locale avant basculement du moment  $i$  vaut  $E_i^{av} = -4J - H$  et si le moment  $i$  bascule cette énergie vaudra  $E_i^{ap} = 4J + H$ , d'où la variation d'énergie  $\Delta E_i = 8J + 2H$ .

De plus, il est à noter que lorsque la température tend vers zéro (équation (2.5)), nous retrouvons le cas de figure où l'agitation thermique n'est pas prise en compte et seule la variation d'énergie locale permet de valider ou non le basculement du moment magnétique considéré. Ainsi, nous avons les deux cas suivants :

- $P(S_i \rightarrow -S_i) \rightarrow 0$  si  $T \rightarrow 0$  et  $\Delta E_i > 0$

- $P(S_i \rightarrow -S_i) \mapsto 1$  si  $T \rightarrow 0$  et  $\Delta E_i < 0$

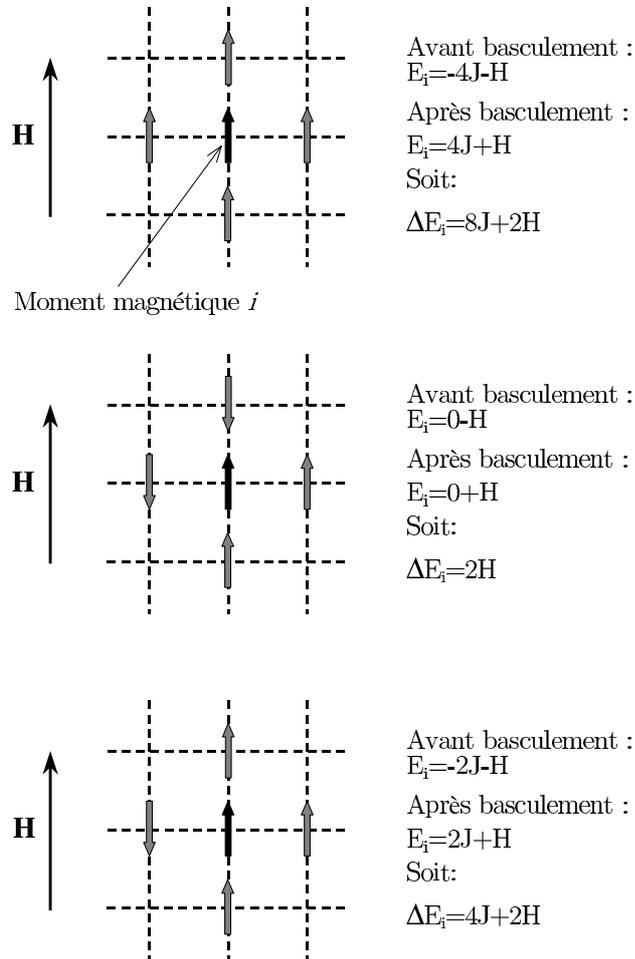


FIG. 2.3 - Exemple de variations d'énergie  $\Delta E_i$  pour un moment magnétique  $i$ .

Il apparaît bien que le basculement d'un moment est régi par le fait que, soit la variation d'énergie locale permet la diminution de l'énergie globale et le moment bascule, soit le moment reste dans son état courant. Par contre, si la température du système est élevée, le basculement des moments magnétiques est conditionné par la statistique de Boltzmann (équation (2.5)). Ainsi, lorsqu'un champ magnétique extérieur est appliqué, en plus du désordre thermique, le basculement d'un moment peut-être la conséquence de deux processus :

- un moment peut basculer suite au basculement de l'un de ses voisins : on dit qu'il participe à un phénomène d'avalanche,

- un moment peut basculer suite à la variation du champ extérieur.

### 2.2.1.3 Algorithme de programmation du modèle

On introduit le fait qu'un moment magnétique bascule si la condition suivante est satisfaite :

$$P(S_i \rightarrow -S_i) > r \quad (2.7)$$

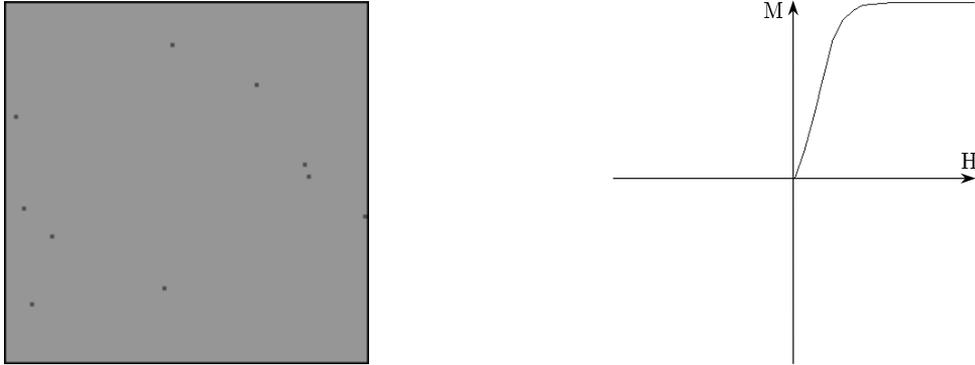
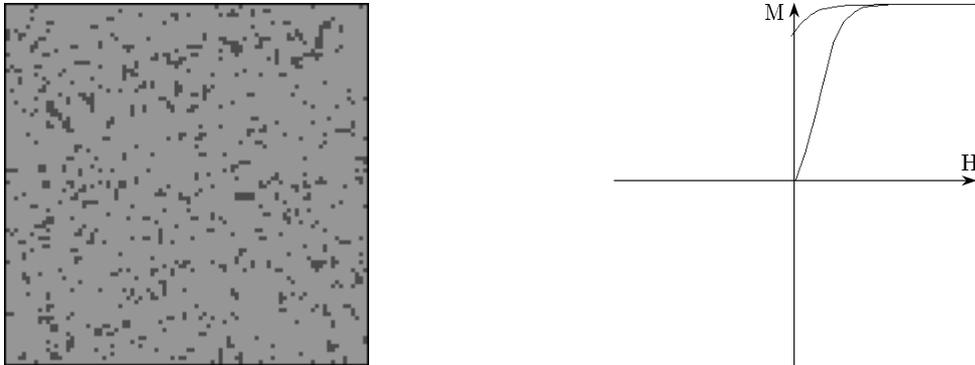
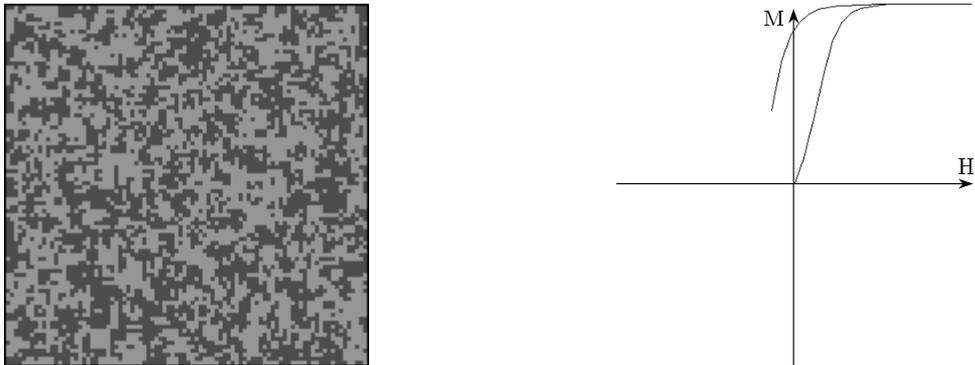
où  $r$  est une fraction indépendante générée au hasard entre 0 et 1. Le nombre de moments magnétiques à mettre en oeuvre dans ce modèle étant assez élevé, nous utilisons l'algorithme du Monte-Carlo d'Ising [32]. Celui-ci consiste à choisir un moment magnétique au hasard (ou de manière systématique) et de vérifier si son basculement est autorisé. Si ce n'est pas le cas, la configuration courante des moments magnétiques est conservée et un autre moment est sélectionné. L'algorithme du Monte-Carlo de Ising tel qu'utilisé dans ce travail est le suivant :

1. choix d'une configuration initiale : état désaimanté du système et  $H = 0$ ,
2. initialisation du compteur  $N = 1$ ,
3. sélection d'un site  $i$  du réseau (au hasard ou de manière systématique),
4. calcul de  $P(S_i \rightarrow -S_i)$ ,
5. génération d'un nombre aléatoire  $r \in [0, 1]$ ,
6. si  $P(S_i \rightarrow -S_i) > r$  alors  $S_i \rightarrow -S_i$  sinon  $S_i \rightarrow S_i$
7. retour en 3. jusqu'à parcours complet de tous les sites (choix systématique) ou  $N$  itérations (choix aléatoire)
8. calcul de l'aimantation  $M = \frac{1}{N} \sum_i^N S_i$  et incrémentation du champ extérieur de  $\Delta H$
9. retour en 2.

Étant donné la nature du modèle, la loi de comportement d'un tel système de moments magnétiques est un cycle d'hystérésis ayant pour origine uniquement les interactions entre les moments. Un exemple de ce processus est représenté pour différents points du cycle d'hystérésis sur les figures 2.4 à 2.9. Dans cette exemple, nous avons considéré un système de moments magnétiques 2D 90x90. Les cases claires correspondent aux moments "up" et les cases sombres aux moments "down".

Analyse des figures 2.4 à 2.9 :

- figure 2.4 : état saturé positif, tous les moments magnétiques sont "up" sauf quelques-uns à cause de l'agitation thermique,

FIG. 2.4 - *État saturé positif.*FIG. 2.5 - *État proche du point rémanent.*FIG. 2.6 - *État intermédiaire à aimantation positive.*

- figure 2.5 : au point de rémanence, peu de moments magnétiques ont basculé et des "clusters" de moments magnétiques "down" commencent à apparaître,
- figures 2.6 à 2.8 : il apparaît le phénomène d'avalanche qui fait croître la taille des "clusters" qui sont "down",
- figure 2.9 : état saturé négatif, tous les moments magnétiques sont "down" sauf

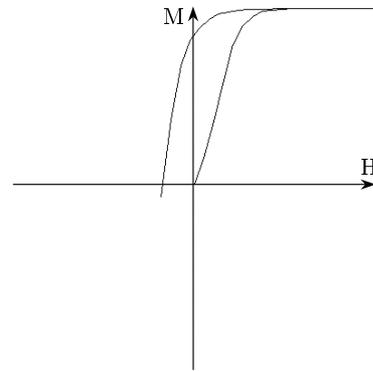
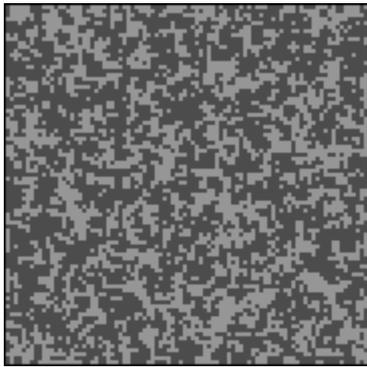


FIG. 2.7 - *État proche du point coercitif.*

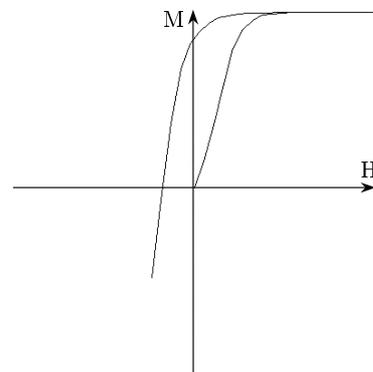
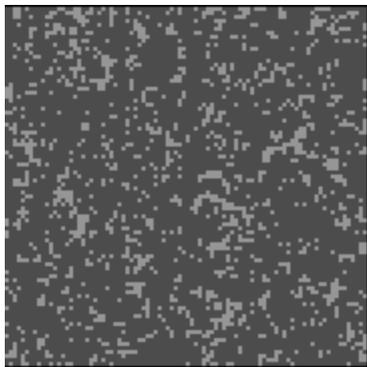


FIG. 2.8 - *État intermédiaire à aimantation négative.*

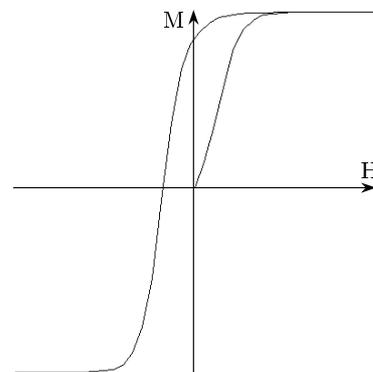
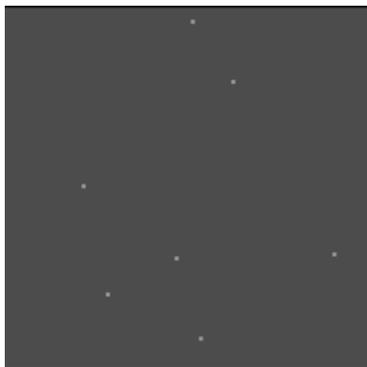


FIG. 2.9 - *État saturé négatif.*

quelques-un à cause de l'agitation thermique.

#### 2.2.1.4 Premiers résultats

Les résultats présentés dans la suite ont été obtenus avec un système d'Ising à 2 dimensions. Afin d'avoir des temps de calcul acceptables, nous sélectionnons un système de moments magnétiques tel que  $N < 10000$ . Les différents paramètres du modèle sont  $\beta$  (donc la température) et  $J$  le couplage entre deux moments proches voisins. Le champ magnétique extérieur appliqué est sinusoïdal :

$$H(\theta) = H_0 \sin(\theta) \quad (2.8)$$

La notion de temps n'apparaît pas directement dans le modèle d'Ising. Le paramètre sur lequel nous pouvons influencer est le nombre d'itérations par période. Le pas est de  $\Delta\theta = \frac{2\pi}{n}$ . Il faut noter que les ordres de grandeur des valeurs de  $J$  et  $\beta$  donnés dans la suite ne sont pas physiques car ils sont issus d'un processus de normalisation. Il s'agit uniquement de paramètres liés à une caractéristique physique, le couplage pour  $J$  et la température pour  $\beta$ . Lors des simulations, il est apparu que le choix de la procédure de balayage des sites (systématique ou aléatoire) n'est pas triviale. En effet, la manière dont on parcourt l'ensemble des moments magnétiques influe sur la forme de l'hystérésis et notamment au niveau de la valeur du champ coercitif. Nous avons choisi de manière arbitraire la sélection aléatoire d'un moment magnétique à chaque pas de calcul. Plusieurs simulations ont été effectuées pour étudier l'influence des paramètres  $\beta$  et  $J$  sur la forme de l'hystérésis. Les résultats obtenus reflètent la réalité physique quant à la loi de comportement d'un système ferromagnétique. En effet, l'augmentation du paramètre de couplage  $J$  entraîne une augmentation du champ coercitif et du champ rémanent (figure 2.10). De même, l'augmentation du paramètre  $\beta$ , donc la diminution de la température, entraîne l'augmentation du champ rémanent (figure 2.11) sans notable variation du champ coercitif. Il apparaît donc que les influences des paramètres  $J$  et  $\beta$  sur le cycle d'hystérésis ne sont pas totalement découplées. Ainsi, une éventuelle détermination des paramètres  $J$  et  $\beta$  pour un champ coercitif et un champ rémanent donnés ne pourra pas se faire de manière indépendante pour chaque paramètre.

D'autre part, d'un point de vue numérique, on constate que le résultat dépend du nombre d'itérations choisi pour une période lors de la résolution. En effet, plus le pas  $\Delta\theta$  est petit et plus le cycle est fin. Sur la figure 2.12, on donne 3 cycles obtenus avec les mêmes paramètres  $J$  et  $\beta$  mais avec des pas de temps différents. La forme d'onde du champ extérieur est choisie sinusoïdale (équation (2.8)).

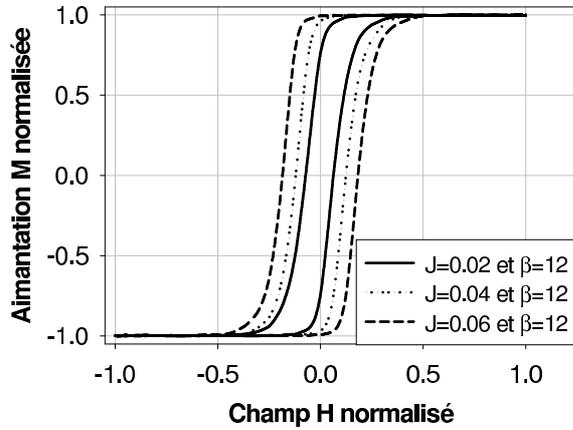


FIG. 2.10 - Influence du paramètre  $J$  sur les champs coercitif et rémanent.

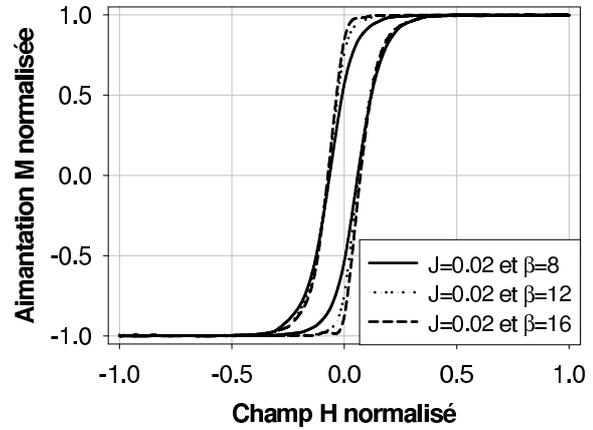


FIG. 2.11 - Influence du paramètre  $\beta$  sur le champ rémanent.

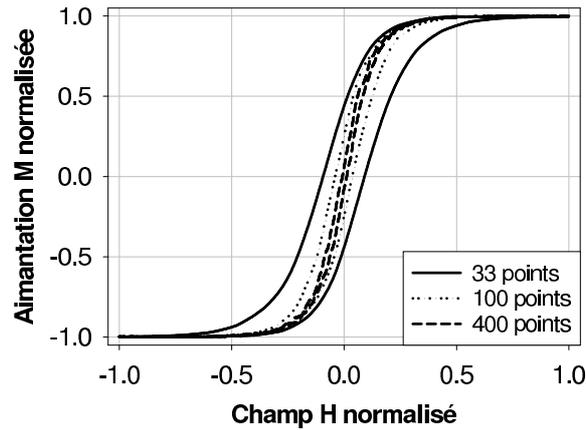


FIG. 2.12 - Influence du pas  $\Delta\theta$  sur la forme du cycle.

L'influence du pas de calcul sur la forme du cycle peut être aisément interprétée. En effet, si les sites du réseau sont plus souvent visités ( $\Delta\theta$  petit) l'état des moments magnétiques sera plus souvent mis à jour alors que dans le cas contraire ( $\Delta\theta$  grand) l'état des moments magnétiques est mis à jour moins souvent. Dans la limite où  $\Delta\theta$  tend vers zéro, cela revient à considérer que nous permettons au système de moments magnétiques d'atteindre son état d'énergie globale minimale. Pour  $\Delta\theta \rightarrow 0$ , nous obtenons une loi de comportement anhystérétique. Pour faire apparaître un phénomène d'hystérésis, il est nécessaire de fixer un  $\Delta\theta$  suffisant. Dans la suite, nous avons fait le choix de fixer  $\Delta\theta = \frac{2\pi}{100}$ , c'est-à-dire 100 points par période.

Enfin, il est à noter que, à cause du caractère statistique et probabiliste intrinsèque au modèle, la reproductibilité des résultats est beaucoup plus fiable si le système est constitué d'un nombre de moments magnétiques plus important. D'après notre expérience ce nombre peut-être fixé, pour un système 2D, à  $N = 2500$  (par exemple un système carré  $50 \times 50$ ).

### Test sur les matériaux étudiés

Afin de tester ce modèle, nous avons déterminé les paramètres  $J$  et  $\beta$  pour des cycles majeurs mesurés sur les matériaux ferrites N30 et tôles FeSi. Bien entendu, il ne s'agit pas ici de représenter le comportement magnétique des ferrites (ou des tôles) par uniquement des basculements de moments magnétiques. Notre but est de définir dans quelle mesure ce modèle peut restituer le phénomène d'hystérésis ayant lieu dans les matériaux ferromagnétiques utilisés en génie électrique. La détermination des deux paramètres a été effectuée à partir d'un balayage dans un intervalle possible de solution. On choisit  $J$  et  $\beta$  de manière à ce que l'écart entre le cycle calculé et le cycle mesuré soit minimal. Les résultats de simulation sont donnés sur les figures 2.13 et 2.14 pour les ferrites et les tôles FeSi.

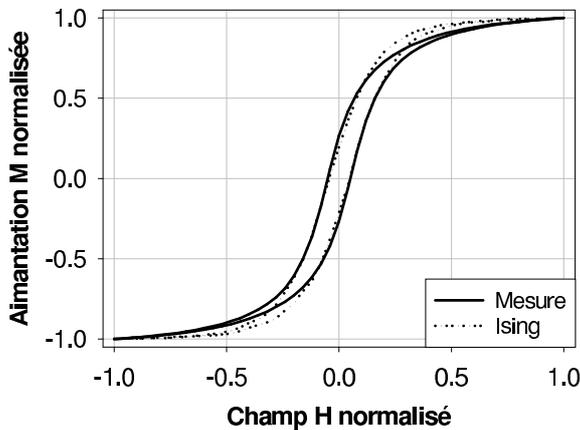


FIG. 2.13 - Simulation par le modèle d'Ising d'un cycle dans le cas des ferrites pour  $J = 0,04$  et  $\beta = 3$ .

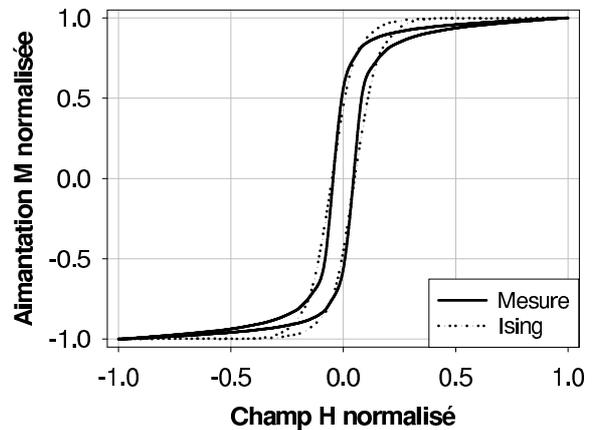


FIG. 2.14 - Simulation par le modèle d'Ising d'un cycle dans le cas des tôles FeSi  $J = 0,025$  et  $\beta = 6,5$ .

Il apparaît sur cette figure que le résultat du modèle d'Ising est loin d'être satisfaisant, notamment au niveau des coudes de basculement du cycle d'hystérésis. En effet, à partir d'un état saturé, le basculement de quelques moments magnétiques

entraîne les moments magnétiques premiers voisins dans le processus de basculement qui va ensuite s'étendre à tout le système. Le phénomène d'avalanche est accompagné de processus de nucléation-croissance, c'est à dire l'apparition de petite zones de basculement de moments magnétiques qui croissent très vite (figures 2.4 à 2.9). C'est pourquoi, le cycle calculé présente des coudes de basculement plus "rapides" que ceux de la mesure.

### 2.2.1.5 Synthèse

Afin d'améliorer la restitution des cycles, nous avons ajouté dans l'expression du hamiltonien un champ magnétique aléatoire [33]. Ce champ rend compte d'un certain désordre existant au sein du système réel qui n'est pas parfait. Nous y avons aussi ajouté la contribution de l'interaction dipolaire qui a lieu à longue portée, contrairement à l'interaction d'échange, via le paramètre  $J$ , qui opère à courte portée entre proches voisins [34]. Le nouveau hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H}_{Ising} = -J \sum_{\langle i,j \rangle \text{ voisins}} S_i S_j - \sum_{i=1}^N [H + h_i] S_i + J_d \sum_{(i,j)} \frac{S_i S_j}{r_{ij}^3} \quad (2.9)$$

où  $h_i$  est le champ magnétique aléatoire sur le site  $i$ ,  $J_d$  le facteur de couplage dipolaire antiferromagnétique et  $r_{ij}$  la distance entre les sites  $i$  et  $j$ . L'introduction du couplage dipolaire antiferromagnétique est destinée à s'opposer à l'effet de basculement trop rapide au niveau des coudes de l'hystérésis. Toutefois, bien que les résultats soient légèrement meilleurs que ceux du modèle initial, ils ne restituent pas avec suffisamment de précision les cycles des ferrites et des tôles. En effet, les phénomènes complexes qui donnent lieu à l'existence et au comportement de l'hystérésis macroscopique ne sont pas pris en compte (Cf. 1<sup>er</sup> chapitre). Ceux-ci concernent principalement le phénomène de déplacement de parois lors du processus d'aimantation et le processus d'aimantation réversible dû à la rotation des moments magnétiques. A cela, s'ajoute les temps de calcul déjà important avec le modèle de départ (environ 1 seconde pour la simulation d'un cycle de 100 points et pour un système de moments 50x50). Néanmoins, bien que n'étant pas adapté pour notre étude, il faut signaler que ce modèle présente des vertus pédagogiques indéniables pour mettre en évidence l'énergie d'échange et l'influence de la température.

Dans la suite, nous abordons les modèles de Preisach et de Jiles-Atherton qui décrivent l'hystérésis à l'échelle macroscopique.

## 2.2.2 Le modèle de Preisach

Nous allons présenter dans la suite le modèle de Preisach tel qu'il est utilisé dans le cadre de la modélisation de l'hystérésis en régime statique. Ensuite, nous aborderons la description de la méthode d'identification associée à ce modèle.

### 2.2.2.1 Définition

Le modèle de Preisach est un modèle phénoménologique proposé par le physicien allemand Frederick Preisach en 1935 pour décrire le phénomène de dissipation d'énergie par hystérésis [28]. Aujourd'hui encore il fait l'objet de nombreuses études pour étendre son domaine d'application. Il est en particulier très utilisé dans le domaine du magnétisme pour la description des matériaux ferromagnétiques.

Dans ce modèle, un système physique hystérétique est décrit comme un ensemble de commutateurs magnétiques bistables dont la réponse non-linéaire présente une forme rectangulaire, appelée aussi hystéron. En présence d'un champ magnétique extérieur  $H$ , chaque commutateur peut basculer vers l'un des états stables (+1 ou -1) de manière abrupte. On note  $\gamma_{a,b} = \pm 1$  (figure 2.15 (a)) un commutateur dont les champs de basculement sont  $a$  et  $b$ . Ainsi, un matériau ferromagnétique est caractérisé par une densité de distribution statistique  $p(a,b)$  des champs de basculement  $(a,b)$ .



FIG. 2.15 - (a) commutateur magnétique (b) plan de Preisach.

L'aimantation totale du système est donnée par :

$$M = M_{sat} \iint_{\Delta} p(a,b) \gamma_{a,b} da db \quad (2.10)$$

Le domaine d'intégration  $\Delta$  est défini à partir de certaines conditions que doivent vérifier les champs de basculement  $a$  et  $b$ . Lorsque  $H > H_{sat}$  tous les commutateurs sont en position de basculement positive et  $M = M_{sat}$ . Il apparaît un phénomène de

saturation de l'aimantation. De la même façon, si  $H < -H_{sat}$  tous les commutateurs sont en position de basculement négative et l'aimantation vaut  $M = -M_{sat}$ . Ces deux hypothèses entraînent les conditions suivantes pour le couple  $(a, b)$  [7] :

$$\begin{aligned} a &\leq H_{sat} \\ b &\geq -H_{sat} \end{aligned}$$

De plus, le phénomène d'hystérésis étant énergétiquement dissipatif, on doit aussi vérifier  $a \geq b$  pour que le cycle d'hystérésis soit toujours parcouru dans le même sens. Ces trois conditions nous permettent de définir le triangle  $\Delta$  (figure 2.15 (b)), appelé aussi triangle de Preisach et chaque couple  $(a, b)$  appartient à ce triangle. L'état désaimanté est représenté par la droite  $b = -a$  dans le triangle de Preisach qui est divisé en deux surfaces égales  $S+$  et  $S-$ . La surface  $S+$  correspond aux couples  $(a, b)$  tels que  $\gamma_{a,b} = +1$  et la surface  $S-$  aux couples  $(a, b)$  tels que  $\gamma_{a,b} = -1$ . Dans le cas général, tout autre état du système est décrit par deux surfaces  $S+$  and  $S-$  séparées par une ligne brisée comme indiqué sur la figure 2.16. L'aimantation totale peut donc être exprimée à l'aide d'intégrales sur ces deux surfaces :

$$M = M_{sat} \left( \iint_{S+} p(a, b) da db - \iint_{S-} p(a, b) da db \right) \quad (2.11)$$

Il faut noter que l'une des principales propriétés de ce modèle est la prise en compte de l'histoire du matériau. La ligne brisée est associée à un vecteur d'histoire qui définit l'état magnétique du système. La première valeur du vecteur d'histoire correspond à l'état initial du système et les autres valeurs regroupent certains extrema atteints par le champ appliqué et la valeur courante du champ. Les composantes du vecteur d'histoire doivent vérifier les relations suivantes [35] :

$$\begin{aligned} H_0 &= 0 \\ H_i &= H \\ \forall j \in [1, i-1] & \quad (H_j - H_{j-1}) \cdot (H_{j+1} - H_j) < 0, \\ & \quad |H_j - H_{j-1}| > |H_{j+1} - H_j| \end{aligned}$$

où  $H_j$  représente les différentes composantes du vecteur d'histoire.

Par exemple, sur la figure 2.16, l'état magnétique est donné par le vecteur d'histoire  $h = \{0, +H_{sat}, H_1, H_2, H\}$ .

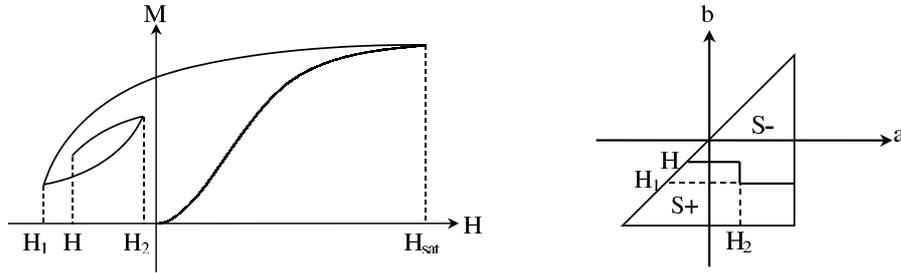


FIG. 2.16 - État magnétique dans le triangle de Preisach.

### 2.2.2.2 Identification de la densité de Preisach

Pour utiliser le modèle de Preisach, il faut connaître l'aimantation à saturation  $M_{sat}$  et la densité de distribution  $p(a, b)$ . Pour chaque nouveau matériau ferromagnétique à modéliser, il faudra identifier  $M_{sat}$  et la fonction  $p(a, b)$ . De nombreux travaux ont porté sur la détermination de cette fonction à partir de mesures expérimentales. Les travaux présentés dans [35] proposent d'utiliser une expression analytique de type gaussienne pour  $p(a, b)$ . La détermination des paramètres peut être effectuée à partir de la mesure d'un cycle d'hystérésis majeur [36]. D'autres expressions peuvent être utilisées pour identifier  $p(a, b)$ , comme une fonction lorentzienne qui semble être particulièrement bien adaptée pour la modélisation de matériaux magnétiques doux [37]. Toutefois, la fonction densité ne doit pas être nécessairement une expression analytique, elle peut être déduite directement à partir de mesures expérimentales.

Ainsi, G. Biorci et D. Pescetti ont proposé une forme pour la fonction densité telle que  $p(a, b) = p_1(a)p_2(b)$  (pas d'interaction entre les champs de basculement  $a$  et  $b$ ) [38]. L'identification de la fonction  $p(a, b)$  est ensuite réalisée en utilisant la courbe de première aimantation ainsi que la branche décroissante du cycle majeur. La courbe de première aimantation est subdivisée en  $N$  intervalles et la courbe descendante en  $2N$  intervalles. Le plan de Preisach est ainsi discrétisé en  $n_e$  éléments. Pour une discrétisation suffisamment fine, les fonctions  $p_1(a)$  et  $p_2(b)$  sont considérées constantes sur chacun des éléments. Nous obtenons un système d'équations à  $3N$  inconnues dont la résolution conduit à  $N$  valeurs de  $p_1(a)$  et  $2N$  valeurs de  $p_2(b)$  qui définissent la fonction de distribution  $p(a, b)$ .

La méthode des cycles centrés proposée dans [39] est également basée sur une discrétisation de la fonction de distribution. La discrétisation est directement liée au nombre de cycles mesurés utilisés pour la caractérisation. En effet, avec ce modèle, le plan de Preisach est décomposé en autant de "sous-plans" qu'il y a de cycles centrés. Cette décomposition permet de construire  $n(2n + 1)$  éléments triangulaires

et quadrangulaires avec  $n$  le nombre de cycles centrés. A partir des mesures expérimentales et des propriétés de symétrie des cycles, la fonction de distribution  $p(a, b)$  peut être calculée dans chaque élément à l'aide d'une approche successive en partant du plus petit "sous-plan".

Les méthodes précédemment décrites requièrent généralement une dérivation et une intégration numériques. Cette procédure entraîne l'ajout d'une erreur numérique en plus de celle due à la mesure. Nous nous proposons dans la suite de développer une méthode d'identification pour le modèle de Preisach qui évite ces opérations numériques. Pour cela, nous allons utiliser la fonction d'Everett [40].

### 2.2.2.3 Expression de l'aimantation à partir de la fonction d'Everett

A partir de la fonction  $p(a, b)$ , la fonction d'Everett peut être définie par l'expression suivante :

$$E(x, y) = M_{sat} \iint_{T(x, y)} p(a, b) da db \quad (2.12)$$

où  $T(x, y)$  est la surface d'un triangle rectangle défini dans le plan de Preisach par  $(x, y)$  les coordonnées de l'angle droit et dont l'hypothénuse est confondue avec la droite  $a = b$  (figure 2.17). Les surfaces  $S+$  et  $S-$  définies au paragraphe 2.2.2.1 peuvent être exprimées comme une combinaison de triangles  $T$  et, si la fonction d'Everett est connue sur l'ensemble du plan de Preisach, l'aimantation peut être obtenue par une combinaison linéaire de plusieurs fonctions d'Everett.

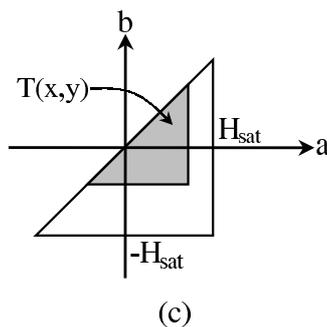


FIG. 2.17 - Triangle  $T(x, y)$  dans le plan de Preisach.

Considérons l'exemple présenté sur la figure 2.16, les surfaces  $S+$  et  $S-$  s'expriment comme suit :

$$S+ = T(H_{sat}, -H_{sat}) - T(H_{sat}, H_1) + T(H_2, H_1) - T(H_2, H) \quad (2.13)$$

$$S- = T(H_{sat}, H_1) - T(H_2, H_1) + T(H_2, H) \quad (2.14)$$

En remplaçant les surfaces d'intégration de l'équation (2.11) par les expressions précédentes, l'aimantation s'écrit :

$$M(H) = E(H_{sat}, -H_{sat}) - 2E(H_{sat}, H_1) + 2E(H_2, H_1) - 2E(H_2, H) \quad (2.15)$$

et peut être réécrite sous la forme :

$$M(H) = M(H_2) - 2E(H_2, H) \quad (2.16)$$

Nous pouvons résumer l'évolution de l'aimantation par :

$$\text{si } H > H_{i-1}, M(H) = M(H_{i-1}) + 2E(H, H_{i-1}) \quad (2.17)$$

$$\text{si } H < H_{i-1}, M(H) = M(H_{i-1}) - 2E(H_{i-1}, H)$$

où  $H_{i-1}$  est l'avant dernière valeur du vecteur d'histoire. Pour le cas particulier où le vecteur d'histoire se réduit à deux composantes ( $i = 1$ ), on se situe alors sur la courbe de première aimantation et l'aimantation est donnée par :

$$M(H) = E(H, -H) \quad (2.18)$$

Le cycle d'hystérésis étant symétrique, la branche ascendante peut être déduite de la branche descendante par une isométrie de centre O. Par conséquent, la fonction d'Everett doit aussi vérifier la propriété :

$$E(H_m, H) = E(-H, -H_m) \quad (2.19)$$

où  $H$  et  $H_m$  sont deux champs qui vérifient  $H < H_m$ . Ainsi, il n'est nécessaire de connaître la fonction d'Everett que sur la moitié du triangle de Preisach. La détermination de cette fonction est effectuée à partir de mesures expérimentales. Le modèle présenté ci-dessus utilise le champ magnétique  $H$  comme variable d'entrée. Il est possible de tenir le même raisonnement en prenant comme variable l'induction  $B$ . On obtient alors l'aimantation en fonction de l'induction. Enfin, il est à noter que, dans les deux cas, l'aimantation est liée à la fonction d'Everett par une relation qui ne nécessite ni dérivation, ni intégration.

#### 2.2.2.4 Détermination de la fonction d'Everett

A partir de  $n$  cycles centrés mesurés ( $i = 1, n$ ), un ensemble de courbes  $E(H_{mi}, H)$  supportant la fonction d'Everett 3D est obtenu. Il reste à déterminer la valeur de la fonction d'Everett pour n'importe quel point  $(H'_m, H')$ . Cette opération est réalisée par une méthode d'interpolation utilisant le faisceau de courbes obtenu à partir de la mesure. La méthode d'interpolation doit vérifier la continuité de la fonction d'Everett, car celle-ci est une fonction primitive, sur tout le domaine d'étude et donc pour les cycles d'hystérésis. La méthode proposée [41] satisfait cette condition et est basée sur des fonctions de forme utilisées pour l'interpolation du champ magnétique en éléments finis 2D [42]. Les expressions de ces fonctions sont détaillées dans l'annexe B.

Le modèle de Preisach peut aussi être adapté pour avoir  $B$  comme variable d'entrée [43]. Dans ce cas, la méthode utilisée pour l'identification de la fonction d'Everett est aussi détaillée dans l'annexe B. Nous notons que pour chaque modèle  $M(H)$  ou  $M(B)$  une fonction d'Everett  $E(H_m, H)$  ou  $E(B_m, B)$  doit être déterminée.

#### 2.2.3 Le modèle de Jiles-Atherton

Le modèle de Jiles-Atherton est un modèle qui, contrairement au modèle de Preisach, décrit l'origine du phénomène d'hystérésis dans les matériaux ferromagnétiques à partir d'une approche physique [29]. Cette description est essentiellement basée sur des considérations énergétiques liées aux déplacements de parois au sein du système magnétique. On retrouve dans la bibliographie deux catégories d'approches physiques pour la description du phénomène d'hystérésis : la première décrit l'hystérésis comme la conséquence de l'existence de fortes interactions entre les moments magnétiques (modèle d'Ising par exemple) et la deuxième suppose l'apparition d'une force de friction au sein du matériau lors du processus d'aimantation (Cf. paragraphe 1.4.5.1 du 1<sup>er</sup> Chapitre), hypothèse sur laquelle est basé le modèle de Jiles-Atherton. Ainsi qu'il a été décrit dans le paragraphe 2.2.1, la première catégorie de modèles conduit à des cycles d'hystérésis dont les fronts ascendant et descendant sont la conséquence d'un phénomène d'avalanche irréversible.

Or, les cycles d'hystérésis des matériaux ferromagnétiques utilisés pour la conception de machines en génie électrique présentent des coudes de basculement beaucoup moins abrupte. Ceci est dû, entre-autre, au processus réversible de rotation des moments magnétiques lorsqu'on s'approche de la saturation. Le modèle de Jiles-Atherton permet de prendre en compte globalement et de manière macroscopique

cette caractéristique importante. Dans la suite, nous présentons le développement du modèle de Jiles-Atherton dans le cadre de l'étude en régime statique de matériaux ferromagnétiques isotropes.

### 2.2.3.1 Définition

#### *Loi de comportement anhystérétique*

Tout d'abord, on définit le champ effectif vu par les domaines. Celui-ci est similaire au champ effectif vu par les moments magnétiques individuels dans un même domaine comme présenté dans la théorie du champ moléculaire de Weiss. Nous conserverons la même notation qu'au premier chapitre pour ce champ effectif. La réponse d'un matériau isotrope sous l'action d'un champ effectif  $H_e$  ( $H_e = H + \alpha M_{an}$ ) peut être exprimée de manière générale par :

$$M_{an} = M_{sat} f(H_e) \quad (2.20)$$

La fonction  $f$  s'annule pour  $H_e = 0$  et tend vers 1 pour  $H_e \rightarrow \infty$ . Dans cette expression, on ne prend en compte que la réponse au champ magnétique et l'interaction moyenne de chaque domaine avec le reste du solide. En fait, on représente uniquement la distribution statistique des domaines qui correspond à l'état d'énergie minimal sans prendre en compte les caractéristiques intrinsèques du matériau telles que les impuretés ou les inclusions non magnétiques. Ainsi, cette loi décrit le comportement d'un matériau ferromagnétique en l'absence de phénomène d'hystérésis, c'est-à-dire sans l'existence du retard des variations de l'aimantation  $M$  par rapport aux variations du champ magnétique  $H$  qui est dû, en outre, aux obstacles rencontrés par les parois de Bloch lors de leurs déplacements. Le choix de l'équation qui décrit au mieux ce type de comportement est très délicat puisque les matériaux étudiés présentent une grande disparité dans leurs caractéristiques magnétiques (structure en domaines, couplage inter-domaines, nature des atomes ou molécules magnétiques, etc ...). Afin de se rapprocher au mieux d'un comportement physique, le choix s'est porté sur l'équation de Langevin présentée au premier chapitre :

$$M_{an}(H_e) = M_{sat} \left[ \coth \left( \frac{H_e}{a} \right) - \left( \frac{a}{H_e} \right) \right] \quad (2.21)$$

où  $a$  ( $A.m^{-1}$ ) est un paramètre qui caractérise la pente de l'aimantation anhystérétique (Cf. 1<sup>er</sup> chapitre),  $\alpha$  le paramètre de couplage inter-domaines et  $H$  le champ appliqué. On voit apparaître ici les trois premiers paramètres à identifier qui sont

$M_{sat}$ ,  $\alpha$  et  $a$ .

### *Composante irréversible de l'aimantation*

Tout d'abord, nous considérons des parois de Bloch planes et rigides (figure 2.18) qui, lors de leurs déplacements, subissent le processus d'accrochage-décrochage sur les sites d'ancrage. La densité d'énergie dissipée par ce processus est ensuite calculée pour une densité uniforme de sites d'ancrage de même nature [29].

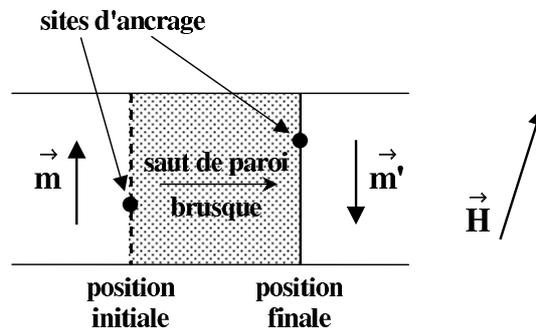


FIG. 2.18 - Saut brusque de paroi sous l'action d'un champ extérieur.

L'expression de l'énergie magnétisante est obtenue à partir de la différence entre l'énergie associée au comportement anhystérétique et les pertes dues au processus d'ancrage des parois. Par conséquent, après quelques calculs algébriques [29], la susceptibilité différentielle associée au processus irréversible de l'aimantation peut être écrite sous la forme suivante :

$$\frac{dM_{irr}}{dH_e} = \frac{(M_{an} - M_{irr})}{k\delta} \quad (2.22)$$

où la constante  $k$  est liée à la densité d'énergie moyenne d'ancrage des parois. Le paramètre  $\delta$  prend la valeur  $+1$  quand  $\frac{dH}{dt} > 0$  et la valeur  $-1$  quand  $\frac{dH}{dt} < 0$ .

### *Processus d'aimantation réversible*

Dans la description précédente les parois restent rigides lors de leurs déplacements. Si maintenant nous considérons que les parois peuvent se déformer sur les sites d'ancrage sous l'influence du champ extérieur (figure 2.19), une nouvelle contribution est à ajouter au processus d'aimantation. Ainsi, la déformation des parois est associée au processus réversible de l'aimantation.

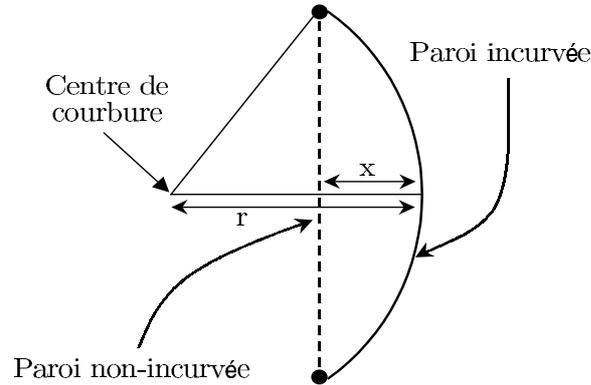


FIG. 2.19 - Déformation réversible d'une paroi sous champ extérieur [29].

Après quelques considérations énergétiques sur la déformation d'une paroi [29] et pour de petits déplacements, Jiles et Atherton montrent que l'aimantation réversible est proportionnelle à la différence ( $M_{an} - M_{irr}$ ) :

$$M_{rev} = c(M_{an} - M_{irr}) \quad (2.23)$$

où  $c$  est un coefficient de réversibilité tel que  $c \in [0, 1]$ .

### *Aimantation totale*

L'aimantation totale est la somme des composantes réversibles et irréversibles  $M = M_{rev} + M_{irr}$ , avec  $M_{irr}$  et  $M_{rev}$  définis par les expressions (2.22) et (2.23). En recombinaison l'équation (2.23) dans l'expression de l'aimantation totale, nous pouvons écrire :

$$M = M_{irr} + c(M_{an} - M_{irr}) \quad (2.24)$$

Enfin, en différenciant cette expression par rapport à  $H$  et sachant que :

$$\begin{aligned} \frac{dM_{an}}{dH} &= \frac{dM_{an}}{dH_e} \left( 1 + \alpha \frac{dM}{dH} \right) \\ \frac{dM_{irr}}{dH} &= \frac{dM_{irr}}{dH_e} \left( 1 + \alpha \frac{dM}{dH} \right) \end{aligned}$$

nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dM}{dH} = \frac{(1-c)\frac{dM_{irr}}{dH_e} + c\frac{dM_{an}}{dH_e}}{1 - \alpha c\frac{dM_{an}}{dH_e} - \alpha(1-c)\frac{dM_{irr}}{dH_e}} \quad (2.25)$$

Il s'agit de l'équation différentielle du modèle de Jiles-Atherton  $M(H)$ . L'expression de  $\frac{dM_{irr}}{dH_e}$  est donnée par l'équation (2.22) et la dérivée de l'aimantation anhystérique par rapport au champ effectif est :

$$\frac{dM_{an}}{dH_e} = \frac{M_{sat}}{a} \left[ 1 - \coth^2 \left( \frac{H_e}{a} \right) + \left( \frac{a}{H_e} \right)^2 \right] \quad (2.26)$$

Le modèle de Jiles-Atherton peut aussi être adapté pour la détermination de la loi de comportement  $M(B)$  [44]. Ainsi, comme pour le modèle précédent et en utilisant le fait que  $B_e = \mu_0 H_e$ , l'expression de l'aimantation totale (2.24) est dérivée par rapport à  $B$  :

$$\frac{dM}{dB} = \frac{(1-c)\frac{dM_{irr}}{dB_e} + c\frac{dM_{an}}{dB_e}}{1 + \mu_0(1-c)(1-\alpha)\frac{dM_{irr}}{dB_e} + \mu_0 c(1-\alpha)\frac{dM_{an}}{dB_e}} \quad (2.27)$$

$$\text{avec } \frac{dM_{irr}}{dB_e} = \frac{M_{an} - M_{irr}}{\mu_0 k \delta} \quad (2.28)$$

Dans les deux cas, cinq paramètres  $c, a, k, \alpha$  et  $M_{sat}$  doivent être déterminés à partir de mesures expérimentales. Il est important de noter que les paramètres du modèle de Jiles-Atherton sont théoriquement les mêmes quelque soit le modèle utilisé ( $M(H)$  ou  $M(B)$ ). On résume les significations physiques des paramètres dans le tableau 2.1.

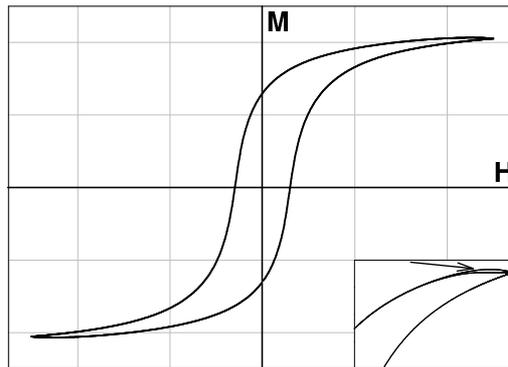
### 2.2.3.2 Résolution numérique du modèle

Lors de la résolution numérique, il est nécessaire de vérifier  $\frac{\Delta M_{irr}}{\Delta H_e} \geq 0$  pour le modèle  $M(H)$  et  $\frac{\Delta M_{irr}}{\Delta B_e} \geq 0$  pour le modèle  $M(B)$ . En effet, les modèles peuvent générer dans certains cas des susceptibilités différentielles négatives qui ne sont pas des solutions physiquement réalistes (dans l'hypothèse où le modèle considéré est

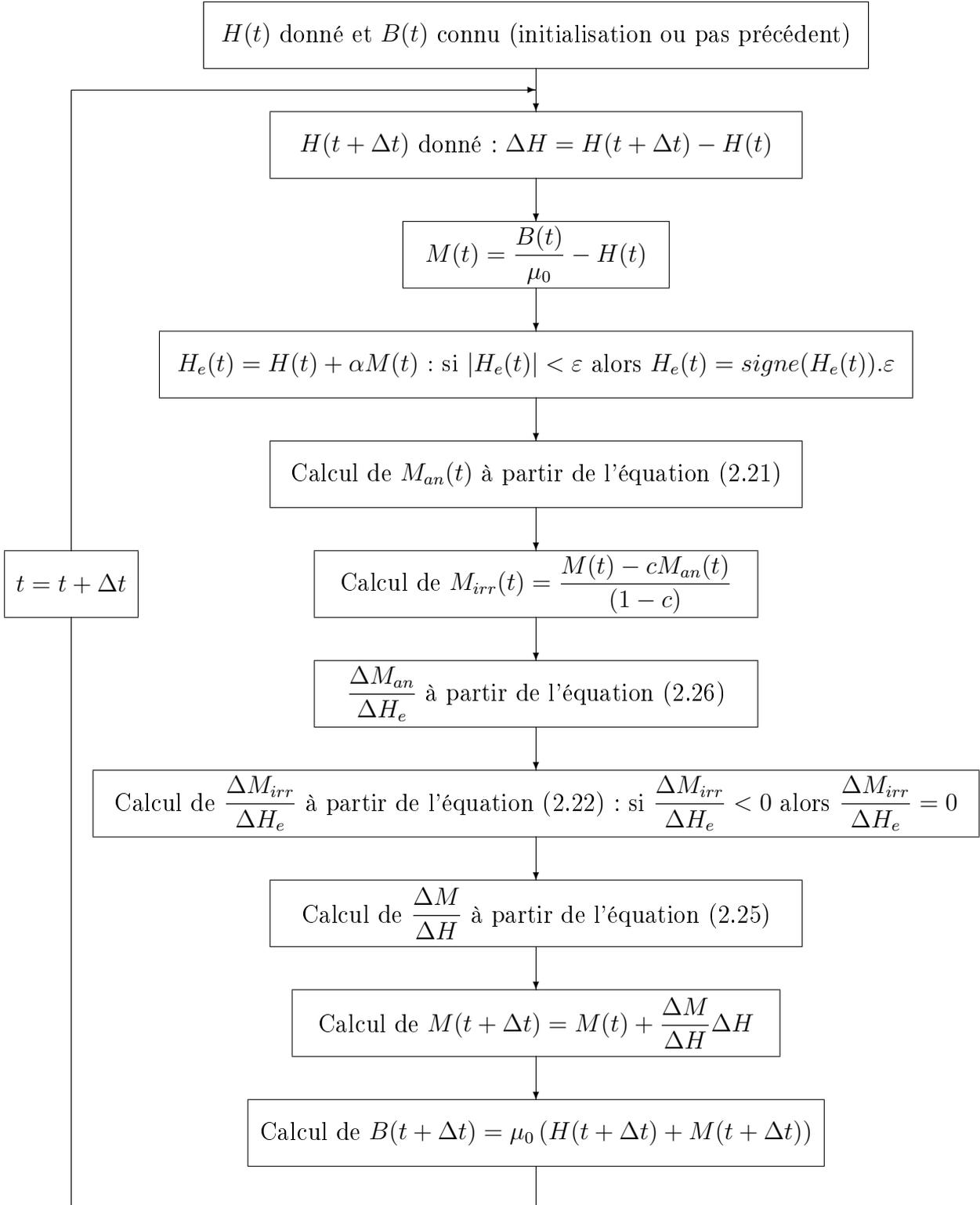
**TAB. 2.1** - *Propriétés physiques des paramètres  $\alpha, a, k, c$  et  $M_{sat}$ .*

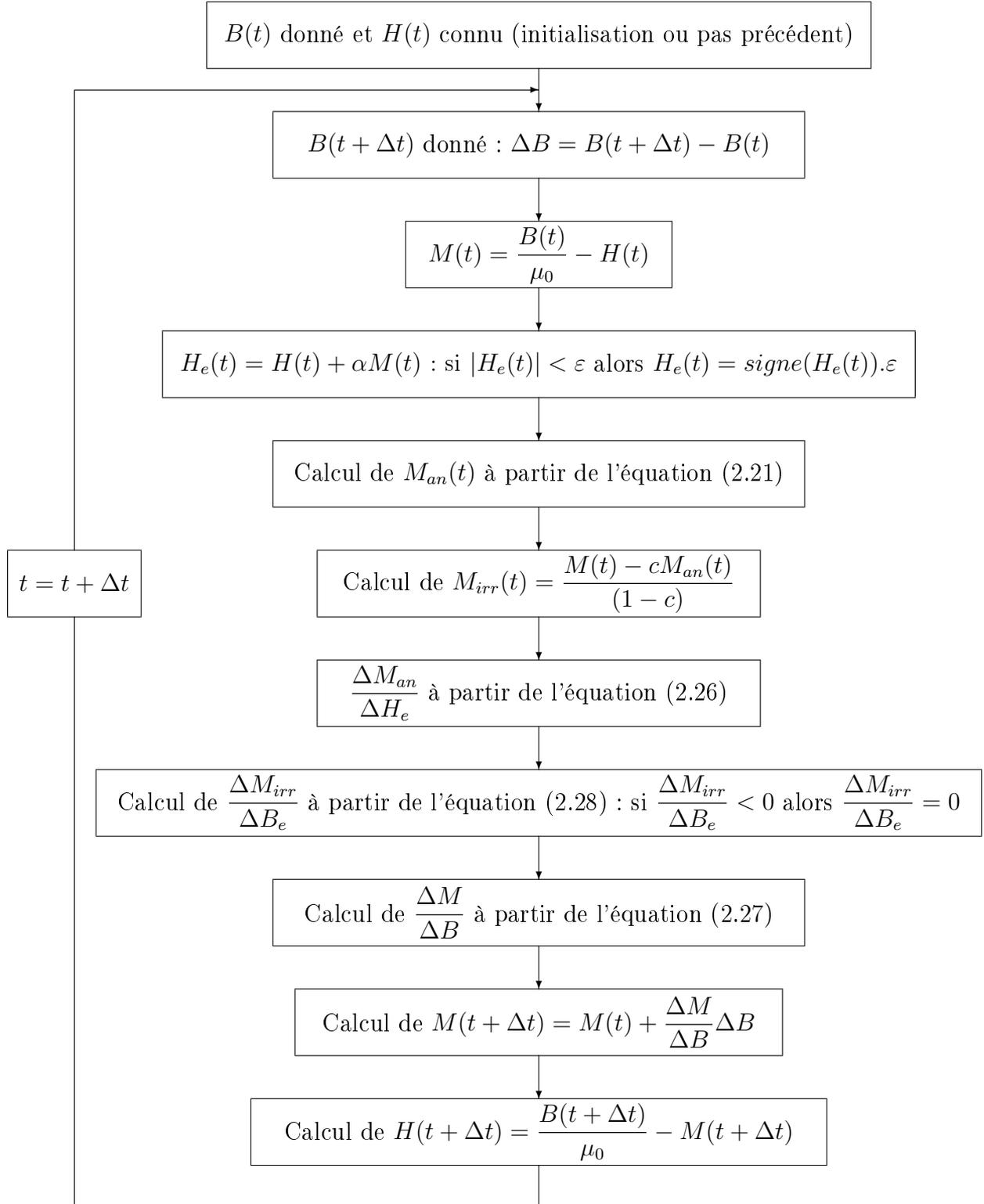
Paramètre	Propriété physique
$c$	Coefficient de réversibilité
$a$	Facteur de forme pour $M_{an}$
$k$	Lié aux pertes par hystérésis
$\alpha$	Lié à l'interaction entre les domaines
$M_{sat}$	Aimantation à saturation

quasi-statique). Ce comportement peut apparaître au sommet du cycle d'hystérésis majeur lors de la diminution du champ (figure 2.20). Ainsi, comme indiqué sur le diagramme des procédures de calcul donnés dans la suite, les susceptibilités différentielles sont posées égales à zéro si elles deviennent négatives.

**FIG. 2.20** - *Comportement non physique au voisinage de la saturation d'un cycle majeur.*

Enfin, comme nous le verrons par la suite lors de la comparaison des résultats expérimentaux et calculés (paragraphe 2.3.3), le modèle de Jiles-Atherton ne permet de restituer convenablement les cycles mineurs non centrés. En effet, on observe que ceux-ci ne se referment pas correctement. A titre d'information, nous donnons les deux algorithmes de résolution pour les modèles  $M(H)$  et  $M(B)$ . On constate une grande simplicité de la programmation du modèle par rapport au cas du modèle de Preisach.

**Procédure de calcul de  $B(t)$  à partir de  $H(t)$** 

*Procédure de calcul de  $H(t)$  à partir de  $B(t)$* 

### 2.2.3.3 Identification et optimisation des paramètres du modèle de Jiles-Atherton

Dans la suite, nous allons rappeler la procédure d'identification proposée par Jiles dans [45] et celle que nous proposons [46]. Pour illustrer cette présentation, nous utiliserons les résultats obtenus dans le cas des ferrites.

#### *Expressions des paramètres*

L'extraction des paramètres du modèle, à partir des mesures expérimentales, est décrite dans [45]. Après quelques développements algébriques des équations (2.21), (2.22) et (2.24) aux voisinages de quelques points caractéristiques du cycle d'hystérésis, les expressions implicites des 5 paramètres sont obtenues. Celles-ci sont :

$$c = \frac{3a\chi'_{ini}}{M_{sat}} \quad (2.29)$$

$$a = \frac{M_{sat}}{3} \left( \frac{1}{\chi'_{an}} + \alpha \right) \quad (2.30)$$

$$k = \frac{M_{an}(H_c)}{1-c} \left( \alpha + \frac{1}{\frac{1}{1-c}\chi'_c - \frac{c}{1-c} \frac{dM_{an}(H_c)}{dH}} \right) \quad (2.31)$$

$$M_r = M_{an}(M_r) + \frac{k}{\frac{\alpha}{1-c} + \frac{1}{\chi'_r - c \frac{dM_{an}(M_r)}{dH}}} \quad (2.32)$$

avec :

- $H_c$  et  $M_r$  le champ coercitif et l'aimantation rémanente,
- $M_s$  l'aimantation à saturation,
- $\chi'_{ini}$  et  $\chi'_{an}$  les susceptibilités différentielles normale et anhystérétique initiales,
- $\chi'_c$  et  $\chi'_r$  les susceptibilités différentielles aux points coercitif et rémanent.

Pour déterminer ces grandeurs, il faut relever expérimentalement un cycle majeur, la courbe de première aimantation et la courbe anhystérétique. Les grandeurs physiques à relever à partir de ces mesures expérimentales sont indiquées sur la figure 2.21.

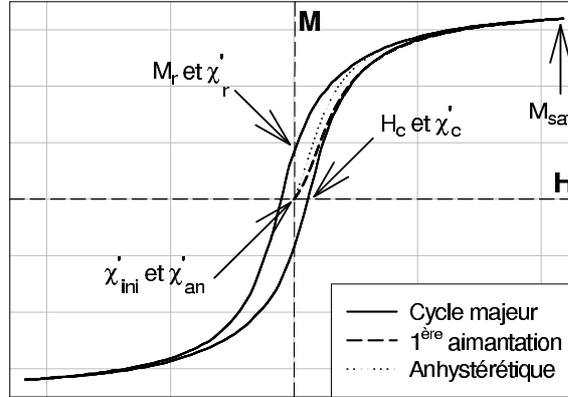


FIG. 2.21 - Ensemble des paramètres expérimentaux nécessaires au modèle

La détermination des paramètres  $c$ ,  $a$ ,  $k$  et  $\alpha$  requiert une procédure itérative qui peut permettre d'obtenir une bonne approximation des valeurs de ces paramètres. Nous présentons dans la suite la procédure d'identification initialement proposée dans [45].

### Identification des paramètres

Le paramètre  $M_{sat}$  est facile à obtenir par mesure directe d'un cycle d'hystérésis majeur et le paramètre  $c$  quant à lui est obtenu à l'aide de l'équation (2.29) grâce à la mesure de  $\chi'_{ini}$ . Les autres paramètres ne sont pas directement calculables puisque les relations (2.30), (2.31) et (2.32) font intervenir plusieurs paramètres couplés par des relations non-linéaires. Ainsi, la procédure proposée dans [45] se décline comme suit :

1. choix arbitraire d'une valeur initiale de  $\alpha$ ,
2. calcul de  $a$  par (2.30),
3. calcul de  $k$  par (2.31),
4. calcul de  $\alpha$  par (2.32),
5. retour en 2. jusqu'à la convergence de la procédure.

Toutefois, cette méthode peut se révéler très instable numériquement et conduire à des solutions non physiques, en particulier pour le paramètre  $\alpha$ . Nous proposons dans la suite une procédure légèrement différente qui évite ce problème. Celle-ci consiste à fixer la variation du paramètre  $\alpha$  dans un intervalle d'existence de la

solution et de calculer les autres paramètres pour chaque valeur  $\alpha_i$ . Le choix du meilleur ensemble de paramètres est celui qui satisfait la fonction objectif :

$$F_{obj} = \int_0^{T/2} |M_{exp}(t) - M_{sim}(t)|.dt \quad (2.33)$$

où  $M_{exp}(H)$  et  $M_{sim}(H)$  sont respectivement l'aimantation expérimentale et l'aimantation simulée. Le calcul est effectué pour une seule branche du cycle. La procédure d'identification proposée est la suivante :

1. choix systématique de  $\alpha_i$  dans l'intervalle  $[\alpha_{ini}, \alpha_{fin}]$  par pas  $\delta\alpha$  ,
2. calcul de  $a_i$  ,
3. calcul de  $c_i$  ,
4. calcul de  $k_i$  ,
5. calcul de la fonction objectif  $F_{obj}^i$  ,
6. retour en 1. jusqu'à  $\alpha_i = \alpha_{fin}$  ,
7. détermination de  $(\alpha_j, a_j, c_j, k_j)$  par  $F_{obj}^j = \min(F_{obj}^i)$ .

Deux points importants sont à noter dans cette procédure : le choix de l'intervalle de variation pour  $\alpha$  et le choix du pas  $\delta\alpha$ . Le choix de l'intervalle dépend du matériau utilisé et fait appel à l'expérience de l'utilisateur. Par exemple, pour des tôles FeSi, le paramètre  $\alpha$  est de l'ordre de grandeur de  $1.10^{-4}$ , ce qui permet de fixer la variation de  $\alpha$  entre  $1.10^{-5}$  et  $1.10^{-3}$ . Quant au pas de variation  $\delta\alpha$ , il est fixé pour avoir un compromis entre le temps de calcul et une relative précision dans l'évaluation de l'ensemble des paramètres. On se fixe une valeur de  $\delta\alpha$  pour avoir une centaine de pas de calcul, et la fonction objectif n'est calculée que sur la branche descendante de l'hystérésis. Toutefois, comme nous le verrons dans la suite, les paramètres  $c, a, k, \alpha$  et  $M_{sat}$  seront optimisés et ne nécessitent à ce niveau un traitement plus rigoureux.

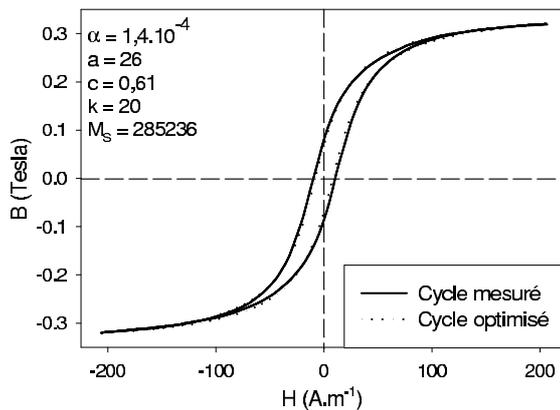
### *Optimisation des paramètres*

L'identification précédente permet d'avoir une estimation relativement correcte des paramètres du modèle pour le matériau étudié et donne de bons résultats. Toutefois, il est encore possible d'améliorer ces résultats par une optimisation des paramètres sur un cycle majeur. Dans le développement qui suit, nous allons présenter les méthodes d'optimisation testées dans le cadre de ce travail. De plus, pour cette

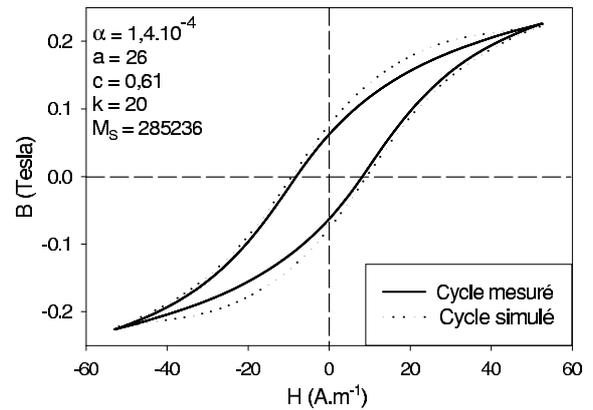
optimisation le paramètre  $M_{sat}$  s'ajoute aux paramètres  $c, a, k, \alpha$  identifiés précédemment. Il faut noter que la procédure d'identification précédente est importante à ce niveau puisqu'elle permet d'avoir une famille de paramètres initiaux pour l'optimisation, c'est pourquoi les valeurs obtenues à partir de cette procédure constituent un choix judicieux. En effet, afin de converger plus rapidement ou d'assurer la convergence, l'algorithme d'optimisation utilisé nécessite des valeurs initiales de paramètres assez proches de la solution finale, d'autant plus que les essais numériques montrent une forte dépendance du résultat en fonction du choix des valeurs initiales. La fonction objectif choisie pour la procédure d'optimisation est l'évaluation de l'écart entre l'expérience et la simulation par la méthode des moindres carrés (équation (2.34)). Celle-ci donne de meilleurs résultats que la fonction précédemment utilisée (équation (2.33)) pour l'identification des paramètres par la procédure de balayage.

$$F_{obj} = \sum_i [M_{exp}(H_i) - M_{sim}(H_i)]^2 \quad (2.34)$$

Comme pour la procédure d'identification, l'optimisation est effectuée sur une seule branche de l'hystérésis. Le résultat est très satisfaisant pour le cycle sur lequel l'optimisation a été effectuée (figure 2.22). Néanmoins, si on simule des cycles d'hystérésis d'amplitudes plus faibles avec ces mêmes paramètres, l'écart entre expérience et simulation devient plus important. En effet, comme nous le constatons dans le cas des ferrites sur la figure 2.23, les pertes sont surestimées. Cet écart est encore plus important dans la zone où le cycle passe d'une forme ellipsoïdale (zone de Rayleigh) à la forme d'hystérésis classique.



**FIG. 2.22** - Ferrites ; optimisation sur un cycle majeur ( $H_{max} = 206 \text{ A.m}^{-1}$ ).



**FIG. 2.23** - Ferrites ; application sur un cycle mineur centré ( $H_{max} = 53 \text{ A.m}^{-1}$ ).

Afin de remédier à ce problème, la solution proposée consiste à effectuer une optimisation de manière à prendre en compte une large gamme d'amplitude d'excitation. Deux méthodes sont proposées [46] :

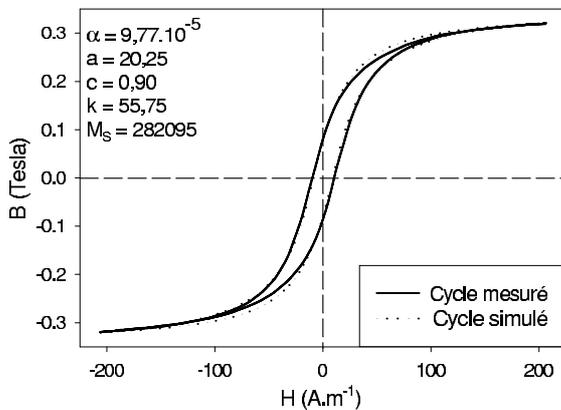
- méthode **M1** : optimisation sur une famille de cycles centrés [47]
- méthode **M2** : optimisation sur la réponse à un signal de type désaimantation

*Méthode d'optimisation M1 (famille de cycles centrés)*

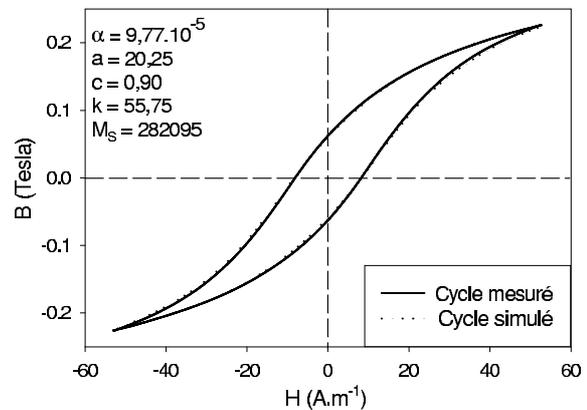
Dans le cas de la méthode **M1**, la fonction objectif utilisée est simplement la somme des fonctions objectifs (équation (2.34)) qui correspondent à chaque cycle utilisé :

$$F_{obj} = \sum_k^N F_{obj}^k \quad (2.35)$$

où  $N$  est le nombre de cycles utilisés dans la procédure d'optimisation. Nous avons choisi  $N = 5$ , ce qui est un bon compromis entre le temps de calcul et la précision des résultats. Toujours dans le cas des ferrites, on présente les résultats sur les figures 2.24 pour un cycle majeur centré et 2.25 pour un cycle mineur centré.



**FIG. 2.24** - Ferrites; restitution d'un cycle majeur centré à partir de l'optimisation sur une famille de cycles ( $H_{max} = 206 \text{ A.m}^{-1}$ ).



**FIG. 2.25** - Ferrites; restitution d'un cycle mineur centré à partir de l'optimisation sur une famille de cycles ( $H_{max} = 53 \text{ A.m}^{-1}$ ).

Par rapport à la méthode d'optimisation sur un cycle majeur (figures 2.22 et 2.23), on obtient de meilleurs résultats pour les cycles de plus faibles amplitudes tout en dégradant peu les cycles de fortes amplitudes. Toutefois, cette méthode requiert le relevé de plusieurs cycles dont le nombre doit être d'autant plus élevé

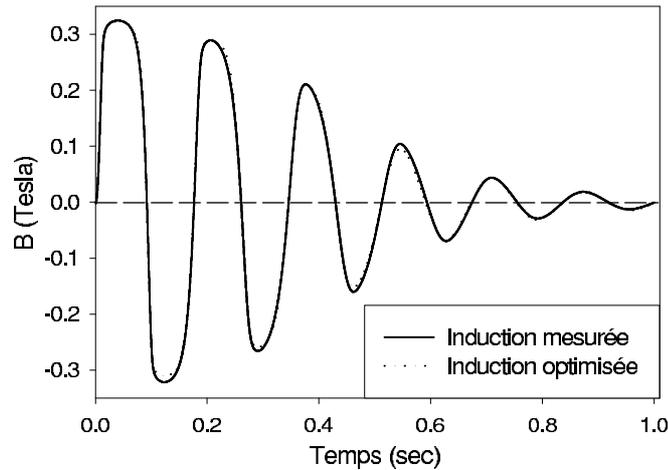
que l'on veut un résultat précis. En reprenant l'idée d'une procédure d'optimisation prenant en compte une large gamme d'amplitudes, la méthode développée dans la suite relève de l'optimisation sur la réponse du matériau à une excitation sinusoïdale décroissante.

*Méthode d'optimisation M2 (excitation sinusoïdale décroissante)*

On choisit une forme d'onde de manière à parcourir une large gamme d'amplitudes et ainsi permettre une meilleure optimisation des paramètres :

$$H(t) = H_0 \sin(\omega t) \exp(-t/\tau) \quad (2.36)$$

On reporte sur la figure 2.26 la réponse à ce type d'excitation ainsi que le résultat de l'optimisation qui a été effectuée à partir de la fonction objectif donnée par l'équation (2.34).

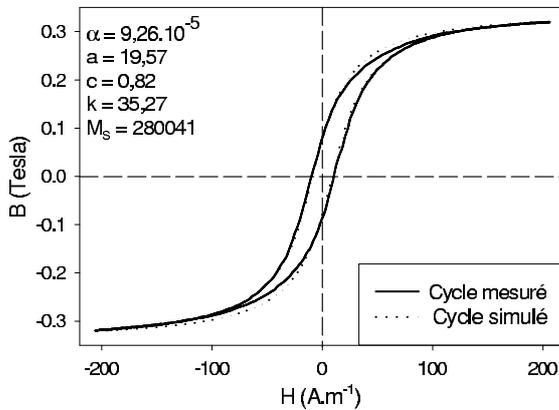


**FIG. 2.26** - Ferrites ; résultat de l'optimisation sur la réponse à une excitation décroissante (avec  $\omega = 38 \text{ s}^{-1}$  et  $\tau = 0,2 \text{ s}$ ).

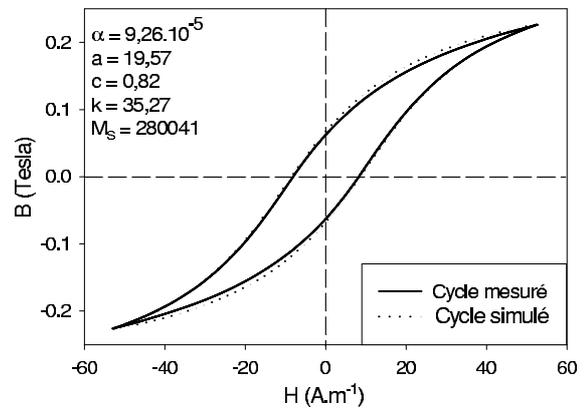
Il est à noter que la forme d'onde de l'excitation (2.36) est proche de celle utilisée pour obtenir un état désaimanté du matériau à l'échelle macroscopique [48]. Cette procédure permet ainsi de parcourir un grand nombre d'états possibles des domaines de Weiss qui constituent le matériau étudié. Dans [48] il est conseillé d'appliquer une forme d'onde évanescence, mais la loi de décroissance de  $H(t)$  n'a pas grande importance pourvu qu'elle soit lente et régulière [21]. Toutefois, pour des

raisons expérimentales, cette désaimantation s'étale sur 1 seconde. Les résultats expérimentaux obtenus pour les trois matériaux sont satisfaisants dans le cadre de notre étude.

Ainsi, cette procédure ne nécessite qu'un seul relevé expérimental et conduit à un gain de temps appréciable pour la mesure et l'optimisation par rapport à la méthode d'optimisation basée sur plusieurs cycles. Les simulations d'un cycle majeur et d'un cycle mineur centrés à partir des paramètres optimisés par la méthode **M2** sont donnés figures 2.27 et 2.28.



**FIG. 2.27** - Ferrites; restitution d'un cycle majeur centré à partir de l'optimisation sur la décroissance ( $H_{max} = 206 \text{ A.m}^{-1}$ ).



**FIG. 2.28** - Ferrites; restitution d'un cycle mineur centré à partir de l'optimisation sur la décroissance ( $H_{max} = 53 \text{ A.m}^{-1}$ ).

Ces résultats sont comparables à ceux que l'on obtient avec la méthode **M1** (figures 2.24 et 2.25). D'autres part, les coefficients  $\alpha, a, c, k$  et  $M_{sat}$  obtenus avec les deux méthodes, et pour les trois matériaux étudiés, sont assez proches comme l'indique le tableau 2.2.

## 2.3 Comparaison des modèles

### 2.3.1 Procédures d'identification

#### 2.3.1.1 La fonction d'Everett

Ainsi qu'il été présenté au paragraphe 2.2.2.3, l'identification de la fonction d'Everett nécessite la mesure de plusieurs cycles centrés. La procédure de mesure expérimentale doit être très précise, particulièrement pour les champs d'excitation

**TAB. 2.2** - Paramètres obtenus à partir des deux méthodes d'optimisation à 0,5 Hz.

Matériau	Paramètre	Méthode <b>M1</b>	Méthode <b>M2</b>
Ferrites N30	$\alpha$	$9,77.10^{-5}$	$9,26.10^{-5}$
	$a$	20,25	19,57
	$k$	55,75	35,27
	$c$	0,9	0,82
	$M_{sat}$	282095	280041
Tôles FeSi	$\alpha$	$1,31.10^{-4}$	$1,18.10^{-4}$
	$a$	59,5	56,8
	$k$	99,2	88
	$c$	0,54	0,43
	$M_{sat}$	1145220	1142115
Poudres de fer	$\alpha$	$1,83.10^{-3}$	$2,18.10^{-3}$
	$a$	1642	1651
	$k$	1865	2219
	$c$	0,8	0,83
	$M_{sat}$	1122626	1103623

élevés pour lesquels les cycles d'hystérésis doivent être rigoureusement centrés, sinon la méthode d'interpolation donne des cycles décalés. Ceci est particulièrement vrai pour la méthode d'interpolation utilisée dans le cas du modèle  $M(B)$ . La solution proposée consiste à calculer par le modèle  $M(H)$  l'ensemble des cycles mesurés. Enfin, les cycles obtenus, qui sont parfaitement centrés, peuvent être utilisés pour calculer la fonction d'Everett pour le modèle  $M(B)$ .

D'autre part, plus le nombre de cycles est élevé et plus les résultats du modèle seront précis. Dans notre cas, environ 20 cycles centrés ont été mesurés sur les trois matériaux. Pour les champs d'excitation faibles, il est recommandé d'avoir une concentration de cycles plus importante. En fait, dans cette zone la forme du cycle d'hystérésis change fortement (elle correspond à une modification de concavité de la courbe de première aimantation).

Les fonctions d'Everett des trois matériaux pour le modèle  $M(H)$ , sont présentées sur les figures 2.29, 2.30 et 2.31. Leurs formes sont assez différentes : la surface la plus inclinée est obtenue avec les poudres de fer. En fait, cela correspond à la faible pente du cycle d'hystérésis au voisinage du champ coercitif  $H_c$  (figure 2.34). A l'opposé, la fonction d'Everett des tôles FeSi est la plus raide puisque le cycle d'hystérésis

présente une pente importante au voisinage de  $H_c$ . Par conséquent, il est difficile de trouver une expression analytique qui permet de modéliser de manière précise les fonctions d'Everett des trois matériaux. C'est pourquoi, il est plus intéressant d'utiliser une méthode d'interpolation. Dans ce cas, il est plus aisé de reconstruire des fonctions de formes très différentes.

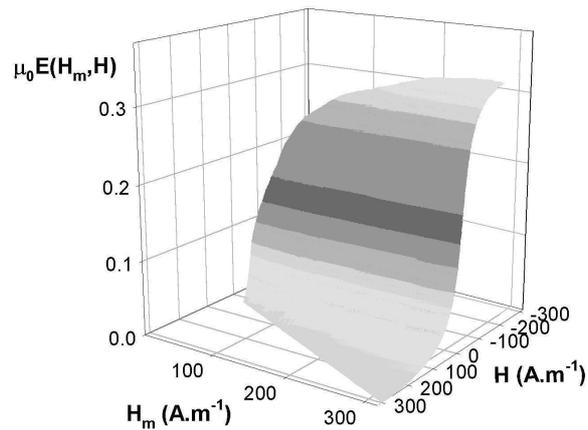


FIG. 2.29 - Ferrites N30; fonction d'Everett pour le modèle  $M(H)$ .

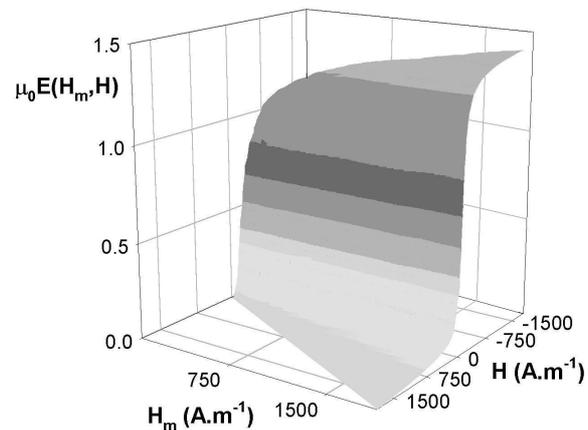


FIG. 2.30 - Tôles FeSi; fonction d'Everett pour le modèle  $M(H)$ .

Les cycles qui ont été utilisés pour l'identification sont parfaitement restitués de par la méthode d'interpolation. Pour des amplitudes d'excitation n'ayant pas servies à l'identification, les simulations donnent des résultats très proches. Sur les figures 2.32 à 2.34, on donne les simulations obtenus par le modèle  $M(H)$ . Dans le cas

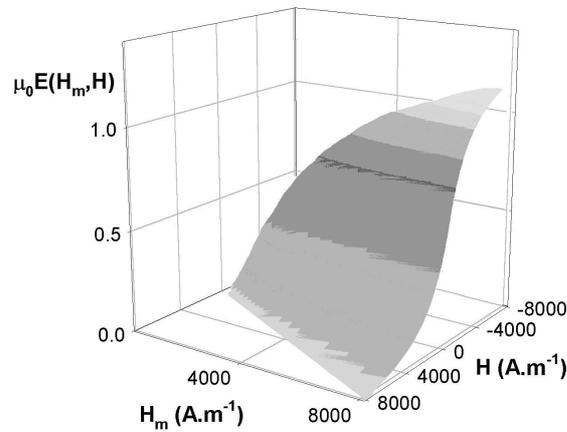


FIG. 2.31 - Poudres de fer ; fonction d'Everett pour le modèle  $M(H)$ .

du modèle  $M(B)$ , les résultats sont similaires, à condition de respecter la condition citée plus haut, c'est-à-dire disposer de cycles expérimentaux rigoureusement centrés pour l'identification. Une comparaison entre ces deux modèles et l'expérience sera présentée au paragraphe 2.3.2.

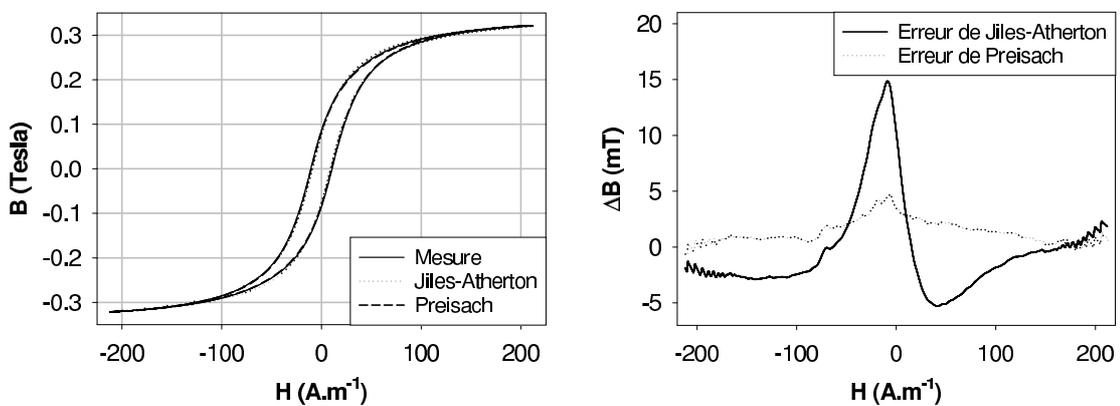


FIG. 2.32 - Ferrites N30 ; comparaison des cycles expérimentaux et calculés pour les deux modèles.

### 2.3.1.2 Les paramètres du modèle de Jiles-Atherton

La procédure d'optimisation **M1** présentée au paragraphe 2.2.3.3 est appliquée pour les trois matériaux. Les paramètres sont reportés sur le tableau 2.3 et les cycles majeurs centrés simulés pour chaque matériau sont donnés sur les figures 2.32 à 2.34.

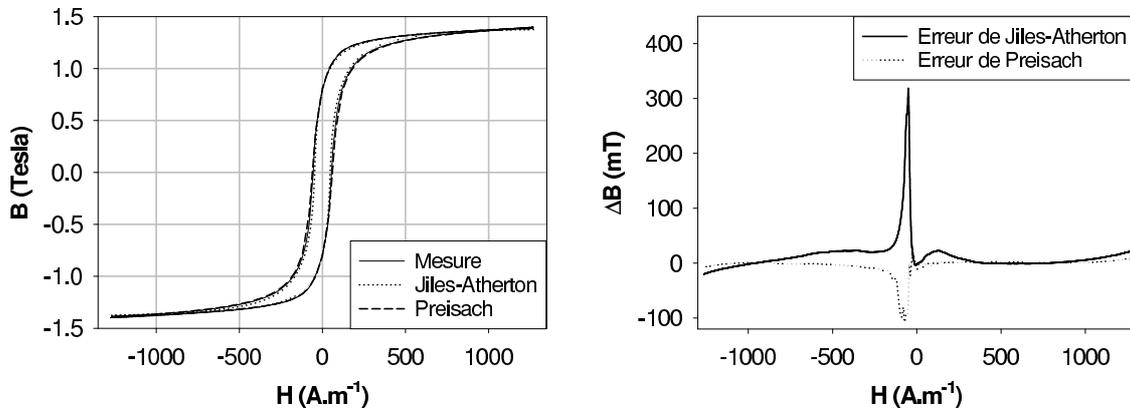


FIG. 2.33 - Tôles  $FeSi$ ; comparaison des cycles expérimentaux et calculés pour les deux modèles.

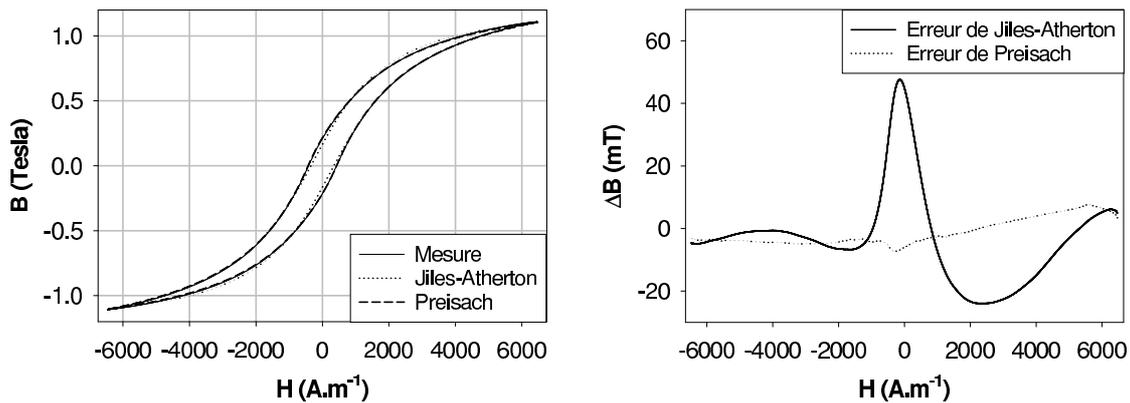


FIG. 2.34 - Poudres de fer; comparaison des cycles expérimentaux et calculés pour les deux modèles.

Nous pouvons noter une bonne correspondance entre les résultats expérimentaux et le modèle.

La comparaison des paramètres entre deux matériaux n'est pas aisée (Tab. 2.3). En effet, malgré la signification physique des paramètres (Cf. tableau 2.1), une procédure d'optimisation peut conduire à de bons résultats en terme de restitution de cycles avec des valeurs de paramètres déconnectés de toute signification physique. Toutefois, certains paramètres peuvent encore donner des informations sur les propriétés physiques du matériau. Ainsi, si on considère les cas des ferrites et des tôles  $FeSi$ , nous notons que les paramètres sont du même ordre de grandeur. La comparaison des paramètres de ces deux matériaux constitue une première approche pour la comparaison de leurs propriétés physiques. Par exemple, le paramètre  $a$  est plus

**TAB. 2.3** - Valeurs des paramètres pour le modèle de Jiles-Atherton.

Paramètre	Ferrites N30	Tôles FeSi	Poudres de fer
$\alpha$	$9,77.10^{-5}$	$1,31.10^{-4}$	$1,83.10^{-3}$
$a$	20,25	59,5	1642
$k$	55,75	99,2	1865
$c$	0,9	0,54	0,8
$M_{sat}(A/m)$	282095	1145220	1122626

important dans le cas des tôles FeSi, ceci est lié au fait que le cycle d'hystérésis de ce type de matériau possède une pente importante au voisinage du champ coercitif. Le paramètre  $k$  montre quant à lui que les pertes par hystérésis sont plus importantes pour les tôles FeSi.

Dans la suite, nous allons présenter les résultats de la comparaison entre les deux modèles (Preisach et Jiles-Atherton) en terme de calcul, de pertes et d'estimation de certains points particuliers du cycle en régime d'excitation sinusoïdale. Nous compléterons par une étude sur la robustesse des deux modèle dans des conditions d'excitations non-sinusoïdales.

## 2.3.2 Excitation sinusoïdale

### 2.3.2.1 Pertes par hystérésis

La modélisation de la loi de comportement magnétique d'un matériau permet d'estimer les pertes par hystérésis. L'estimation de ces pertes est très importante lors de la modélisation et de l'optimisation d'un système électromagnétique. Ainsi, leur calcul nous permettra de comparer les deux modèles sur un critère objectif de robustesse et de précision. Ces pertes sont reportées sur les figures 2.35, 2.36 et 2.37 en fonction de l'amplitude d'excitation  $H_{max}$ .

Tout d'abord, nous pouvons noter que le modèle de Preisach est plus précis que celui de Jiles-Atherton. Ceci est lié au fait que le modèle de Preisach, dans le cadre de l'identification de la fonction d'Everett, permet de restituer des cycles d'hystérésis directement à partir de mesures expérimentales. A l'opposé, le modèle de Jiles-Atherton nécessite la résolution d'une équation différentielle, certes pour laquelle plusieurs paramètres identifiés à partir de l'expérience interviennent. Toutefois, les résultats obtenus par ce modèle restent tout à fait corrects pour les trois matériaux étudiés, bien que les pertes calculées soient surestimées dans le cas des ferrites et

sous-estimées dans le cas des tôles FeSi, mais toujours dans une marge d'erreur acceptable.

Le cas des poudres de fer met en évidence que le modèle de Jiles-Atherton peut être très performant. En effet, nous ne constatons pas de différence notable entre les deux modèles qui donnent de très bons résultats. Néanmoins, si nous observons les cycles simulés par le modèle de Jiles-Atherton pour ce matériau, il apparaît que les évolutions des champs coercitif et rémanent sont sous-estimées comme nous le verrons au paragraphe 2.3.2.2. Cela s'explique par l'observation des cycles d'hystérésis au niveau de leurs coudes de basculement (figure 2.38). En effet, les pertes surestimées au niveau de la région  $P_1$  sur la figure 2.38 sont compensées par les pertes sous-estimées au niveau de la région  $P_2$ .

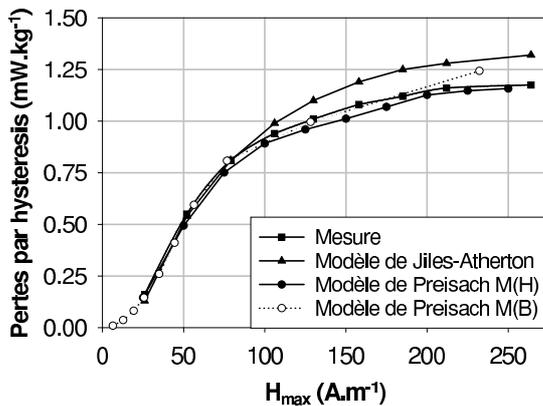


FIG. 2.35 - Ferrites N30 : comparaison avec la mesure des pertes par hystérésis obtenues par les 2 modèles à 0,5 Hz.

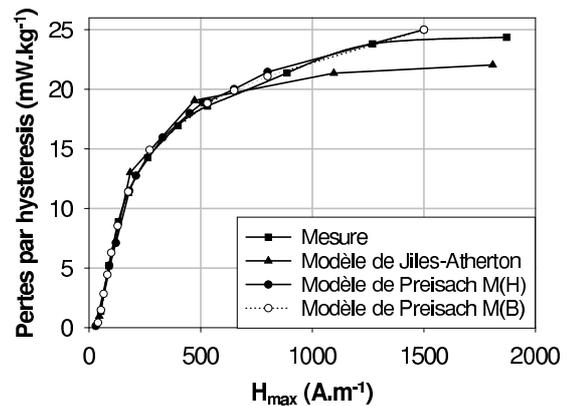


FIG. 2.36 - Tôles FeSi : comparaison avec la mesure des pertes par hystérésis obtenues par les 2 modèles à 0,5 Hz.

Afin de résumer ces résultats, les erreurs relatives maximum sont reportées dans le tableau 2.4 pour les deux modèles. Dans le cas du modèle de Jiles-Atherton, les modèles  $M(H)$  et  $M(B)$  sont équivalents, c'est pourquoi un seul écart est donné. Par contre, les modèles de Preisach  $M(H)$  et  $M(B)$  donnent des résultats différents mais néanmoins très proches. Nous pouvons dire que, globalement, le modèle de Preisach est le plus précis dans le cadre de notre étude.

### 2.3.2.2 Evolution des champs rémanent et coercitif

L'autre critère utilisé pour juger de la précision des modèles consiste à tracer l'évolution de deux points caractéristiques du cycle : les champs rémanents et coercitifs. En effet, nous avons vu que le critère de comparaison des pertes n'était pas

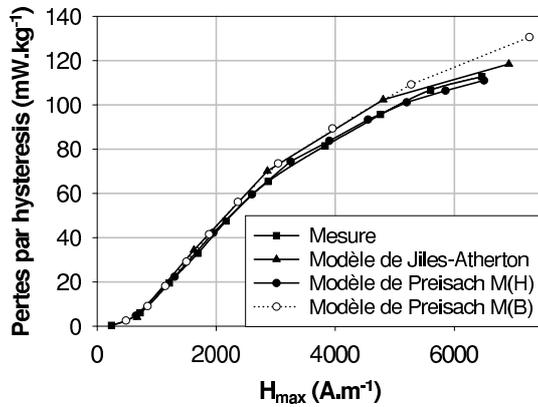


FIG. 2.37 - Poudres de fer : comparaison avec la mesure des pertes par hystérésis obtenues par les 2 modèles à 0,5 Hz.

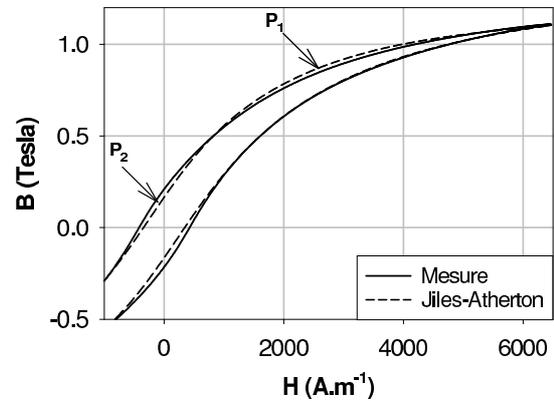


FIG. 2.38 - Compensation des pertes au niveau du coude de basculement dans le cas des poudres de fer.

TAB. 2.4 - Erreurs relatives maximum constatées sur l'estimation des pertes par hystérésis pour les 2 modèles (en %).

Matériau	Jiles-Atherton	Preisach $M(H)$	Preisach $M(B)$
Ferrites N30	+12	-4,5	+6,6
Tôles FeSi	-9	+3,7	+3,7
Poudres de fer	+2,5	-2	+8

suffisant. Dans le cas des poudres de fer, le résultat du calcul par le modèle de Jiles-Atherton mettait en évidence un phénomène de compensation de pertes au niveau des coudes de basculement (figure 2.38). Les évolutions des points  $B_r$  et  $H_c$  en fonction de  $H_{max}$  sont présentées sur les figures 2.39 à 2.41.

Dans les cas des Ferrites et des tôles FeSi, les simulations donnent des résultats proches de l'expérience quelque soit le modèle utilisé. Il est toutefois nécessaire de noter un aspect important du modèle de Jiles-Atherton : le champ coercitif devient constant au-delà d'une certaine amplitude d'excitation alors que ce comportement asymptotique n'apparaît expérimentalement que pour des amplitudes d'excitation plus élevées. Ceci est lié à la résolution numérique du modèle sur laquelle nous reviendrons plus en détail au paragraphe 2.3.4. D'autre part, ainsi qu'il a été mentionné au paragraphe précédent, bien que le modèle de Jiles-Atherton soit bien adapté pour l'étude des pertes par hystérésis, il semble moins précis pour l'évaluation des champs rémanent et coercitif dans le cas des poudres de fer. Pour ce même matériau, nous constatons aussi une perte de précision pour les champs élevés dans le cas du modèle

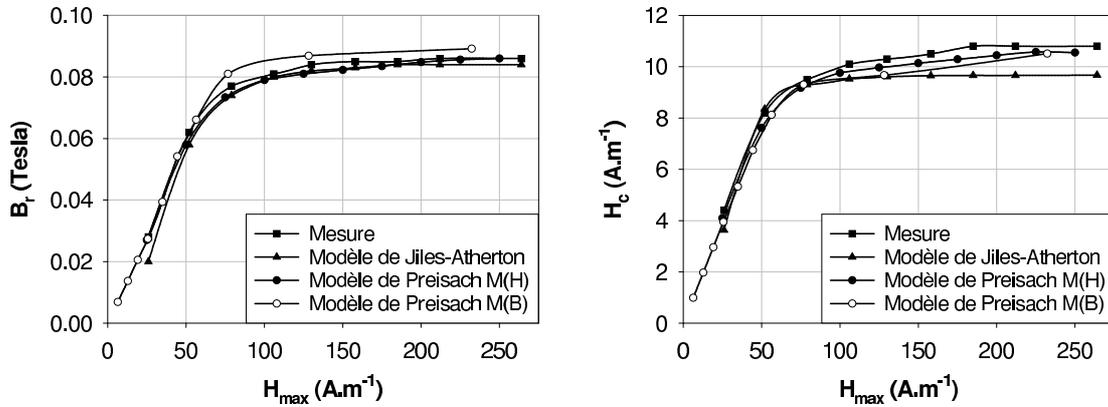


FIG. 2.39 - Ferrites N30 ; évolution des champs rémanent et coercitif en fonction de  $H_{max}$  à 0,5 Hz.

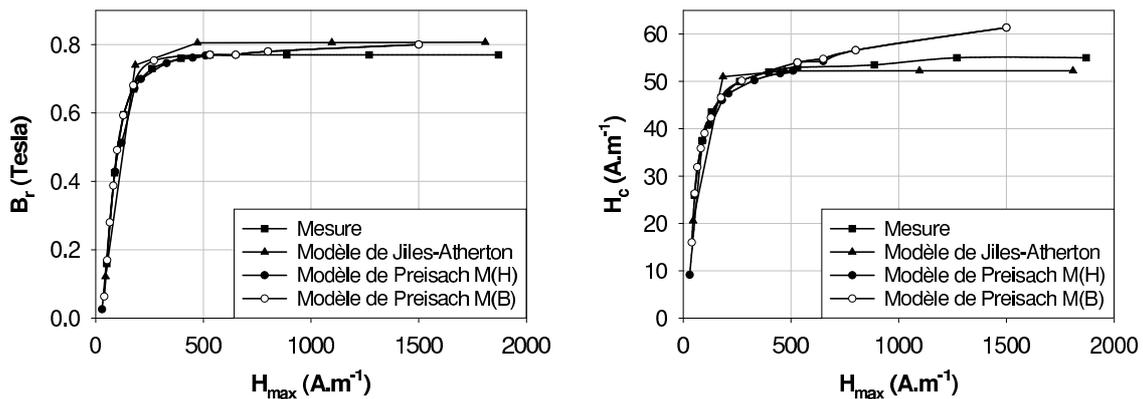


FIG. 2.40 - Tôles FeSi ; évolution des champs rémanent et coercitif en fonction de  $H_{max}$  à 0,5 Hz.

de Preisach  $M(B)$ , qui n'apparaît pas dans le cas du modèle  $M(H)$ , pour l'évolution du champ rémanent. Ceci est dû au re-centrage numérique des cycles comme précisé au paragraphe 2.3.1.1.

### 2.3.3 Excitation non sinusoïdale

En génie électrique, les systèmes ne sont pas nécessairement étudiés dans des conditions d'excitation sinusoïdale (régime transitoire, composants en électronique de puissance). Afin de tester les capacités des modèles à représenter le comportement hystérétique dans ces conditions, tout en restant en régime statique pour le

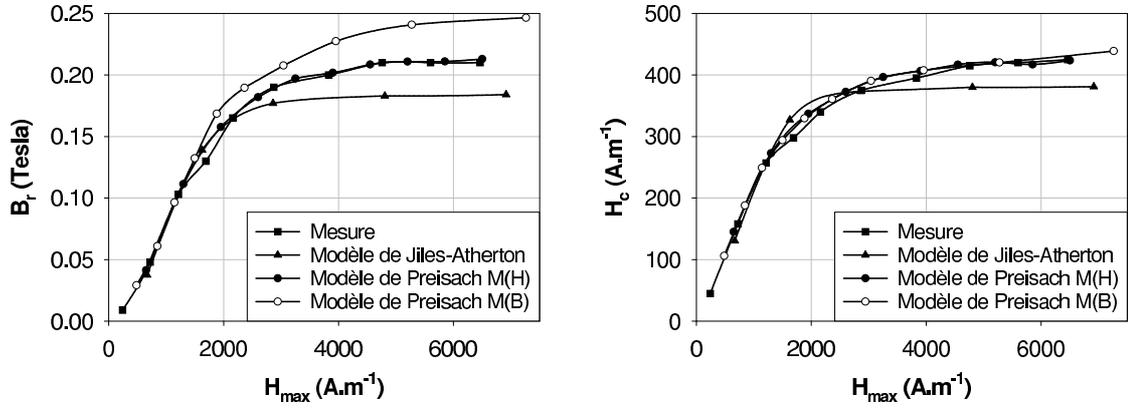


FIG. 2.41 - Poudres de fer ; évolution des champs rémanent et coercitif en fonction de  $H_{max}$  à 0,5 Hz.

matériau, nous allons effectuer une étude à partir de deux types d'excitation ayant pour équations :

$$\text{Excitation A : } H(t) = H_0 \sin(\omega t) \exp(-t/\tau) \quad (2.37)$$

$$\text{Excitation B : } H(t) = H_0 \sin(\omega t) + H'_0 \sin(5\omega t + \phi) \quad (2.38)$$

avec  $\tau$  la constante de temps pour la décroissance de l'excitation A,  $H_0$  l'amplitude du champ d'excitation,  $H'_0$  l'amplitude de l'harmonique 5 de l'excitation B et  $\phi$  le déphasage associé.

La forme d'onde de type désaimantation, appelée excitation A (équation 2.37), peut être considérée comme un régime transitoire. En fait, il s'agit de la même forme d'onde que celle utilisée pour la méthode d'identification **M2** présentée au paragraphe 2.2.3.3. D'autre part, comme les systèmes électriques sont de plus en plus alimentés par des convertisseurs d'électronique de puissance, cela induit des courants et des tensions périodiques mais non sinusoïdaux. Ainsi, l'excitation B (équation 2.38) permet de tester la précision des modèles dans des conditions d'excitation, non pas identiques mais assez proches pour visualiser les cycles mineurs. Les résultats obtenus pour les deux excitations A et B (équations (2.37) et (2.38)) sont donnés sur les figures 2.42 à 2.44.

Dans le cas de l'excitation A, les modèles donnent des résultats très proches de l'expérience. Ces résultats étaient prévisibles puisque ce type d'excitation est assimilable à une succession de cycles d'hystérésis centrés dont l'amplitude diminue. En effet, nous avons vu dans le paragraphe précédent que les deux modèles sont assez précis pour la restitution de cycles centrés. Le seul écart notable entre simulation et

expérience est observé pour les faibles amplitudes d'excitation dans le cas des tôles FeSi.

Lors de l'application de l'excitation B, une différence importante apparaît entre les réponses des deux modèles. Nous constatons que le modèle de Preisach est assez précis dans la restitution des cycles mineurs non centrés alors que le modèle de Jiles-Atherton donne un comportement non physique. Cette caractéristique est très prononcée dans le cas des tôles FeSi et des poudres de fer. Les figures 2.43 et 2.44 montrent bien dans la partie agrandie que les cycles mineurs ne se referment pas. En fait, le modèle de Jiles-Atherton n'assure pas systématiquement la fermeture des cycles mineurs. Cette caractéristique est aussi observée pour des cycles centrés de très faibles amplitudes mais dans une moindre mesure. En outre, les cycles mineurs sont plus "aplatis" que ceux obtenus par la mesure. Ce phénomène a déjà été observé dans plusieurs travaux comme dans [49, 50] par exemple, où une solution est proposée pour assurer la fermeture des cycles mineurs. Toutefois, les solutions préconisées rendent le modèle plus compliqué et requièrent la connaissance, *a-priori*, des extrema du champ appliqué. Or, lors de la simulation d'un système électrotechnique par la méthode des éléments finis avec l'utilisation d'un modèle d'hystérésis, l'amplitude de chaque cycle sur chaque élément n'est pas initialement connue. Dans ce cas, l'utilisation d'un modèle de Jiles-Atherton modifié [49] n'est pas adaptée.

Le modèle de Preisach est quant à lui plus adapté à ce type de comportement, grâce à sa propriété intrinsèque de mémoire de l'histoire du matériau. En effet, nous avons vu, dans la présentation de ce modèle, que cette caractéristique est clairement mise en évidence par la ligne brisée, associée au vecteur d'histoire, dans le plan de Preisach. Ainsi, les résultats obtenus par ce modèle sont satisfaisants pour les ferrites et les poudres de fer. Toutefois, dans le cas des tôles FeSi, les cycles mineurs sont légèrement plus aplatis que ceux obtenus par la mesure. De la même manière que pour le modèle de Jiles-Atherton, plusieurs travaux ont porté sur l'amélioration de la prise en compte de la fermeture des cycles mineurs. Par exemple, E. Della Torre a proposé une méthode appelée "moving Preisach model" qui assure une meilleure restitution des cycles mineurs [51]. Dans ce cas, un champ d'interaction, qui dépend de l'état d'aimantation, est introduit en boucle de retour sur le modèle original. Toutefois, l'ajout d'une telle procédure compliquerait le modèle qui, comme nous le verrons par la suite, nécessite déjà des temps de calcul importants.

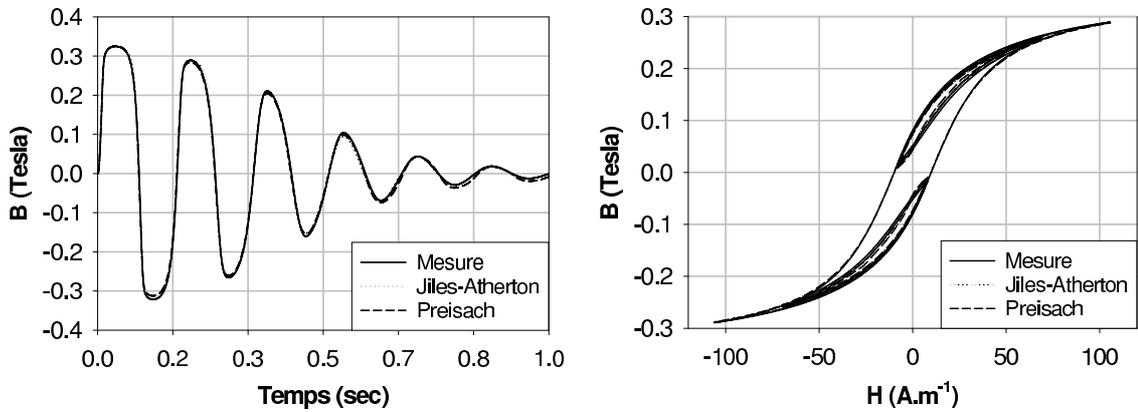


FIG. 2.42 - Ferrites N30; comparaison des résultats théoriques et expérimentaux dans le cas des excitations A et B (évolution  $B(t)$  pour l'excitation A et évolution  $B(H)$  pour l'excitation B).

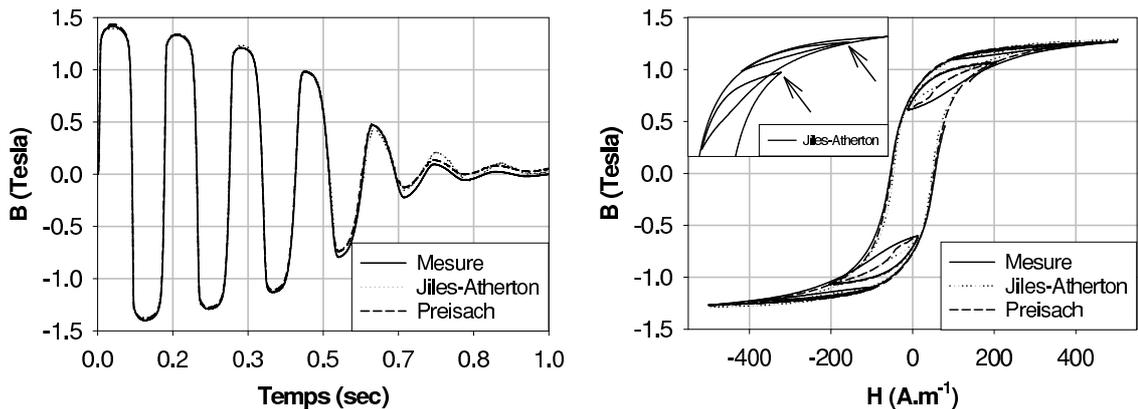
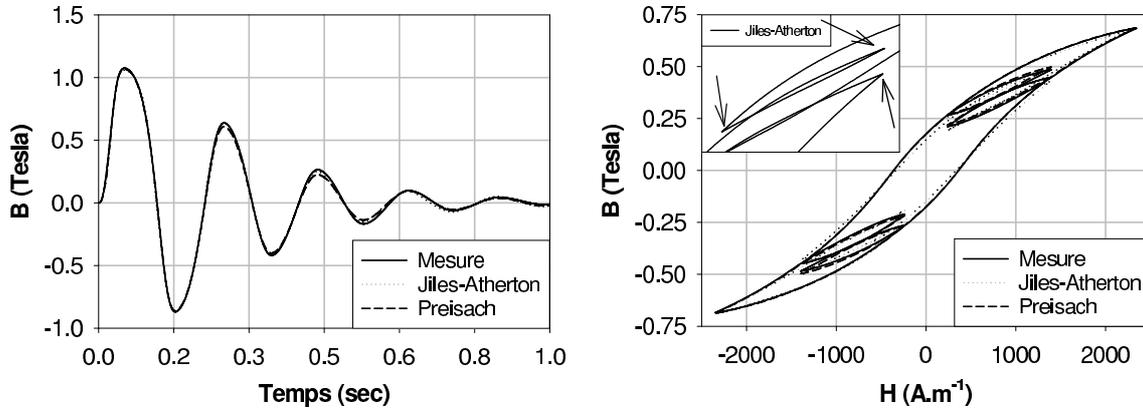


FIG. 2.43 - Tôles FeSi; comparaison des résultats théoriques et expérimentaux dans le cas des excitations A et B (évolution  $B(t)$  pour l'excitation A et évolution  $B(H)$  pour l'excitation B).

## 2.3.4 Étude de l'aspect calcul numérique

### 2.3.4.1 Sensibilité numérique du modèle de Jiles-Atherton

Le modèle de Jiles-Atherton requiert la résolution d'une équation différentielle du premier ordre; ceci peut-être effectué par la méthode d'Euler. Nous avons observé une nette sensibilité au pas de calcul  $\delta H$  lors de la résolution de cette équation différentielle. L'utilisation d'un pas de calcul  $\delta H$  trop important peut conduire à des déformations non physiques des cycles d'hystérésis. Par exemple, dans le cas d'une excitation sinusoïdale, nous observons sur la figure 2.45 les résultats de deux

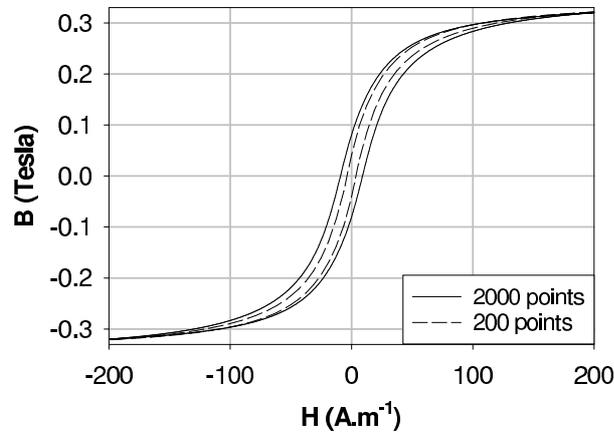


**FIG. 2.44** - Poudres de fer; comparaison des résultats théoriques et expérimentaux dans le cas des excitations A et B (évolution  $B(t)$  pour l'excitation A et évolution  $B(H)$  pour l'excitation B).

simulations, l'une avec un  $\delta H$  pour 200 points par période et l'autre avec un  $\delta H$  pour 2000 points. Il apparaît nettement que la surface du cycle augmente avec le pas de calcul  $\delta H$ . Ainsi, il existe un pas de calcul  $\delta H$  minimal à partir duquel les cycles d'hystérésis simulés ne se déforment plus. Notre expérience a montré qu'un pas de calcul permettant l'obtention de 2000 points par cycle est nécessaire pour avoir un bon compromis entre la précision et les temps de calcul dans le cas des trois matériaux utilisés pour cette étude. De la même manière que pour les cycles mineurs non centrés, la sensibilité numérique de ce modèle ne permet pas le calcul précis de cycles centrés dans la zone de Rayleigh. En effet, ceux-ci ne se referment pas et sont souvent non centrés. Toutefois, le résultat est amélioré après simulation de plusieurs cycles bien qu'en calcul de champ il n'est pas possible d'effectuer ce genre de compromis. A l'opposé, le modèle de Preisach n'est pas sensible au pas de calcul. Dans ce cas, si on considère les mêmes points de rebroussement du champ d'excitation, le pas de calcul n'a aucune influence sur la forme du cycle d'hystérésis. En fait, à l'opposé du modèle de Jiles-Atherton, aucune équation différentielle n'est résolue. L'aimantation est obtenue par simple addition ou soustraction d'une fonction (fonction d'Everett) qui ne dépend que du champ courant  $H$  et du dernier point de rebroussement.

#### 2.3.4.2 Temps de calcul

Les temps de calcul pour chacun des modèles sont reportés sur le tableau 2.5. Les simulations ont été effectuées pour un cycle majeur dans le cas des tôles FeSi avec



**FIG. 2.45** - Cycles calculés pour des pas de calcul donnant 200 points et 2000 points dans le cas du modèle de Jiles-Atherton (Ferrites N30).

des temps de calcul donnant 2000 points pour chaque modèle et 100 points pour le modèle de Preisach. Tout d'abord, nous pouvons constater que le temps de calcul du modèle de Preisach n'est pas proportionnel au nombre de points par période. En effet, lors de l'exécution du code de calcul, les courbes d'Everett déterminées à partir de l'expérience doivent être chargées en mémoire. Ce temps de chargement est inclus dans le temps de calcul total.

**TAB. 2.5** - Temps de calcul pour les tôles FeSi (Station Digital DEC Alpha 500 à 400 MHz).

Modèle	Temps (ms) pour 2000 points	Temps (ms) pour 100 points
Preisach (Everett)	250	100
Jiles-Atherton	80	n.a.

Le modèle de Preisach apparaît bien plus "gourmand" en temps de calcul, ceci peut-être expliqué par deux points. Il y a d'abord la gestion du vecteur d'histoire qui nécessite l'application d'une suite de tests ainsi que la gestion de tableau. Ensuite, la méthode d'interpolation pour la fonction d'Everett requiert un nombre d'opérations numériques plus élevé que dans le cas du modèle de Jiles-Atherton. D'autre part, nous constatons que malgré le grand nombre de points nécessaire à ce modèle (2000 points), le temps de calcul associé est légèrement plus faible que celui du modèle de Preisach avec 100 points. Cette petite différence donne l'avantage au modèle de Jiles-Atherton lors de l'utilisation en calcul éléments finis puisque cette différence est

cumulée pour chaque élément du maillage du matériau magnétique et pour chaque période de calcul. Nous devons remarquer que, dans le cas du modèle de Jiles-Atherton, il est nécessaire d'effectuer une boucle interne si le nombre de points par période est inférieur aux 2000 points requis pour la stabilité numérique en terme de restitution de cycles.

## 2.4 Application à un système électromagnétique

### 2.4.1 Système étudié

Afin de comparer les performances des deux modèles implantés dans un code éléments finis, nous nous proposons d'étudier une inductance dont le noyau est à base de poudres de fer<sup>2</sup>. La géométrie du système est donnée sur la figure 2.46. La bobine est alimentée par une tension sinusoïdale de valeur efficace 90 Volts à une fréquence de 60 Hz. Nous comparons en régime permanent le courant, les pertes fer et l'évolution locale de la loi de comportement  $B(H)$ . Nous sommes alors amené à résoudre les équations de la magnétostatique couplées avec le circuit extérieur. Le modèle numérique a été présenté au 1<sup>er</sup> Chapitre.

Pour cette étude, 3 maillages différents ont été utilisés : un maillage M1 constitué de 1284 éléments, un maillage M2 constitué de 2987 éléments et un maillage M3 constitué de 5448 éléments. L'influence de la qualité du maillage pourra aussi être comparés pour les deux modèles.

### 2.4.2 Comparaison des résultats

Tout d'abord, nous pouvons comparer les lois de comportements  $B(H)$  obtenues avec les deux modèles. Par exemple, les cycles d'hystérésis pour le point P1 (figure 2.46) sont reportés sur la figure 2.47. Il apparaît clairement, comme nous l'avons constaté précédemment, que les deux modèles donnent des résultats similaires. Des comparaisons pour d'autres points du système donnent aussi des cycles très proches.

Nous nous intéressons maintenant à la comparaison des grandeurs globales telles que le courant ou les pertes par hystérésis. Ainsi, le courant, mesuré dans les conditions précédemment citées, est comparé à celui obtenu par calcul de champ pour chaque modèle. Les valeurs efficaces du courant sont donc reportées sur le tableau

---

<sup>2</sup>Ce dispositif a été développé au LEEPCI (Université Laval, Québec) où les relevés expérimentaux ont été effectués

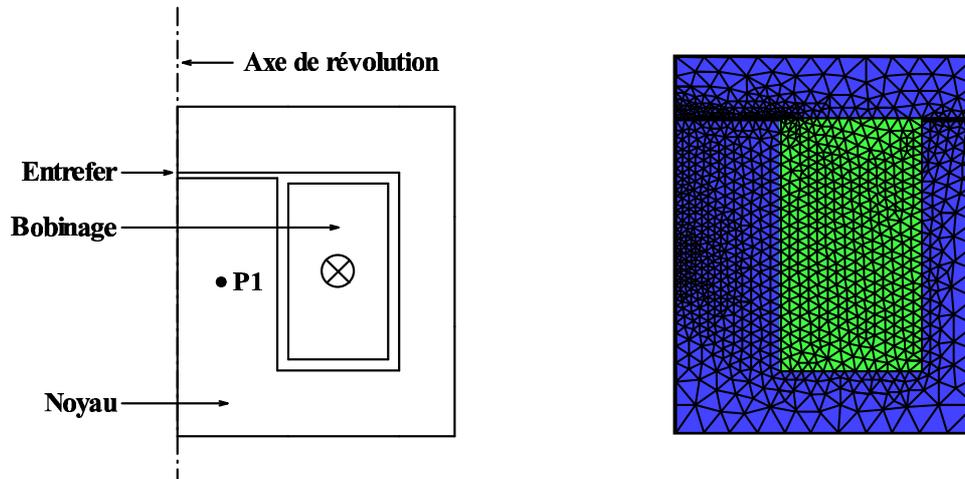


FIG. 2.46 - Géométrie du système étudié et maillage associé (M1).

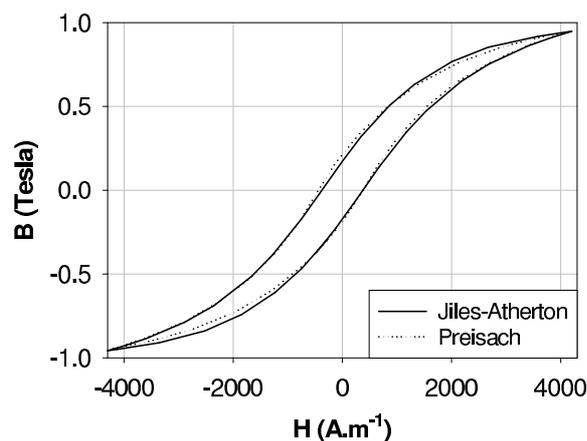


FIG. 2.47 - Cycles calculés par les 2 modèles pour le point P1.

2.6 pour les trois maillages utilisés. Le maillage M3 donne des résultats très proches de ceux du maillage M2, c'est pourquoi seules les formes d'onde du courant pour les maillages M1 et M2 sont données sur la figure 2.48.

Dans le cas du maillage M1, les formes d'onde du courant obtenus par les deux modèles sont très proches de l'expérience. L'erreur constatée pour le modèle de Preisach est de 6,5% alors que le modèle de Jiles-Atherton donne un résultat avec une erreur de 9% (tableau 2.6). Toutefois, contrairement à ce qui aurait pu être attendu, nous constatons qu'avec le maillage M2, l'amplitude du courant devient plus faible et s'écarte légèrement de l'expérience (erreur de 13%). Dans ce cas, les deux modèles donnent des résultats quasi-identiques, alors que pour le maillage M1 le modèle de Preisach donnait un résultat légèrement meilleur.

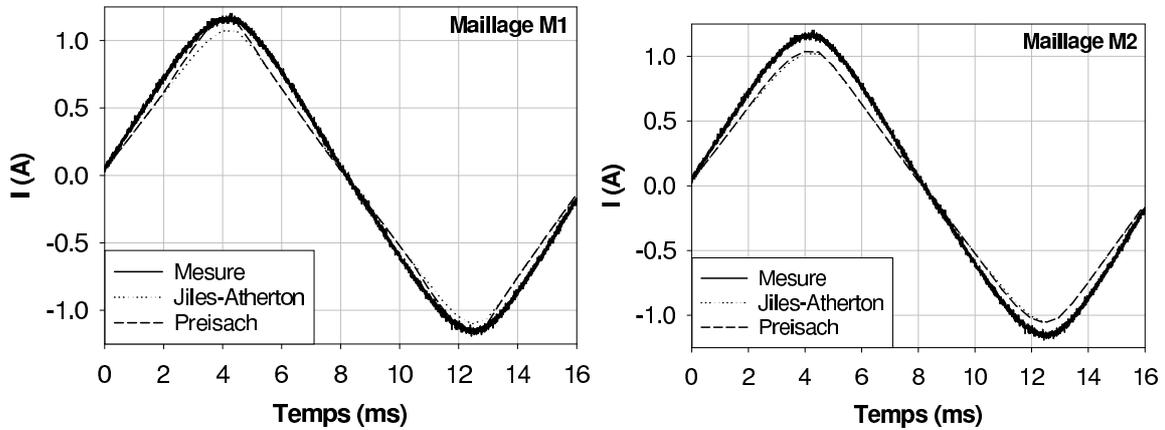


FIG. 2.48 - Courant mesuré et courants obtenus par les 2 modèles dans le cas des maillage M1 et M2.

TAB. 2.6 - Comparaison des valeurs efficaces du courant entre expérience et calcul.

Expérience	Modèle de Jiles-Atherton	Modèle de Preisach
$I_{RMS}$ M1 (A)	0,69	0,71
$I_{RMS}=0,76$ A $I_{RMS}$ M2 (A)	0,66	0,67
$I_{RMS}$ M3 (A)	0,66	0,66

Cette légère augmentation de l'écart entre la simulation et l'expérience avec l'affinage du maillage peut être expliquée par l'existence de deux sources d'erreurs inhérentes au modèle numérique utilisé pour cette étude [16] :

- l'erreur de modélisation qui représente la différence entre le système réel et le modèle mathématique,
- l'erreur numérique qui représente la différence entre le modèle numérique et le modèle mathématique.

Ainsi, dans le cas du maillage M1, l'erreur numérique et l'erreur de modélisation se compensent alors que pour les maillages M2 et M3, l'erreur numérique ayant été diminuée par l'affinage du maillage, l'erreur de modélisation devient fortement majoritaire (figure 2.49).

On donne sur le tableau 2.7 les pertes évaluées à partir des deux modèles pour le maillage M3 ainsi que les pertes mesurées sur une période. Les pertes notées  $PF_1$  sont obtenues à partir de grandeurs magnétiques par sommation des pertes calculées sur chaque élément du maillage (équation (2.39)). Celles-ci sont déterminées à partir

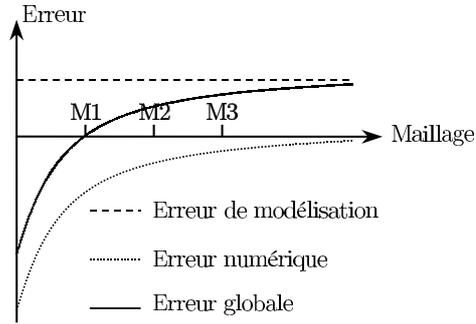


FIG. 2.49 - Allure de l'évolution de l'erreur en fonction du nombre d'éléments du maillage.

de l'évolution de la densité de pertes  $d_h$  en fonction de  $B_{max}$  obtenue à partir des modèles. Les pertes notées  $PF_2$  sont quant à elles déduites des grandeurs électriques suivantes :  $u(t)$  la tension appliquée,  $i(t)$  le courant calculé et  $R$  la résistance du maillage (équation (2.40)).

$$PF_1 = \sum_{\text{éléments}} l S_e d_h(B_{max}^e) \quad (2.39)$$

où la somme est effectuée sur l'ensemble des éléments du maillage.  $S_e$  est la surface de l'élément  $e$ ,  $l$  la profondeur du système étudié (dans la troisième dimension) et  $B_{max}^e$  l'amplitude maximum de l'induction sur l'élément  $e$ .

$$PF_2 = \langle u(t) \cdot i(t) - R \cdot i(t)^2 \rangle \quad (2.40)$$

TAB. 2.7 - Evaluation des pertes par hystérésis par les 2 modèles.

Expérience	Modèle de Jiles-Atherton	Modèle de Preisach
$PF_{exp} = 4,3W$	$PF_1$ (W)	4,17
	$PF_2$ (W)	4,38

Les deux méthodes de calcul de pertes  $PF_1$  et  $PF_2$  donnent des résultats très proches. L'une ou l'autre des méthodes peut donc être utilisée pour évaluer les pertes par hystérésis. Il doit être aussi noté que, pour un modèle donné, les pertes par hystérésis calculées à partir des grandeurs électriques ont des valeurs très proches quelque soit le maillage (M1, M2 ou M3) utilisé pour le calcul. Nous pouvons en déduire que, dans notre cas de figure, l'utilisation d'un maillage fin pour l'évaluation des pertes n'est pas nécessaire.

Enfin, le dernier point sur lequel nous allons terminer l'étude de cette inductance, concerne les temps de calcul associés aux deux modèles. Ces temps, qui sont reportés sur le tableau 2.8, correspondent à une trentaine d'itérations non-linéaires à chaque pas de temps et à 35 points par période (24 périodes au total). Il apparaît clairement, comme présenté au paragraphe 2.3.4.2, que le modèle de Preisach est bien plus lourd en terme de temps de calcul que le modèle de Jiles-Atherton. La différence de temps de calcul devient plus importante avec l'augmentation du nombre d'éléments du maillage. En effet, les modèles sont appliqués pour chaque élément du maillage et pour chaque pas de temps. Ainsi, dans le cas du maillage M3, le modèle de Preisach demande jusqu'à 4 fois plus de temps de calcul que le modèle de Jiles-Atherton.

**TAB. 2.8** - *Rapport des temps de calcul entre les 2 modèles (le temps de calcul du modèle de Jiles-Atherton a été pris comme référence pour chaque maillage).*

Maillage	Nbr. d'éléments	Modèle de Jiles-Atherton	Modèle de Preisach
M1	1284	1	2,8
M2	2987	1	3,1
M3	5448	1	3,9

## 2.5 Synthèse

Les principaux résultats de la comparaison entre les modèles de Jiles-Atherton et Preisach sont résumés au tableau 2.9. Le modèle de Preisach a été présenté avec une méthode d'identification basée sur la détermination de la fonction d'Everett. Cette méthode nécessite la mesure de cycles d'hystérésis rigoureusement centrés sinon les écarts entre l'expérience et la simulation risquent d'être importants, notamment en ce qui concerne les points rémanent et coercitif dans le cas du modèle  $M(B)$ . Néanmoins, nous constatons que les résultats du modèle de Preisach sont plus précis quelque soit le type d'excitation utilisée dans le cadre de cette étude. D'un autre côté, le modèle de Jiles-Atherton, qui est bâti sur des hypothèses plus physiques que le modèle de Preisach, requiert une optimisation des paramètres afin d'obtenir des résultats satisfaisants sur une large gamme d'amplitudes d'excitation. Nous pouvons conclure d'après notre expérience que les deux modèles sont équivalents en termes d'identification.

TAB. 2.9 - *Résumé des résultats*

	Excitation	Modèle de Jiles-Atherton	Modèle de Preisach
Identification		2 étapes : procédure itératives et optimisation pour 5 paramètres. Ensemble de cycles expérimentaux centrés.	Méthodes d'interpolation pour les modèles $M(H)$ et $M(B)$ . Les cycles expérimentaux doivent être rigoureusement centrés pour le modèle $M(B)$ .
Ferrites N30	sinusoïdal	++	++
	non-sinusoïdal	+	++
Tôles FeSi	sinusoïdal	+	++
	non-sinusoïdal	+	+
Poudres de fer	sinusoïdal	++	++
	non-sinusoïdal	+	++
Aspect numérique		- nécessite 2000 points par cycle mais rapide - simple à implanter numériquement	- 100 points sont suffisants mais plus "gourmand" en temps de calcul - implantation non aisée

++ bons résultats

+ résultats corrects

D'autre part, les matériaux utilisés pour cette étude ont été choisis pour leurs différents domaines d'application et pour leur différents comportements magnétiques. Ainsi, les résultats obtenus nous permettent de choisir le modèle le plus approprié en fonction du système électromagnétique étudié (tableau 2.9). Par exemple, dans le cas d'une excitation sinusoïdale, l'utilisation du modèle de Jiles-Atherton donne des résultats très proches de ceux du modèle de Preisach. Néanmoins, il a été observé que ce modèle est moins précis que le modèle de Preisach pour la simulation de la loi de comportement des ferrites N30 et des tôles FeSi. En fait, le modèle de Preisach est très bien adapté pour l'étude des trois types de matériaux et l'idée consiste à savoir quand utiliser le modèle de Jiles-Atherton qui est beaucoup plus simple à mettre en oeuvre et à implanter dans un code de calcul éléments finis. En effet, dans le cas des poudres de fer, le modèle de Jiles-Atherton est très bien adapté. Son inconvénient

majeur est le problème de non fermeture des cycles mineurs non centrés. Cet aspect restreint son utilisation dans le cas d'excitations purement sinusoïdales. Dans le cas contraire, l'utilisation du modèle de Preisach est recommandée bien que lui non plus ne donne pas de très bons résultats pour ces cycles mineurs.

En ce qui concerne l'aspect numérique, le modèle de Jiles-Atherton est bien plus simple à implanter dans un code de calcul de champ. De plus, il requiert moins de temps de calcul et moins de ressources "mémoire" que le modèle de Preisach. En effet, celui-ci nécessite le stockage dans la mémoire du vecteur d'histoire en plus du champ magnétique courant. Lors de l'étude d'un système magnétique complexe, et spécialement en éléments finis, le calcul de la loi de comportement doit être rapide. En fait, l'utilisateur doit faire un compromis entre la précision et le temps de calcul.

Afin de valider les résultats de cette comparaison, nous avons étudié un système électromagnétique simple, à savoir une bobine à noyau de poudres de fer alimentée par une tension sinusoïdale. Les simulations ont été effectuées pour les deux modèles qui ont été implantés dans un code de calcul éléments finis. Les résultats pour le comportement magnétique local (courbes  $B(H)$ ) sont en accord avec l'étude précédemment faite et les deux modèles donnent de résultats similaires très proches de l'expérience pour les grandeurs globales telles que le courant ou les pertes fer. Enfin, les temps de calcul donnent un net avantage au modèle de Jiles-Atherton. Ainsi, comme prévu, ce modèle est le mieux adapté à l'étude d'un système à base de poudres de fer sous des conditions d'excitation sinusoïdale.



# Chapitre 3

## Etude des modèles dynamiques

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons l'étude et la comparaison de modèles d'hystérésis pour l'étude de matériaux en régime dynamique. Dans ce cas, la forme du cycle d'hystérésis ne dépend plus seulement des extrema du champ mais aussi de son taux de variation temporel. Ainsi, nous notons, par exemple pour les tôles FeSi, un gonflement du cycle en fonction de la fréquence. De la même manière qu'au chapitre précédent, nous présentons les différents modèles étudiés ainsi que leur application dans le cas de mesures sur le banc expérimental. Enfin, nous terminons par l'application d'un modèle dynamique pour le calcul de champ.

### 3.2 Modèle de Preisach étendu à la dynamique

Le modèle de Preisach dynamique tel que présenté dans la suite est applicable aux tôles utilisées en construction électrique. Ce modèle est basé sur le concept d'objet magnétique (O.M.) introduit par Bertotti [52] dans sa théorie statistique sur le mouvement des parois de Bloch et constitue actuellement le modèle de référence pour la prise en compte des phénomènes dynamiques dans un modèle d'hystérésis. Nous rappelons cette théorie dans un premier paragraphe, puis nous présentons les équations du modèle de Preisach dynamique.

### 3.2.1 Théorie statistique de Bertotti

Au sein d'un matériau ferromagnétique, les parois de Bloch ne se déplacent pas de manière totalement indépendante. En effet, à cause de certaines corrélations internes d'origine magnétostatique, ces parois ont tendance à se déplacer en groupes. Ainsi, Bertotti désigne par Objet Magnétique (O.M.) un ensemble de parois ayant le même comportement dynamique. De plus, la taille d'un O.M. dépend de la nature du matériau ainsi que de l'espacement entre les parois.

En fait, dans sa théorie statistique, Bertotti applique le modèle de Kittel [24] (Cf. paragraphe 1.4.7.3), associé au mouvement d'une paroi, à un O.M. Dans une première étape, il suppose que l'ensemble des parois est aléatoirement distribué dans la structure magnétique. Ainsi, l'évolution d'une paroi au sein de la structure entraîne une variation de flux locale telle que :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{\sigma G} [H_{surf}(t) - H_{hyst} - H_i(t)] \quad (3.1)$$

Dans cette équation, il apparaît deux contre-champs  $H_{hyst}$  et  $H_i(t)$ , respectivement liés aux mêmes phénomènes que ceux rencontrés dans le cas de déplacements de parois à basse fréquence (hystérésis statique) et aux courants induits moyens ayant pour origine le mouvement des autres parois. Comme pour le modèle de Kittel,  $H_{surf}(t)$  représente le champ d'excitation en surface de la tôle. Le facteur  $G$  est un coefficient d'amortissement sans dimension de valeur 0,1356 déjà introduit dans la théorie de Kittel. Il détermine la proportionnalité entre la pression agissant sur la paroi mobile et la variation de flux correspondante. C'est le même facteur qui intervient dans l'expression du coefficient de mobilité  $\eta$  dans la théorie de Kittel (paragraphe 1.4.7.3 au 1<sup>er</sup> Chapitre).

L'hypothèse sur la répartition aléatoire des parois est valable dans le cas des tôles à grains orientés. En effet, l'espacement entre les grains étant généralement plus grand que l'épaisseur de la tôle, une paroi peut-être assimilée à un O.M. pour lequel la relation (3.1) reste valable. Par contre, pour des tôles à grains non orientés, étant donnée la finesse de la structure en domaines, un O.M. est constitué de plusieurs parois magnétiquement corrélées et qui interagissent entre-elles dans une région limitée de la section de la tôle. Ce groupe de parois est appelé Groupe de Barkhausen (G.B.). Une étude statistique montre que ce type de matériau obéit aussi à la loi (3.1) mais à condition de considérer un coefficient d'amortissement différent. En effet, en associant à chaque G.B. un coefficient d'amortissement  $G^{G.B.}$  et en supposant une distribution aléatoire de ces G.B., l'équation (3.1) devient :

$$\frac{\partial \Phi^{G.B.}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma G^{G.B.}} [H_{surf}(t) - H_{hyst} - H_i] \quad (3.2)$$

où  $G^{G.B.}$  est une fonction compliquée de la structure interne du Groupe de Barkhausen ( $G \leq G^{G.B.} \leq 0,5$ ). Par analogie avec l'équation (3.1), nous constatons que c'est le Groupe de Barkhausen qui joue le rôle d'un Objet Magnétique. Bertotti généralise les deux cas précédents, équations (3.1) et (3.2), en associant à chaque O.M. un coefficient d'amortissement généralisé  $G'$ . On montre que  $G' \simeq G$  et les O.M. étant supposés distribués aléatoirement dans la section, nous avons l'équation généralisée suivante :

$$\frac{\partial \Phi^{O.M.}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma G} [H_{surf}(t) - H_{hyst} - H_i] \quad (3.3)$$

A partir de cette expression, nous allons introduire le modèle de Preisach étendu à la dynamique.

### 3.2.2 Introduction du modèle de Preisach dynamique

Dans l'expression de l'aimantation du modèle de Preisach statique (équation 2.10), les commutateurs  $\gamma_{a,b}$  basculent instantanément. Dans le cadre de la généralisation de Bertotti, un O.M. est associé à chaque cycle élémentaire. La variation de flux d'un tel O.M. est décrite par la loi (3.3). L'expression de l'aimantation devient alors :

$$M = M_{sat} \iint_{\Delta} p(a,b) \cdot \Phi(a,b,t) da db \quad (3.4)$$

Dans ce modèle, les commutateurs ont une pente finie (figure 3.1) et la variation temporelle du flux est décrite par une expression similaire à celle donnée par l'équation (3.3) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= k \cdot [H(t) - a] \text{ pour } H(t) \geq a \text{ et } \Phi(a,b,t) \leq +1 \\ &\hspace{15em} (\text{évolution croissante}) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= k \cdot [H(t) - b] \text{ pour } H(t) \leq b \text{ et } \Phi(a,b,t) \geq -1 \\ &\hspace{15em} (\text{évolution décroissante}) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= 0 \hspace{15em} \text{sinon} \end{aligned} \quad (3.5)$$

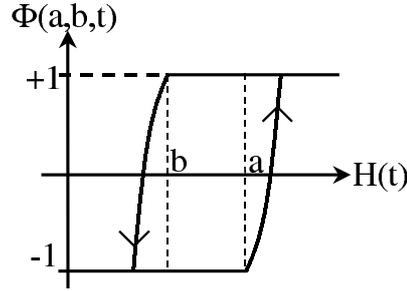


FIG. 3.1 - *Commutateur magnétique dynamique.*

Le paramètre  $k$  est issu de la normalisation du flux associé localement à chaque O.M. :

$$k = \frac{N_0}{\sigma G S M_s} \quad (3.6)$$

avec  $S$  la section de la tôle,  $\sigma$  la conductivité,  $N_0$  le nombre d'O.M. dans la section de la tôle et  $M_s$  l'aimantation à saturation. L'estimation du paramètre  $k$  reste toutefois assez difficile à partir de l'équation (3.6). Dans [53], une méthode basée sur l'expérience est proposée pour la détermination de  $k$  pour une plage de fréquence donnée.

Puisque ce modèle doit être valable en basse fréquence, où on doit retrouver le modèle statique de Preisach, la densité  $p(a, b)$  est bien celle identifiée dans le cadre du régime quasi-statique. De plus, étant donné la forme d'un cycle élémentaire, nous pouvons définir des surfaces  $S_+(t)$  et  $S_-(t)$  dans le triangle de Preisach telles que dans  $S_+(t)$  les commutateurs sont dans un état intermédiaire entre la saturation négative et la saturation positive, et dans  $S_-(t)$  les commutateurs sont dans l'état intermédiaire inverse. L'aimantation totale est réécrite sous la forme :

$$M = M_{sat} \int \int_{S_+(t)} p(a, b) \cdot \Phi(a, b, t) da db + \int \int_{S_-(t)} p(a, b) \cdot \Phi(a, b, t) da db \quad (3.7)$$

### 3.2.3 Discussion sur le modèle de Preisach dynamique

Nous avons vu au paragraphe précédent l'extension en dynamique du modèle de Preisach proposée par Bertotti. Le modèle obtenu décrit l'effet fréquentiel sur l'allure des cycles d'hystérésis locaux dans l'épaisseur d'une tôle. Toutefois, ce modèle, certes performant [54], reste compliqué à mettre en oeuvre et très gourmand en temps de

calcul. Ces deux considérations le rendent difficile à implanter dans un code de calcul de champ [55].

### 3.3 Courants induits macroscopiques : équation de diffusion

Lorsqu'un matériau conducteur est soumis à un champ variable, il apparaît dans celui-ci une force électromotrice à laquelle sont associés des courants induits macroscopiques. La prise en compte de ces courants dans un modèle d'hystérésis peut être effectuée à partir de l'équation de diffusion du champ magnétique.

On considère la tôle de la figure 3.2 soumise à un champ d'induction perpendiculaire à sa section et dont les dimensions  $L$  et  $l$  sont très grandes par rapport à son épaisseur  $e$  ( $L \gg e$  et  $l \gg e$ ). Si on néglige les effets de bord et que le champ est supposé uniforme dans un plan parallèle à la surface de la tôle, nous devons résoudre un problème à une dimension. Nous avons donc  $\mathbf{H}(x, t) = H(x, t)\mathbf{e}_z$  et  $\mathbf{B}(x, t) = B(x, t)\mathbf{e}_z$  qui sont indépendants des coordonnées  $y$  et  $z$  dans le repère  $(Oxyz)$  de la figure 3.2. Dans ce cas, l'équation de diffusion à une dimension, obtenue à partir des équations de Maxwell, est donnée par :

$$\frac{\partial^2 H(x, t)}{\partial x^2} = \sigma \frac{\partial B(x, t)}{\partial t} \quad (3.8)$$

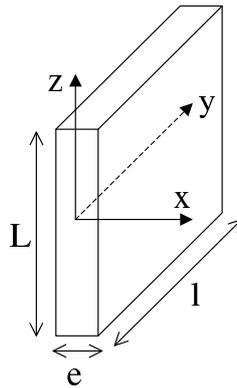


FIG. 3.2 - Tôle de grandes dimensions ( $L \gg e$  et  $l \gg e$ ).

La variation d'induction crée une force électromotrice qui entraîne l'apparition de courants induits. Ceux-ci créent un champ qui s'oppose au champ d'excitation  $B(x, t)$ . La répartition de ce champ dans l'épaisseur de la tôle est non homogène. En effet, le module de  $B(x, t)$  est tel qu'en surface de la tôle  $B(e/2, t) = B(-e/2, t) =$

$B_{max}(t)$  et son amplitude décroît d'autant plus qu'on s'approche du centre de la tôle. La vitesse de décroissance de l'amplitude dépend de la fréquence de travail et donc de l'épaisseur de peau qui est définie par l'expression (3.9) qui représente la profondeur à laquelle la densité de courant atteint 37% de sa valeur en périphérie.

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}} \quad (3.9)$$

Ainsi, expérimentalement on considère pour l'induction une valeur moyenne  $B_{moy}(t)$  qui globalise les effets dynamiques et, associée au champ surfacique  $H_{surf}(t)$ , donne des cycles d'hystérésis apparents dépendants de la fréquence.

### 3.4 Modèle de Preisach dynamique et équation de diffusion

L'équation de diffusion ne rend pas compte des courants induits microscopiques dus aux déplacements de parois. La prise en compte des deux types de courants induits peut-être réalisée grâce à l'association du modèle dynamique de Preisach, qui prend en compte les courants induits microscopiques, et l'équation de diffusion (3.8).

Dans [57], Philips et al. présentent une utilisation du modèle dynamique de Preisach avec la résolution numérique de l'équation de diffusion dans un code de calcul de champ en éléments finis. La méthode de résolution temporelle de cette équation en éléments finis est traitée dans [58] et [59]. Les résultats obtenus sont en accord avec l'expérience pour des tôles FeSi à grains non orientés. Toutefois, les temps de calcul deviennent très vite incompatibles avec les critères que l'on exige pour une implantation en éléments finis.

Dans les travaux de thèse de L.L. Rouve [53], une comparaison est effectuée entre les résultats de la méthode présentée précédemment et une méthode de résolution analytique de l'équation de diffusion associée au modèle dynamique de Preisach. En effet, à partir d'hypothèses simplificatrices et du modèle dynamique de Preisach, le cycle  $B_{moy}(H_{surf})$  peut être calculé pour des fréquences supérieures à la fréquence de travail classique des tôles. Cette méthode consiste à discrétiser la section d'une tôle pour prendre en compte les variations du champ magnétique (figure 3.3). Dans une première étape, la répartition du champ est déterminée dans chaque section  $i$  discrétisée à partir de l'équation de diffusion. Celle-ci est résolue analytiquement à partir d'hypothèses simplificatrices. Enfin, les champs  $H(x_i, t)$  obtenus sont ensuite

appliqués au modèle dynamique de Preisach qui permet d'obtenir les inductions  $B(x_i, t)$  pour calculer la valeur moyenne de l'induction sur la section de la tôle.

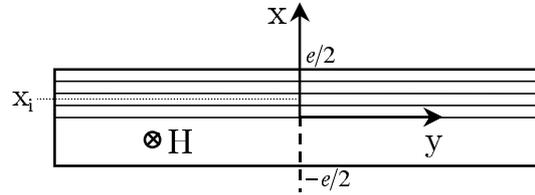


FIG. 3.3 - *Discrétisation de la section de la tôle.*

Toutefois, afin de résoudre analytiquement l'équation de diffusion, il est nécessaire de considérer que la perméabilité différentielle est constante dans l'épaisseur de la tôle (i.e. ne dépend pas de la position  $x$ ) pour un intervalle de temps donné  $\Delta t_i$ . Ainsi, le cycle d'hystérésis obtenu est une suite de variations linéaires de  $[B(H)]_{\Delta t_i}$ . Il apparaît donc que la résolution analytique de l'équation de diffusion nécessite un pas de temps  $\Delta t_i$  d'autant plus faible que l'on veut un modèle précis. Les résultats obtenus sont en accord avec ceux de la méthode numérique jusqu'à une fréquence de 500 Hz pour des tôles FeSi à grains non orientés [53]. La méthode de résolution analytique présente une alternative intéressante du point de vue du temps de calcul mais reste tout de même assez lourde à mettre en oeuvre.

## 3.5 Autres modèles

### 3.5.1 Modèle du LEG

Le modèle développé dans le cadre des travaux de thèse de T. Chevalier [62] est basé sur le principe de superposition des comportements statique et dynamique. Le comportement statique est décrit par un modèle similaire à celui présenté par Mayergoyz [63]. La mesure de plusieurs cycles à différentes fréquences permet d'obtenir une surface 3D  $H(B, dB/dt)$ . Cette surface contient les contributions statique et dynamique. L'identification du modèle statique est effectuée à l'aide d'un cycle majeur et un ensemble de courbes de renversement. Le comportement dynamique  $H_{dyn}(B, dB/dt)$  est quant à lui obtenu à partir de la différence entre la surface  $H(B, dB/dt)$  et le comportement statique  $H_{stat}(B)$ . La surface ainsi obtenue est définie par une expression analytique dans laquelle interviennent 6 paramètres [61]. L'application de ce modèle montre une excellente adéquation entre l'expérience et la simulation pour des tôles sous des conditions d'excitation sinusoïdales et avec

superposition d'harmoniques. L'erreur sur l'estimation des pertes est inférieure à 5%.

### 3.5.2 Modèle de Preisach paramétré

Dans ses travaux de thèse, Y. Bernard [60] propose une méthode originale pour la prise en compte des effets fréquentiels dans le modèle de Preisach. Celle-ci consiste à paramétrer la fonction de distribution inverse  $p'(a, b)$ , pour une utilisation  $M(B)$  du modèle de Preisach, en fonction d'une grandeur liée à la dynamique : la vitesse de variation de l'induction  $\frac{dB}{dt}$ . La nouvelle fonction de distribution s'écrit  $p'(a, b, \frac{dB}{dt})$ . Celle-ci est caractérisée pour une vitesse de variation donnée de l'induction,  $\frac{dB}{dt} = cst$ , et pour plusieurs amplitudes d'excitation. L'opération est répétée plusieurs fois pour différentes vitesses de variation de l'induction. Le processus expérimental se traduit par l'application dans l'échantillon d'un flux triangulaire de pente et d'amplitude variables. Il est observé que la loi d'évolution de la fonction de distribution  $p'(a, b, \frac{dB}{dt})$  en fonction de  $\frac{dB}{dt}$  peut être approximée par une droite. Il s'ensuit que :

$$p'(a, b, \frac{dB}{dt}) = p'_{stat}(a, b) + \gamma(a, b)(\frac{dB}{dt}) \quad (3.10)$$

Les résultats obtenus par cette méthode donne de bons résultats sur des tôles pour des variations de  $\frac{dB}{dt}$  atteignant 528 Tesla/sec. Toutefois, pour plus de précision, il est nécessaire de disposer d'un grand nombre de mesures pour des fréquences et des amplitudes d'excitation différentes.

## 3.6 Le modèle dynamique de Jiles-Atherton

Jiles propose dans [64] une extension en dynamique du modèle statique de Jiles-Atherton [29]. En réécrivant l'équation de bilan énergétique avec les contributions des pertes supplémentaires qui apparaissent en régime dynamique, il aboutit à un modèle d'hystérésis dépendant de la fréquence. Celui-ci nécessite le champ magnétique  $H$  comme variable d'entrée. Or, pour une utilisation avec une formulation en potentiel vecteur, dans un code de calcul de champ, il est plus commode de disposer d'un modèle avec l'induction  $B$  comme variable d'entrée. Dans la suite, en plus de la

présentation du modèle  $M(H)$ , nous proposons une adaptation pour une utilisation avec l'induction magnétique  $B$  comme variable d'entrée.

### 3.6.1 Modèle original

Dans ce modèle, les pertes totales sont séparées en trois contributions selon le principe de décomposition des pertes proposé par Bertotti [26]. La première est celle des pertes statiques dues aux forces de friction lors des déplacements de parois. Ces pertes peuvent être calculées à partir du modèle de Jiles-Atherton statique. La deuxième contribution aux pertes totales est due à l'apparition de courants induits en régime dynamique (Cf. paragraphe 3.3) et les pertes associées dépendent de la forme de l'échantillon. Néanmoins, pour des géométries simples et pour une pénétration uniforme du champ magnétique dans le matériau, il est possible de déterminer ces pertes par l'intermédiaire de l'expression :

$$\frac{dW_{CI}}{dt} = \frac{d^2}{2\rho\beta} \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 \quad (3.11)$$

Enfin, la troisième contribution est celle que Bertotti dénomme pertes par excès [26] (notées  $P_{exc}$ , cf. 1<sup>er</sup> chapitre) et dont l'expression est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{dW_{EXC}}{dt} = \left( \frac{GdwH_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{dB}{dt} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.12)$$

où  $\rho$  est la résistivité du matériau,  $d$ ,  $\beta$  et  $w$  sont des paramètres liés à la géométrie du matériau. Dans le cas d'une tôle, nous avons  $d$  qui correspond à l'épaisseur de la tôle, le facteur de forme  $\beta = 6$  et  $w$  correspond à la largeur de la tôle. Les autres paramètres sont  $G$ , la constante sans dimension qui vaut 0,1356 et  $H_0$  un paramètre lié au potentiel interne que subissent les parois des domaines [64]. Nous rappelons que les pertes par excès proviennent des dissipations d'énergie dues aux courants induits générés à l'échelle de la structure en domaines par le mouvement des parois.

Dans [65], Chikazumi a montré que les pertes instantanées par courants induits sont proportionnelles au carré de  $(dM/dt)$  et l'équation (3.11) peut donc être réécrite sous la forme suivante :

$$\frac{dW_{CI}}{dt} = \frac{\mu_0^2 d^2}{2\rho\beta} \left( \frac{dM}{dt} \right)^2 \quad (3.13)$$

Jiles reprend le bilan énergétique effectué pour le modèle statique, mais en y ajoutant cette fois-ci les contributions des pertes par courants induits et des pertes par excès. Le développement des calculs est présenté dans l'annexe C. L'équation différentielle du modèle  $M(H)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dM}{dH}\right) \left[ k\delta - \alpha \left( M_{an} - M + k\delta c \frac{dM_{an}}{dH_e} \right) \right] - \left( M_{an} - M + k\delta c \frac{dM_{an}}{dH_e} \right) \\ + D_1 \left( \frac{dH}{dt} \right) \left( \frac{dM}{dH} \right)^2 + D_2 \left( \frac{dH}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{dM}{dH} \right)^{\frac{3}{2}} = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

avec les paramètres dynamiques  $D_1$  et  $D_2$  qui sont donnés par :

$$\begin{aligned} D_1 &= \left( \frac{\mu_0 d^2}{2\rho\beta} \right) \\ D_2 &= \left( \frac{\mu_0 G d w H_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Dans l'équation (3.14) interviennent aussi les paramètres du modèle statique  $\alpha$ ,  $a$ ,  $c$ ,  $k$  et  $M_{sat}$ . L'expression de l'aimantation anhystérétique est donnée par (2.21). Dans une première approximation, les valeurs de ces paramètres sont les mêmes que ceux obtenus pour le modèle statique et présentés au 2<sup>ème</sup> chapitre. Les deux nouveaux paramètres  $D_1$  et  $D_2$  peuvent être déterminés à partir des grandeurs physiques (conductivité,...) et géométriques (facteur de forme, section,...) de l'échantillon considéré.

### 3.6.2 Extension au modèle M(B)

Etant donné que les modèles étudiés doivent pouvoir être utilisés avec la formulation en potentiel vecteur dans un calcul de champ, nous proposons une adaptation du modèle dynamique de Jiles-Atherton avec  $B$  comme variable d'entrée. Le principe du calcul reste le même que celui du modèle  $M(H)$  sauf que nous utilisons les expressions (3.11) et (3.12) des pertes par courants induits et des pertes excédentaires dans l'équation du bilan énergétique. Les calculs pour ce modèle sont aussi présentés dans l'annexe C. La différence par rapport au modèle original est l'introduction de l'expression suivante :

$$\frac{dH_e}{dB} = \frac{1}{\mu_0} + (\alpha - 1) \frac{dM}{dB} \quad (3.15)$$

Enfin, après réarrangement des termes en  $\left(\frac{dM}{dB}\right)$ , nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dB} \left[ \mu_0(\alpha - 1) \left( M - k\delta c \frac{dM_{an}}{dH_e} - M_{an} \right) + \mu_0 k \delta \right] + \left( M - M_{an} - k\delta c \frac{dM_{an}}{dH_e} \right) \\ + D'_1 \left( \frac{dB}{dt} \right) + D'_2 \left( \frac{dB}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

avec les paramètres dynamiques  $D'_1$  et  $D'_2$  qui sont donnés par :

$$D'_1 = \frac{1}{\mu_0} D_1 \quad (3.17)$$

$$D'_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} D_2 \quad (3.18)$$

Cette expression constitue l'équation différentielle du modèle  $M(B)$ . De la même manière que pour le modèle  $M(H)$ , les 5 paramètres  $\alpha$ ,  $a$ ,  $c$ ,  $k$  et  $M_{sat}$  sont issus en première approche de l'identification du modèle statique de Jiles-Atherton. Deux nouveaux paramètres,  $D'_1$  et  $D'_2$ , doivent être identifiés. Nous remarquons que pour ce modèle  $M(B)$ , il s'agit simplement de l'équation différentielle du modèle statique dans laquelle ont été ajoutées les contributions des pertes par courants induits et des pertes excédentaires ce qui n'est pas le cas pour le modèle  $M(H)$ . Ceci aura un impact sur l'implantation numérique de ces modèles.

### 3.6.3 Résolution numérique des modèles

- *cas du modèle  $M(H)$*

La résolution numérique du modèle dynamique de Jiles-Atherton  $M(H)$  est très délicate (équation (3.14)). En effet, il s'agit de résoudre, après le changement de variable  $X = \left(\frac{dM}{dH}\right)^{\frac{1}{2}}$ , un polynôme d'ordre 4. Nous avons utilisé la méthode d'Euler implicite pour la discrétisation temporelle et la méthode de Newton-Raphson pour la résolution du polynôme. Cette méthode peut se révéler très instable pour le premier pas de calcul. Nous avons donc choisi de résoudre le premier pas de calcul à partir de la méthode de Bairstow [56] (qui permet de trouver les racines d'un polynôme d'ordre  $n$ ), puis les pas suivants par la méthode de Newton-Raphson. D'autre

part, l'équation doit être résolue en considérant la valeur absolue  $|dB/dt|$ . En effet, nous pouvons déduire la partie branche descendante du cycle grâce à la propriété de symétrie du cycle d'hystérésis  $M(H) = -M(-H)$ . Nous observons quand même une instabilité numérique pour certaines valeurs. En effet, une faible variation des paramètres peut entraîner l'obtention de résultats non physiques.

- *cas du modèle  $M(B)$*

Contrairement au modèle  $M(H)$ , l'équation différentielle du modèle dynamique de Jiles-Atherton  $M(B)$  (équation (3.16)) peut être résolue très simplement par la méthode d'Euler. De plus, de la même manière que pour le modèle  $M(H)$ , ce modèle est résolu en considérant la valeur absolue  $|dB/dt|$ . L'avantage de ce modèle est qu'il ne nécessite que l'ajout des deux paramètres supplémentaires dans la procédure de résolution numérique du modèle de Jiles-Atherton statique.

- *synthèse*

Ainsi, il apparaît clairement que le modèle  $M(B)$  est plus simple à mettre en oeuvre numériquement (seules les contributions des deux paramètres  $D'_1$  et  $D'_2$  doivent être ajoutées dans l'équation différentielle du modèle statique). De plus, le modèle  $M(B)$  est beaucoup plus stable numériquement car on n'a pas de système non linéaire à résoudre. L'objectif étant d'intégrer un modèle d'hystérésis dynamique dans un code de calcul de champ 2D, où on privilégie en général la formulation en potentiel vecteur, le modèle  $M(B)$  convient parfaitement.

### 3.6.4 Modèle dynamique de Jiles-Atherton et équation de diffusion

Dans le modèle dynamique de Jiles-Atherton, les contributions des courants induits macroscopiques (pertes par courants de Foucault) et microscopiques (pertes excédentaires) sont introduites dans l'équation de bilan énergétique du modèle statique de manière totalement découplée. Ainsi, il est possible de remplacer le terme tenant compte des pertes par courants induits macroscopiques par la résolution de l'équation de diffusion.

Ainsi, dans [57], la contribution des courants induits macroscopiques représentée par le terme  $D_1 \left( \frac{dH}{dt} \right) \left( \frac{dM}{dH} \right)^2$  au paragraphe 3.6.1, est remplacée par la résolution numérique en éléments finis de l'équation de diffusion (3.8). Les résultats obtenus sont en accord avec l'expérience sur des cycles majeurs relevés sur des tôles FeSi, de la même manière que ceux obtenus avec le modèle de dynamique de Preisach associé à l'équation de diffusion. Par contre, la restitution de cycles mineurs est moins précise, voire insatisfaisante, cas dans lequel le modèle de Preisach dynamique, associé à l'équation de diffusion, est plus précis. Toutefois, comme indiqué plus haut au paragraphe 3.4, il faut noter que ce modèle nécessite des temps de calcul trop importants par rapport à ceux du modèle de Jiles-Atherton associé à l'équation de diffusion. Le rapport des temps de calcul est d'environ 17 pour un code de calcul non-optimisé, certes, mais qui, une fois optimisé restera sans doute en faveur du modèle de dynamique de Jiles-Atherton [57].

### 3.7 Modèle de l'équation de diffusion basse fréquence pour les tôles

Soit un champ d'excitation alternatif  $H_{surf}(t)$  de fréquence suffisamment basse pour que son amplitude dans l'épaisseur de la tôle  $H(x, t)$  diminue faiblement (figure 3.2) par rapport au champ surfacique  $H_{surf}(t)$ . Cela revient à considérer que, à cette fréquence de travail, l'épaisseur de peau est supérieure à l'épaisseur de la tôle  $\delta > e$  (Cf. paragraphe 3.3). Nous avons l'induction  $B(x, t)$  et sa dérivée temporelle qui sont quasi-homogènes dans l'épaisseur de la tôle :

$$B(x, t) = B_{moy}(t)$$

et 
$$\frac{dB(x, t)}{dt} = \frac{dB_{moy}(t)}{dt}$$

A partir de cette hypothèse et de l'équation de diffusion (3.8), le champ  $H(x, t)$  peut être écrit sous la forme suivante :

$$H(x, t) = \int \int \sigma \frac{dB_{moy}(t)}{dt} dx^2 \quad (3.19)$$

En considérant les conditions de symétrie de la figure 3.2, les conditions aux bords s'écrivent :

$$\begin{aligned} H\left(\frac{e}{2}, t\right) &= H_{surf}(t) \\ H\left(-\frac{e}{2}, t\right) &= H_{surf}(t) \end{aligned}$$

La résolution de l'équation (3.19) nous permet alors d'écrire :

$$H(x, t) = H_{surf}(t) - \frac{\sigma}{2} \frac{dB_{moy}(t)}{dt} \left( \frac{e^2}{4} - x^2 \right) \quad (3.20)$$

Cette équation indique que, à un instant  $t$  donné, le champ magnétique  $H(x, t)$  a une allure parabolique dans l'épaisseur de la tôle. Enfin, en calculant la valeur moyenne du champ magnétique  $H(x, t)$  dans l'épaisseur de la tôle, l'expression (3.20) devient [66] :

$$H_{moy}(t) = H_{surf}(t) - \frac{\sigma e^2}{12} \frac{dB_{moy}(t)}{dt} \quad (3.21)$$

Dans cette expression, nous constatons que, pour parcourir un cycle apparent  $H_{surf}(B_{moy})$  avec un taux de variation  $\frac{dB_{moy}(t)}{dt}$  positif, il est nécessaire d'appliquer un champ surfacique  $H_{surf}(t)$  supérieur à  $H_{moy}(t)$  (figure 3.4). La différence est appelée champ classique et s'écrit :

$$H_{cl}(t) = \frac{\sigma e^2}{12} \frac{dB_{moy}(t)}{dt} \quad (3.22)$$

En ré-arrangeant l'équation (3.21), nous obtenons :

$$\frac{dB_{moy}(t)}{dt} = \gamma [H_{surf}(t) - H_{moy}(t)] \quad (3.23)$$

avec  $\gamma = \frac{\sigma e^2}{12}$ . Cette équation constitue un modèle simple pour la prise en compte des effets dynamiques dus aux courants induits macroscopiques dans les tôles à basse fréquence. Ainsi, les cycles apparents  $H_{surf}(B_{moy})$  peuvent être déduits à partir du cycle statique  $H_{moy}(B_{moy})$ . La loi de comportement statique peut-être déduite à partir de n'importe quel modèle statique. Dans le cadre de notre travail, nous utiliserons le modèle statique de Jiles-Atherton. Ainsi, en plus des 5 paramètres  $\alpha$ ,  $a$ ,  $c$ ,  $k$  et  $M_{sat}$ , il faut déterminer un nouveau paramètre  $\gamma$ . Celui-ci peut être déduit à partir d'une identification sur quelques cycles mesurés à plusieurs fréquences.

Enfin, bien que les hypothèses de départ soient faites dans le cas de tôles, certains auteurs utilisent ce modèle pour rendre compte de la loi de comportement de matériaux de types ferrites et de forme torique. En effet, l'équation (3.23) peut être

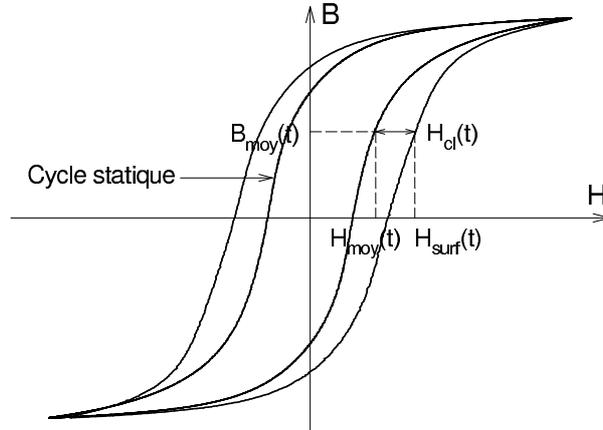


FIG. 3.4 - Cycle d'hystérésis classique et contribution du champ classique.

considérée comme un modèle comportemental plutôt qu'un modèle de connaissance. L'expression utilisée est similaire à celle de l'équation (3.23) sauf que le champ surfacique  $H_{surf}$  est remplacé par la valeur locale du champ magnétique d'excitation  $H_{exc}$  appliqué sur le périmètre moyen du tore [67] :

$$\frac{dB_{moy}(t)}{dt} = \gamma[H_{exc}(t) - H_{moy}(t)] \quad (3.24)$$

Ce modèle comportemental donne de très bons résultats dans le cas de matériaux en ferrites [68]. De manière générale, d'après [69], il semble bien adapté pour des matériaux où les effets dynamiques liés aux courants de Foucault sont minoritaires par rapport aux effets dynamiques liés aux déplacements de parois.

Toutefois, dans notre étude, nous nous restreindrons à une application dans le cas de tôles FeSi.

## 3.8 Modèle dynamique pour des matériaux à facteur de forme inconnu

### 3.8.1 Analyse

Dans la plupart des modèles dynamiques, il apparaît à chaque fois une limitation d'application en terme de domaine fréquentiel ou de géométrie du matériau étudié. En effet, le facteur de forme intervient, pour la plupart des modèles précédents, dès les hypothèses de départ. Seul le modèle dynamique de Jiles-Atherton possède la possibilité de prendre en compte le facteur de forme via les paramètres de géométrie

qui interviennent dans l'expression des pertes par courants induits et des pertes excédentaires. Toutefois, son utilisation reste très limitée en fréquence compte tenu de l'hypothèse sur une pénétration uniforme du champ dans le matériau.

Une solution simple est la prise en compte des courants de Foucault dans le code de calcul via le terme  $\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  dans la formulation en potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  de la magnétodynamique (équation (1.24) du paragraphe 1.2.2.1 au premier chapitre). Nous noterons tout de même que les courants induits macroscopiques et microscopiques doivent être totalement indépendants afin de pouvoir appliquer cette méthode. En effet, le modèle d'hystérésis doit prendre en compte uniquement les courants induits microscopiques. A partir de ces considérations, deux modèles peuvent être utilisés : le modèle dynamique de Preisach et le modèle dynamique de Jiles-Atherton sans la contribution des courants induits macroscopiques.

Néanmoins, il est nécessaire de disposer de la conductivité  $\sigma$  du matériau. Dans le cadre de notre travail, nous avons mis en place une procédure expérimentale pour la mesure de celle-ci, qui a été ensuite validée par une simulation en calcul de champ.

### 3.8.2 Principe de la méthode pour la mesure de la conductivité

La mesure directe de la conductivité par une méthode volt-ampèremétrique sur un barreau n'est pas aisée 3.5. En effet, les résistances de contact créent des chutes de tension qui faussent la mesure.

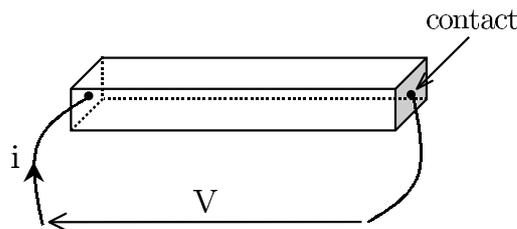


FIG. 3.5 - Mesure de la conductivité sur un barreau.

Nous proposons une autre méthode sans contact. Le principe de cette méthode est décrit par le schéma de la figure 3.6. L'idée consiste à imposer un flux  $\phi$  traversant un échantillon torique. Ce flux est créé par un circuit magnétique supportant un bobinage de  $n_{exc}$  spires ( $n_{exc}=80$ ) traversé par un courant d'excitation  $I_{exc}$ . Ce flux induit une force électromotrice dans l'échantillon que l'on mesure via deux spires déposées sur les périmètres intérieurs et extérieurs du tore. Les tensions induites

aux bornes des deux spires doivent être identiques de manière à ce que l'on puisse supposer que la circulation du champ électrique, pour n'importe quelle courbe fermée entourant le périmètre intérieur du tore, soit égale à  $n_{exc} \frac{d\phi}{dt}$ . Une fois cette vérification effectuée, le courant induit  $I_{macro}$  qui apparaît dans l'échantillon peut être relevé à l'aide d'une sonde de courant. Il faut noter que la fréquence de travail doit être faible pour que l'on puisse négliger le champ de réaction créé par le courant macroscopique  $I_{macro}$  par rapport au champ créé par le courant d'excitation  $I_{exc}$ . A cet effet, l'épaisseur de peau  $\delta$  doit être très grande devant les dimensions de la section du tore.

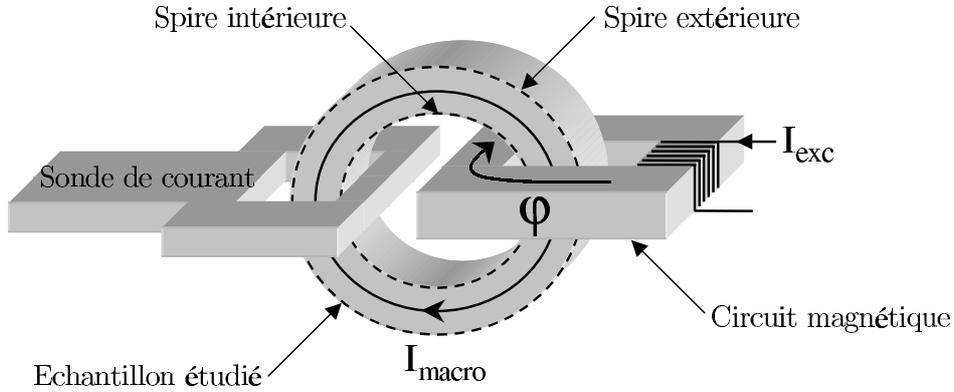


FIG. 3.6 - Principe de la mesure de résistivité pour un échantillon torique.

Le montage ainsi réalisé est équivalent à un transformateur monophasé dont le secondaire est chargé par une résistance  $R$ . Pour déterminer celle-ci, la tension secondaire est mesurée à l'aide d'une des deux spires. La résistance moyenne de l'échantillon est donnée par  $R = \frac{V_{sec}}{I_{macro}}$  et la résistivité de l'échantillon est calculée à partir de la formule suivante :

$$\rho = \frac{R \cdot S}{l_{moy}} \quad (3.25)$$

où  $S$  est la section du tore et  $l_{moy}$  sa longueur moyenne. Celle-ci est calculée à partir des rayons intérieur  $R_{int}$  et extérieur  $R_{ext}$  du tore :

$$l_{moy} = 2\pi \left( \frac{R_{ext} - R_{int}}{\ln \left( \frac{R_{ext}}{R_{int}} \right)} \right) \quad (3.26)$$

### 3.8.3 Détermination de la résistivité par calcul de champ

Afin de valider la méthode décrite précédemment, nous avons modélisé un système similaire du point de vue du principe par calcul de champ. On considère un système axisymétrique que l'on peut modéliser en 2D (figure 3.7). Un bobinage primaire entoure un noyau ferromagnétique dont la perméabilité est imposée de manière à ce que la réluctance du circuit magnétique modélisé soit proche de celle du système expérimental. Dans cette approche, on suppose le comportement du matériau ferromagnétique linéaire. En effet, les points de fonctionnement étudiés sont éloignés de la zone de saturation. Il est ainsi possible de modéliser le système à l'aide d'une perméabilité complexe avec la formulation en potentiel vecteur. On impose une résistivité de  $500 \mu\Omega.m$ , qui est proche de celle du matériau utilisé, et une perméabilité relative égale à 200.

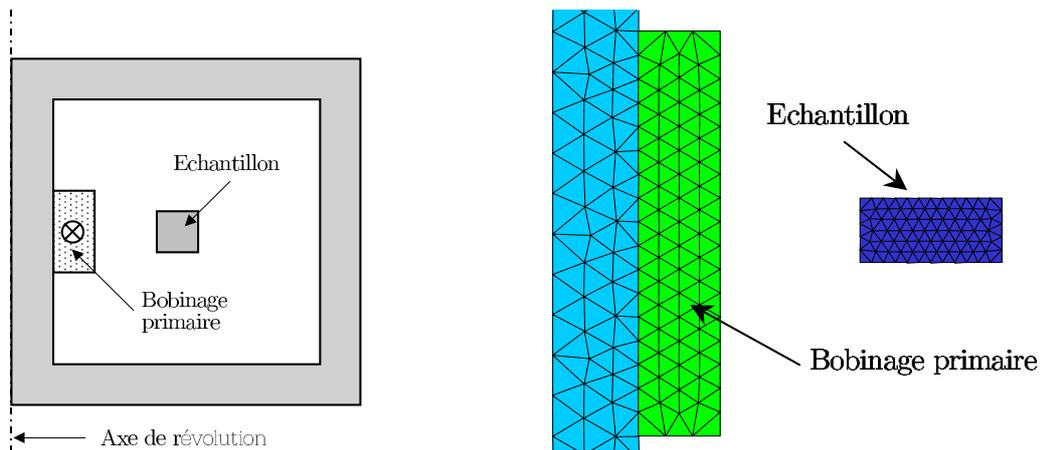


FIG. 3.7 - Structure utilisée en calcul de champ pour déterminer la résistivité et maillage associé.

On donne sur la figure 3.8, la densité de courant dans la section du tore. Nous voyons que celle-ci varie en  $1/r$ . En effet, nous vérifions :

$$\frac{J_{ext}}{J_{int}} \simeq \frac{R_{int}}{R_{ext}} = 0,66 \quad (3.27)$$

avec  $R_{int} = 3,32.10^{-2}m$  et  $R_{ext} = 5.10^{-2}m$ .

Ceci confirme que le champ de réaction dû aux courants induits est négligeable. D'autre part, on note bien que les circulations du potentiel vecteur sur les rayons intérieur et extérieur sont pratiquement identiques.

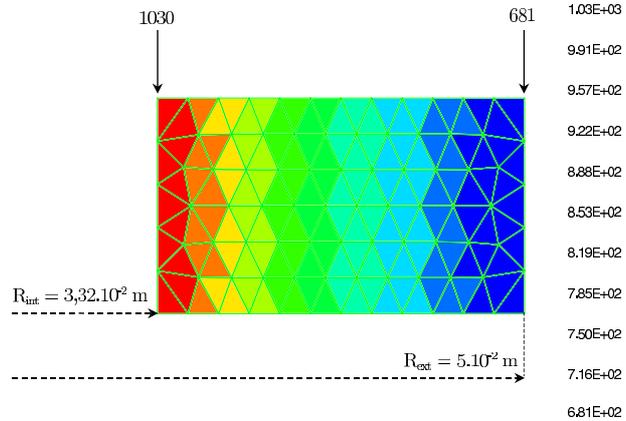


FIG. 3.8 - Densité de courant dans la section du tore (en  $A.m^{-2}$ ) en éléments finis.

Dans les conditions précédentes et à 50 Hz, on calcule alors les valeurs suivantes :

$$I_{prim} = 300 \text{ mA}$$

$$V_{sec} = 112 \text{ mV}$$

$$I_{macro} = 115 \text{ mA}$$

On retrouve alors la valeur de  $\sigma$  imposée en appliquant (3.25). Ainsi, les résultats du calcul de champ par éléments finis ont permis de confirmer que la procédure expérimentale peut permettre de mesurer la résistivité.

### 3.8.4 Mesures expérimentales

Nous avons appliqué la méthode décrite au paragraphe 3.8.2 aux poudres de fer fabriquées par Quebec Metal Powder (type ATOMET EM1). Deux échantillons ont été étudiés. Le premier est celui qui a été utilisé au 2<sup>ème</sup> Chapitre pour l'identification en régime statique. Le second échantillon est constitué du même matériau qui a subi un traitement thermique afin de brûler la résine isolante entre les particules, et augmenter ainsi la conductivité globale du matériau.

Tout d'abord, considérons le matériau ayant subi un traitement thermique. La résistivité de celui-ci étant supposée être de l'ordre de quelques centaines de  $\mu\Omega.m$ , nous avons calculé qu'à 50 Hz l'épaisseur de peau était bien supérieure à la plus grande des dimensions de la section du tore. Les relevés du courant d'excitation  $I_{exc}$  et de la tension primaire sont donnés sur la figure 3.9. Le courant est non sinusoïdal à cause de la caractéristique non linéaire du noyau magnétique. De même, le courant macroscopique  $I_{macro}$  relevé dans l'échantillon torique de poudres de fer ainsi que la tension aux bornes d'une des deux spires sont donnés sur la figure 3.10

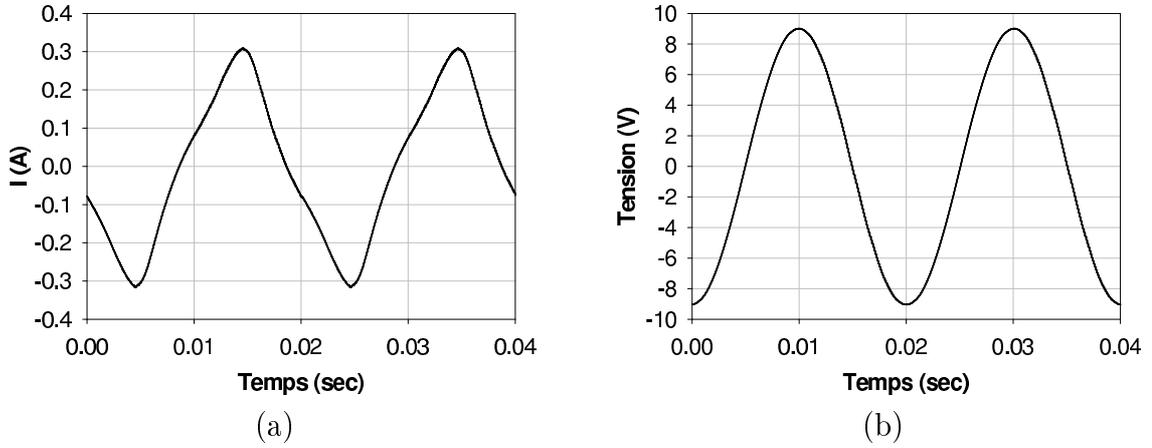


FIG. 3.9 - (a) Courant d'excitation  $I_{exc}$  au primaire (b) tension d'alimentation au primaire.

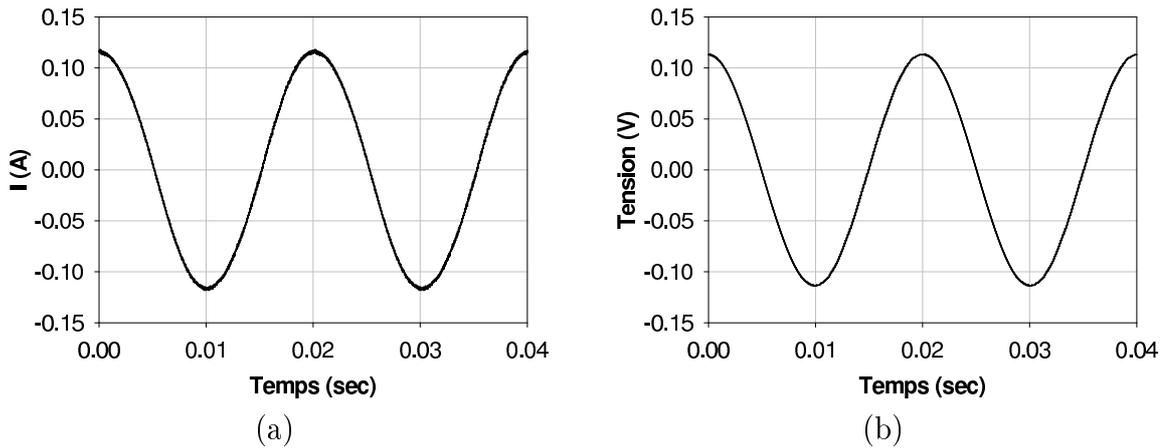


FIG. 3.10 - (a) Courant  $I_{macro}$  relevé dans l'échantillon de poudres de fer (b) tension relevée au secondaire.

Nous constatons sur la figure 3.10 que le courant et la tension sont bien en phase et de forme sinusoïdale. L'effet du tore est purement résistif (peu de fuites magnétiques) et nous pouvons calculer la résistance moyenne à partir de  $R = \frac{V_{sec}}{I_{macro}}$ . Enfin, la conductivité est obtenue par l'équation 3.25. Nous avons les valeurs suivantes pour  $R$ ,  $S$  et  $l_{moy}$  :

- $R \simeq 0,98 \Omega$ ,
- $S = 1,4 \cdot 10^{-4} m^2$ ,
- $l_{moy} = 2,6 \cdot 10^{-1} m$ .

d'où la résistivité  $\rho_{exp}$  qui vaut  $529 \mu\Omega.m$ . Nous obtenons donc une bonne correspondance entre le calcul de champ et la mesure. Nous reviendrons sur l'application de ces résultats sur le système constitué d'une bobine à noyau de poudres de fer au paragraphe 3.10.2. Concernant le matériau à poudres étudié au chapitre précédent, les mesures donnent un résultat attendu avec une résistivité presque quatre fois plus élevée, de valeur  $\rho_{exp} = 1890 \mu\Omega.m$ .

## 3.9 Etude et comparaison des modèles dynamiques

Dans cette partie, nous allons étudier le modèle dynamique de Jiles-Atherton et le modèle de l'équation de diffusion basse fréquence. Le choix de ces deux modèles est motivé par leur simplicité pour la mise en oeuvre dans un code de calcul de champ en éléments finis. D'autre part, les temps de calcul associés seront sans doute inférieurs à ceux des autres modèles dynamiques précédemment présentés. Toutefois, compte tenu des hypothèses de départ, les modèles testés sont destinés à un domaine d'application restreint aux basses fréquences. Celui-ci sera déterminé pour les deux modèles qui seront comparés en terme de précision pour la restitution des cycles mais aussi en terme d'estimation des pertes par hystérésis. Les tôles FeSi étudiées au deuxième chapitre sont choisies pour cette comparaison.

Dans la suite, nous abordons l'identification des paramètres pour les modèles dynamiques  $M(B)$  de Jiles-Atherton et de l'équation de diffusion basse fréquence.

### 3.9.1 Identification

#### 3.9.1.1 Modèle dynamique de Jiles-Atherton

L'identification des paramètres  $\alpha$ ,  $a$ ,  $c$ ,  $k$  et  $M_{sat}$  a déjà été effectuée dans le cas du modèle statique. En première approximation, nous pouvons considérer que ces paramètres restent inchangés dans le cadre du modèle dynamique. Les deux nouveaux paramètres  $D'_1$  et  $D'_2$  sont identifiés à partir d'une procédure d'optimisation similaire à celle utilisée pour les paramètres du modèle statique. Etant donné qu'il est nécessaire de disposer de paramètres initiaux suffisamment proches de la solution pour assurer une convergence rapide, nous pouvons envisager d'employer les expressions des paramètres de  $D'_1$  et  $D'_2$  (équations (3.17) et (3.18)). Par exemple, dans le cas des tôles FeSi étudiées,  $D'_1$  peut être calculé en première approche à partir de l'expression suivante :

$$D'_1 = \left( \frac{d^2}{2\rho\beta} \right)$$

où le paramètre  $d$  (épaisseur de la tôle) vaut  $0,5mm$ , le paramètre de forme  $\beta$  vaut 6 [64] et la résistivité  $\rho$  vaut  $0,5.10^{-6} \Omega.m$ . Pour  $D'_2$ , nous connaissons le paramètre  $w$  (largeur des tôles) qui vaut  $1cm$  mais la détermination du paramètre  $H_0$  lié au potentiel interne subi par les parois de Bloch est difficile. Aussi, nous avons choisi  $D'_2 = 0$  comme valeur initiale pour la procédure d'optimisation.

**TAB. 3.1** - Paramètres  $D'_1$  et  $D'_2$  calculés et optimisés.

Tôles FeSi		
Paramètre	Calculé	Optimisé
$D'_1$	2, $17.10^{-2}$	3, $3.10^{-2}$
$D'_2$	<i>n.a.</i>	$5.10^{-1}$

Toutefois, nous avons constaté qu'il était encore possible d'améliorer les résultats des modèles en effectuant une nouvelle optimisation des paramètres  $\alpha$ ,  $a$ ,  $c$ ,  $k$  et  $M_{sat}$  sur des cycles d'amplitudes et de fréquences différentes (1 à 200 Hz). L'identification des paramètres a été réalisée à l'aide de 5 cycles d'amplitudes et de fréquences différentes pour chaque modèle. Le temps nécessaire à la procédure d'optimisation est de l'ordre de 2 à 3 minutes pour environ 2000 points par cycle. Le résultat de l'identification des nouveaux paramètres est donné sur le tableau 3.2

**TAB. 3.2** - Valeurs des paramètres pour le modèle dynamique de Jiles-Atherton.

Paramètre	Tôles FeSi (dynamique)	Tôles FeSi (statique)
$\alpha$	$1,85.10^{-4}$	$1,31.10^{-4}$
$a$	75	59,5
$k$	65	99,2
$c$	0,035	0,54
$M_{sat}(A/m)$	1167880	1145220
$D'_1$	$3,3.10^{-2}$	0
$D'_2$	$5.10^{-1}$	0

Les valeurs des paramètres  $\alpha$ ,  $a$ ,  $c$ ,  $k$  et  $M_{sat}$  sont proches de celles obtenues pour le modèle statique. Seul le paramètre  $c$  a fortement varié en passant de 0,55 à 0,035. Ceci peut être interprété comme une diminution de la contribution du processus

d'aimantation réversible dû aux déformations de parois. En effet, en régime dynamique, on peut supposer que les déplacements de parois sont tels que les passages d'un site d'ancrage à un autre se font majoritairement par sauts brusques et sans déformations : la contribution réversible résiduelle est uniquement due à la rotation des moments magnétiques dans la zone de saturation.

### 3.9.1.2 Modèle de l'équation de diffusion basse fréquence

L'expression (3.23) nécessite l'utilisation d'un modèle statique d'hystérésis qui, dans notre étude, est le modèle de Jiles-Atherton. De la même manière que le précédent modèle dynamique, les valeurs des paramètres  $\alpha$ ,  $a$ ,  $c$ ,  $k$  et  $M_{sat}$  identifiés dans le cas statique peuvent être utilisés en première approche et seul le paramètre  $\gamma$  doit être identifié. Celui-ci peut être aussi calculé à partir de l'expression  $\gamma = \frac{\sigma e^2}{12}$  dans le cas des tôles pour la détermination d'une valeur initiale. Sur le tableau 3.3, on donne les valeurs de  $\gamma$  calculée et optimisée pour les tôles.

**TAB. 3.3** - Paramètre  $\gamma$  calculé et optimisé.

	Tôles FeSi	
Paramètre	Calculé	Optimisé
$\gamma$	$4,2 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$

Le résultat de l'optimisation du paramètre  $\gamma$  montre que, dans le cadre d'une identification à basse fréquence, nous obtenons un résultat proche de la valeur théorique. Comme pour le modèle dynamique de Jiles-Atherton, les résultats peuvent aussi être améliorés en intégrant les 5 paramètres du modèle statique dans la procédure d'optimisation. Celle-ci nécessite également 5 cycles d'amplitudes et de fréquences différentes (les mêmes que pour le modèle dynamique). Les paramètres obtenus sont donnés sur le tableau 3.4. Le temps nécessaire à la procédure pour converger est de moins d'une minute.

Nous constatons que les paramètres obtenus pour ce modèle sont très proches de ceux obtenus pour le modèle dynamique de Jiles-Atherton. D'autre part, nous pouvons faire la même observation qu'en 3.9.1.1 sur le comportement dynamique des parois puisque le paramètre  $c$  diminue fortement de 0,55 à 0,02.

**TAB. 3.4** - Valeurs des paramètres pour le modèle de l'équation de diffusion basse fréquence.

Paramètre	Tôles FeSi (dynamique)	Tôles FeSi (statique)
$\alpha$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$1,31 \cdot 10^{-4}$
$a$	73,5	59,5
$k$	54	99,2
$c$	0,02	0,54
$M_{sat}(A/m)$	1166115	1145220
$\gamma$	$6 \cdot 10^{-2}$	<i>n.a.</i>

### 3.9.2 Restitution des cycles

Dans ce paragraphe, nous comparons les prédictions des modèles en terme de restitution de cycles d'hystérésis. Cette comparaison est basée sur :

- la forme des cycles simulés,
- l'estimation des champs rémanent et coercitif en fonction de la fréquence,

Les cycles calculés à partir des deux modèles, pour  $B_m = 1,2$  Tesla, sont reportés sur la figure 3.11. La première observation concerne la qualité de prédiction des cycles des deux modèles par rapport à la mesure pour une gamme de fréquences inférieures à 100 Hz. Au-delà de cette fréquence et jusqu'à 200 Hz, le modèle dynamique de Jiles-Atherton reste proche de la mesure alors que le modèle de l'équation de diffusion basse fréquence s'en écarte notablement 3.12. Au-dessus de 200 Hz, les modèles n'arrivent plus à restituer la forme des cycles (figure 3.13). En effet, le gonflement caractéristique des cycles à plus haute fréquence au niveau des coudes de basculement (indiqué par des flèches sur la figure), n'est pas correctement restitué. Un rapide calcul de l'épaisseur de peau  $\delta_{FeSi}$  dans les tôles montre qu'à 200 Hz nous avons  $\delta_{FeSi} \approx e$  ( $e$  l'épaisseur de la tôle). Ainsi, l'hypothèse des deux modèles sur l'homogénéité du champ magnétique dans le matériau se trouve vérifiée expérimentalement pour un domaine de validité tel que l'épaisseur de peau reste toujours supérieure à l'épaisseur de la tôle.

Si nous comparons maintenant les résultats des deux modèles, il apparaît que celui basé sur l'équation de diffusion basse fréquence semble légèrement plus précis que le modèle dynamique de Jiles-Atherton en dessous de 100 Hz 3.11. Toutefois, l'écart étant très faible, nous pouvons considérer les deux modèles comme équivalents en terme de restitution de cycles pour la gamme de fréquence 0-100 Hz.

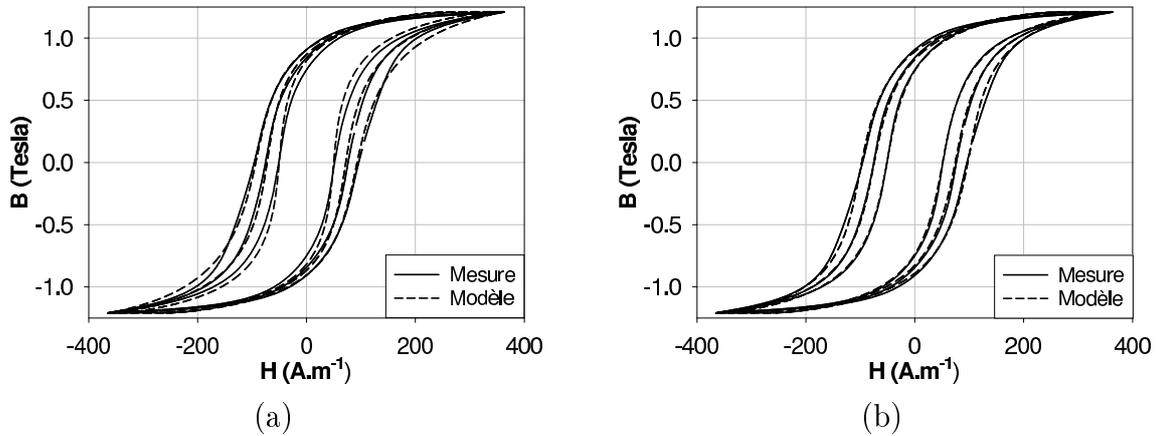


FIG. 3.11 - Comparaison des mesures avec les prédictions des modèles pour  $B_m = 1, 2$  Tesla à 1, 50 et 100 Hz : (a) modèle dynamique de Jiles-Atherton (b) modèle de l'équation de diffusion basse fréquence.

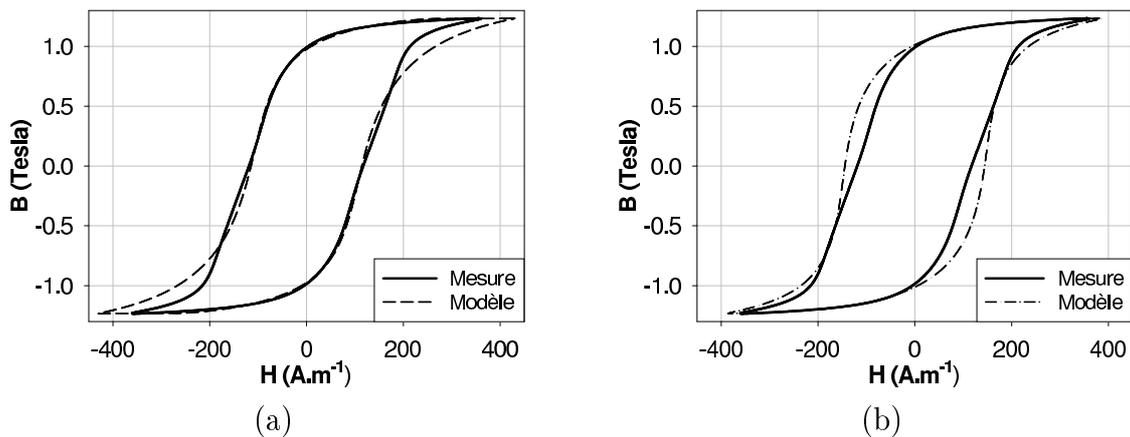


FIG. 3.12 - Comparaison des mesures avec les prédictions des modèles pour  $B_m = 1, 2$  Tesla à 200 Hz : (a) modèle dynamique de Jiles-Atherton (b) modèle de l'équation de diffusion basse fréquence.

Afin de valider ces observations de manière plus rigoureuse, il est nécessaire de comparer les modèles en termes d'évaluation des champs coercitif et rémanent en fonction de la fréquence. Les courbes correspondantes sont reportées sur la figure 3.14. La première observation concerne l'écart qui apparaît dès la fréquence de 100 Hz entre le champ coercitif mesuré et celui obtenu par le modèle de l'équation de diffusion basse fréquence. A l'opposé, le modèle dynamique de Jiles-Atherton reste très proche de la mesure jusqu'à 200 Hz. En ce qui concerne l'évolution du champ rémanent, les deux modèles sont proches de la mesure. En outre, le modèle de

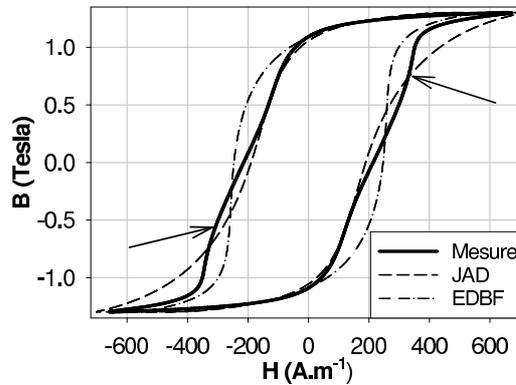


FIG. 3.13 - Cycles simulés et mesuré à 400 Hz pour  $B_m = 1,3$  Tesla ( $JAD =$  modèle dynamique de Jiles-Atherton et  $EDBF =$  modèle de l'équation de diffusion basse fréquence). Les modèles n'arrivent pas à restituer le gonflement indiqué par les flèches.

l'équation de diffusion basse fréquence semble légèrement plus précis que le modèle dynamique de Jiles-Atherton. Ainsi, l'observation des évolutions de ces deux points remarquables vient confirmer ce qui a été dit sur la forme du cycle, à savoir que le modèle dynamique de Jiles-Atherton donne de bons résultats jusqu'à 200 Hz alors que le modèle de l'équation de diffusion, bien que légèrement plus précis en dessous de 100 Hz, ne permet plus d'évaluer correctement le champ coercitif. Ceci était prévisible au vue de la figure 3.12.

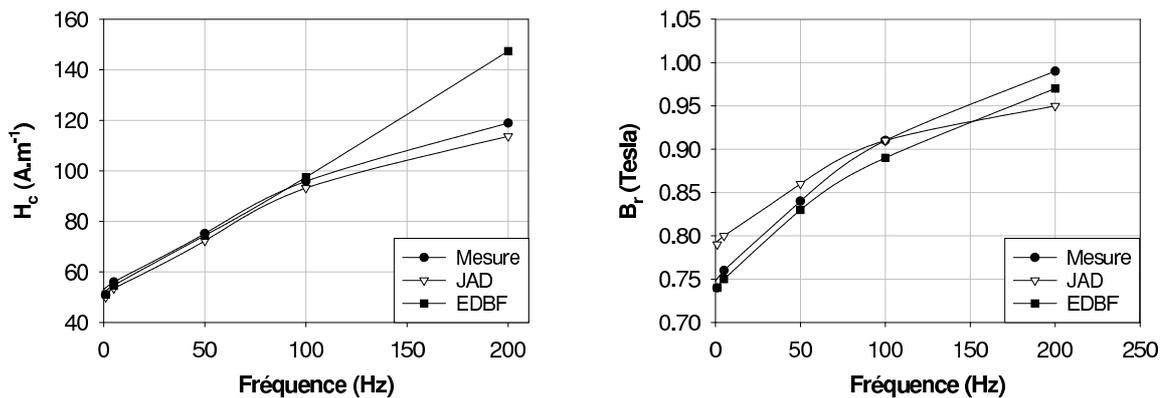


FIG. 3.14 - Comparaison de l'évolution des champs coercitif et rémanent expérimentaux en fonction de la fréquence avec les prédictions des modèles pour  $B_m = 1,2$  Tesla.

### 3.9.3 Estimation des pertes

Nous avons vu au paragraphe précédent les intervalles de fréquence pour lesquels chacun des modèles donne de bons résultats en terme de restitution de cycles. Toutefois, l'implantation dans un code de calcul de champ de l'hystérésis dynamique peut être utile pour l'estimation des pertes fer. Nous avons donc comparé les pertes estimées par les modèles avec les pertes mesurées (tableau 3.5). Celles-ci sont données pour deux amplitudes de l'induction magnétique :  $B_m = 1,2$  et  $1,4$  Tesla.

**TAB. 3.5** - Densité de pertes par hystérésis ( $W.Kg^{-1}$ ) à différentes fréquences pour  $B_m = 1,2$  et  $1,4$  Tesla.

$B_m = 1,2$ Tesla			
Fréquence (Hz)	Mesure	Modèle JAD	Modèle EDBF
1	$3,27.10^{-2}$	$3,29.10^{-2}$	$3,21.10^{-2}$
50	2,25	2,24	2,29
100	5,66	5,64	5,91
200	14,4	15,5	16,8
$B_m = 1,4$ Tesla			
1	$4,7.10^{-2}$	$4,8.10^{-2}$	$4.10^{-2}$
50	3,17	3,14	2,7
100	7,96	7,46	7,00
200	21,8	19,2	20,1

JAD : modèle dynamique de Jiles-Atherton

EDBF : modèle de l'équation de diffusion basse fréquence

Tout d'abord, on constate que les résultats obtenus pour l'amplitude  $B_m = 1,2$  Tesla sont très proches de la mesure jusqu'à 100 Hz (erreur inférieure à 4%). Au-delà, à 200 Hz, l'écart constaté est de 10% pour celui de Jiles-Atherton dynamique et atteint 18% pour l'équation de diffusion basse fréquence. Le modèle dynamique de Jiles-Atherton semble donner de meilleurs résultats. Cette observation est confirmée pour l'amplitude  $B_m = 1,4$  Tesla, puisque les écarts relatifs constatés restent dans une marge d'erreur inférieure à 6% jusqu'à 100 Hz alors que dans le cas du modèle de l'équation de diffusion basse fréquence, nous constatons entre 8 et 15% d'erreur par rapport à la mesure. Au-delà, à 200Hz, comme pour l'amplitude  $B_m = 1,2$  Tesla, les écarts commencent à devenir importants pour les deux modèles.

Nous constatons donc, à partir du tableau 3.5, que le modèle dynamique de Jiles-Atherton assure une certaine constance pour l'évaluation des pertes par hystérésis tout en étant relativement précis pour la restitution de cycles jusqu'à 200 Hz. C'est pourquoi, ce modèle est choisi pour une intégration dans le code de calcul éléments finis.

## 3.10 Applications en calcul de champ

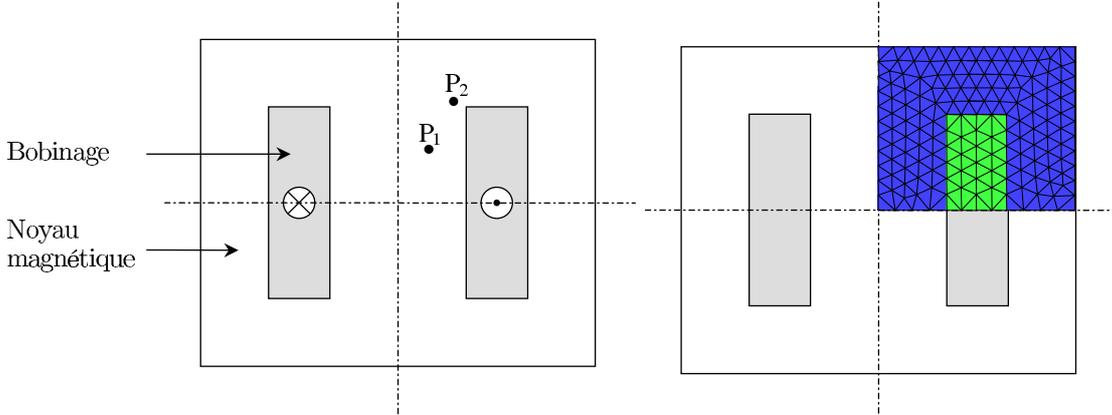
L'implantation du modèle dynamique de Jiles-Atherton dans le code de calcul de champ est effectuée par l'adjonction des deux paramètres  $D'_1$  et  $D'_2$  dans la procédure de modélisation. Dans une première partie, nous présentons une application sur un transformateur de tension dont le circuit magnétique est constitué de tôles. Dans la seconde partie, nous présentons une application sur le même système que celui utilisé pour la comparaison des modèles statiques au 2<sup>ème</sup> Chapitre (paragraphe 2.4.1). Cette-fois ci, nous prenons en compte les courants induits macroscopiques dans les poudres de fer par l'intermédiaire du terme  $\sigma \frac{\partial A}{\partial t}$  dans la formulation magnétodynamique en potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ .

### 3.10.1 Application du modèle dynamique de Jiles-Atherton pour les tôles

#### 3.10.1.1 Système étudié

Le système choisi est un transformateur de tension 220V-15V. Le bobinage primaire est constitué de 1250 spires et le secondaire de 80 spires. Le circuit magnétique est à base de tôles. Toutefois, il ne s'agit pas des mêmes tôles dont les caractéristiques ont été identifiées précédemment. Néanmoins, nous utiliserons le modèle dynamique de Jiles-Atherton avec les paramètres présentés au tableau 3.2. Ce test ne nous permettra donc pas de valider le modèle éléments finis avec le modèle dynamique d'hystérésis, mais nous permettra dans un premier temps de le tester du point de vue numérique.

La structure du système est donnée sur la figure 3.15 avec le maillage associé (845 éléments et 452 noeuds). Nous utilisons un modèle 2D, donc les effets d'extrémités sont négligés. D'autre part, compte tenu des symétries géométriques dans le plan d'étude, seul 1/4 du transformateur a été modélisé.



**FIG. 3.15** - Structure du système étudié et maillage associé (on représente uniquement le maillage de la culasse et du bobinage).

Nous considérons le transformateur à vide dont la tension d'alimentation  $V_{prim}$  au primaire est imposée. Celle-ci est de la forme :

$$V_{prim} = V_c \cos(2\pi ft) \quad (3.29)$$

où  $V_c$  est la valeur de la tension crête et  $f$  la fréquence du signal.

### 3.10.1.2 Résultats

Un calcul dans les conditions nominales d'utilisation, 220V-50Hz, donne la forme de courant au primaire du transformateur à vide (figure 3.16). Bien qu'il y ait une similitude avec une forme de courant à vide classique dans un transformateur, certaines déformations non réalistes apparaissent sur le courant simulé (marquées par des flèches sur la figure 3.16). Cela provient sûrement de problèmes numériques que nous n'avons pas pu, en l'état actuel, clairement identifier. Toutefois, ceux-ci apparaissent seulement lorsque le transformateur est saturé. En effet, ces déformations non réalistes disparaissent pour des niveaux de tensions moins élevées, cadre dans lequel nous avons effectué nos calculs.

Dans la suite, nous présentons la comparaison de grandeurs globales (flux  $\Phi$  en fonction du courant primaire  $I$ ) et la comparaison de grandeurs locales (cycle d'hystérésis local sur un élément du maillage) en fonction de la fréquence d'utilisation. Nous calculons aussi les pertes à partir des grandeurs globales que sont la tension  $V_{prim}(t)$  et le courant  $I(t)$ . L'expression utilisée est la suivante :

$$P_{hyst}^{calc} = \langle V_{prim}(t) \cdot I(t) - R \cdot I(t)^2 \rangle \quad (3.30)$$

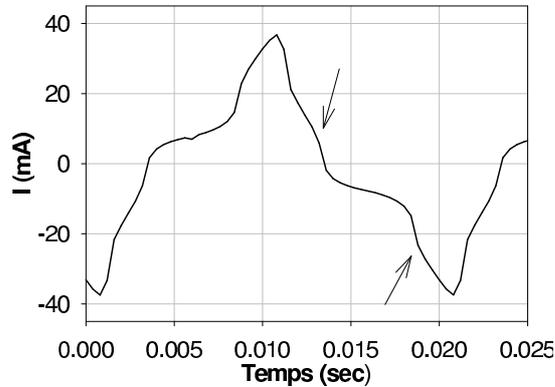


FIG. 3.16 - Courant dans le bobinage primaire du transformateur à 220V-50Hz.

Pour ce calcul, on ne considère que la dernière période calculée et, afin de disposer d'une échelle de comparaison adéquate, nous imposons la tension au primaire de manière à avoir le même flux pour les différentes fréquences. Il faut quand même noter que ce n'est pas possible en pratique puisque les pertes augmentent avec la fréquence et le transformateur surchaufferait. Ce test permet uniquement de comparer les pertes entre elles. Le point de fonctionnement de référence est choisi pour 110V à 50 Hz.

Tout d'abord, nous donnons les formes du flux en fonction du courant pour les fréquences de 50, 100 et 200 Hz (figure 3.17). Nous constatons qu'au passage par zéro (indiqué par les flèches sur la figure) le courant subit une variation non physique. Celle-ci est d'origine numérique. En effet, on constate que la procédure de résolution non linéaire ne converge pas (et parfois oscille) lorsque le flux passe par zéro. Dans ce cas, pour accéder au pas de temps suivant, on limite le nombre d'itérations non linéaires. Cela se traduit par une petite variation discontinue sur la forme d'onde du courant (figure 3.18). Afin de déterminer l'origine de ce problème numérique, des essais ont été effectués en intégrant les paramètres des poudres de fer dans le modèle d'hystérésis. Aucun problème n'a été constaté. C'est pourquoi, nous supposons que cet discontinuité apparaît lorsque la loi de comportement du matériau étudié, en l'occurrence celle des tôles FeSi ( $\Delta M/\Delta H = 21300$ ), est raide au niveau du champ coercitif (i.e. de pente très élevée), ce qui n'est pas le cas de celles des poudres de fer ( $\Delta M/\Delta H = 410$ ). Un problème numérique similaire a été observé dans les travaux de thèse de Y. Bernard [60]. Toutefois, les formes d'ondes obtenues restent acceptables.

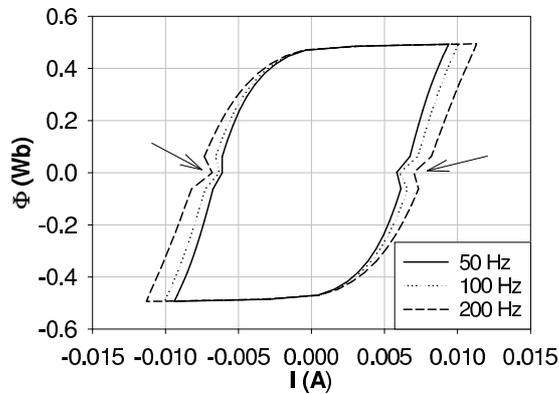


FIG. 3.17 - Flux global en fonction du courant pour 50, 100 et 200 Hz.

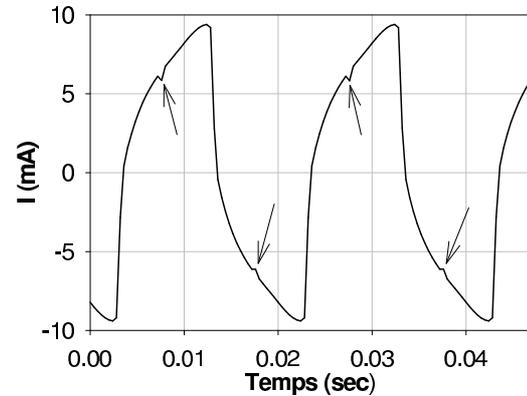


FIG. 3.18 - Forme d'onde du courant dans le bobinage primaire à 110V-50Hz.

Nous avons sélectionné un élément du maillage se trouvant au point  $P2$  (coude où le niveau d'induction est maximum) afin d'évaluer la grandeur locale, à savoir la loi de comportement  $H(B)$  calculée à partir du modèle dynamique de Jiles-Atherton. Sur la figure 3.19, on donne les cycles d'hystérésis pour les fréquences 50, 100 et 200 Hz. Nous pouvons constater un gonflement du cycle avec la fréquence qui est similaire à ce qui a été observé au paragraphe 3.9.2. De la même manière, on donne sur la figure 3.20 la loi de comportement relevée sur un élément se trouvant au point  $P1$  dans la colonne centrale du transformateur.

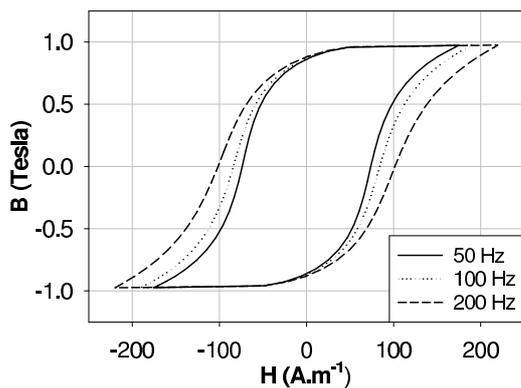


FIG. 3.19 - Cycles relevés sur l'élément se trouvant au point  $P2$  (coude) pour 50, 100 et 200 Hz.

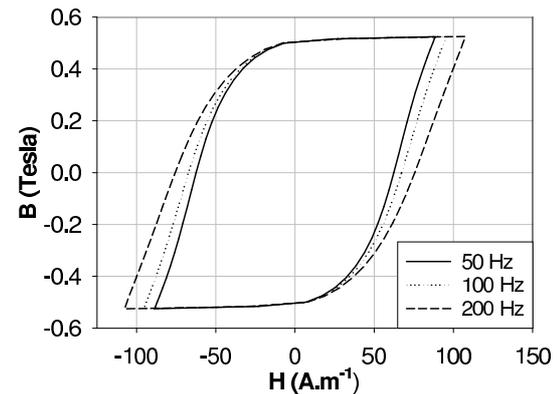


FIG. 3.20 - Cycles relevés sur l'élément se trouvant au point  $P1$  (colonne centrale) pour 50, 100 et 200 Hz.

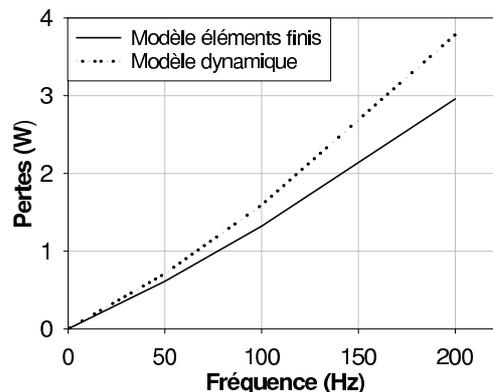
Enfin, nous calculons les pertes fer à partir des grandeurs globales  $V_{prim}$ ,  $I$  et  $R$  la résistance du bobinage primaire qui vaut  $50 \Omega$  (tableau 3.6). On constate que les

peres augmentent avec la fréquence et que celles-ci ne sont plus proportionnelles à la fréquence. Ainsi, les pertes à 100 Hz sont plus de deux fois plus élevées que celles à 50 Hz à cause des courants induits macroscopiques.

**TAB. 3.6** - Pertes fer totales en fonction de la fréquence pour  $\Phi_{max} = 0,48 \text{ Wb}$ .

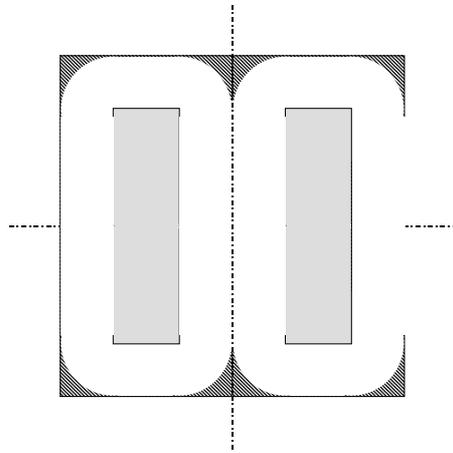
Fréquence (Hz)	Pertes (W)
1	$1,13 \cdot 10^{-2}$
50	$6,12 \cdot 10^{-1}$
100	1,32
200	2,96

Si on considère que l'induction est également répartie dans tout le noyau magnétique (hypothèse classique effectuée en électrotechnique), nous pouvons introduire la notion d'induction moyenne  $B_{moy}(t) = \frac{\Phi(t)}{nS}$ . Connaissant le nombre de spires  $n$  au primaire, la valeur crête de  $\Phi(t)$  et la section  $S$  du transformateur, nous pouvons en déduire l'évolution de  $B_{moy}(t)$ . En utilisant le modèle dynamique de Jiles-Atherton, il est possible de déterminer, à partir de l'évolution de  $B_{moy}(t)$ , une densité moyenne de pertes  $p_{moy}$  ( $\text{W.kg}^{-1}$ ). Les pertes totales dans le transformateur sont ensuite déduites de la formule  $P_{Tot}^{moy} = mp_{moy}$  où  $m$  est la masse des tôles constituant le transformateur. Aussi, nous avons reporté sur la figure 3.21 l'évolution de  $P_{Tot}^{moy}$  et l'évolution des pertes fréquentielles calculées à partir de l'expression (3.30) pour le modèle éléments finis.



**FIG. 3.21** - Evolution des pertes fréquentielles calculées pour le modèle éléments finis et, à partir de  $B_{moy}(t)$ , pour le modèle dynamique.

Nous constatons que les pertes fréquentielles  $P_{Tot}^{moy}$  calculées pour le modèle éléments finis sont inférieures à celles calculées dans le cas du modèle dynamique. En effet, lorsqu'on calcule les pertes par le modèle dynamique, on considère que la masse totale des tôles contribue à cette dissipation d'énergie. Or, cette hypothèse n'est pas tout à fait vraie puisqu'on constate en éléments finis que l'induction est quasi nulle dans les zones hachurées de la figure 3.22. Il serait plus réaliste, pour le modèle dynamique, de prendre en compte uniquement la masse de la zone non hachurée. Cette masse étant plus faible, les pertes seront moins importantes et la courbe en traits tirés, sur la figure 3.21, se rapprochera de la courbe en trait plein.



**FIG. 3.22** - Section prise en compte par le modèle dynamique pour le calcul des pertes dans le transformateur.

Ainsi, ces résultats mettent en évidence deux aspects principaux sur la prise en compte de l'hystérésis dynamique dans un code de calcul de champ en éléments finis. Le premier aspect concerne la possibilité d'intégrer un modèle tel que celui de Jiles-Atherton étendu à la dynamique pour obtenir des résultats cohérents. Le second aspect concerne les problèmes numériques rencontrés qui semblent plutôt liés à la caractéristique des tôles qu'au modèle lui-même. Toutefois, il faut retenir le fait que, malgré cet aspect numérique négatif, les résultats restent exploitables dans les conditions précédemment présentées.

Dans ce dernier paragraphe, nous présentons les résultats de simulation dans le cas d'une prise en compte de la conductivité dans la calcul de champ en formulation magnétodynamique (terme  $\sigma \partial \mathbf{A} / \partial t$ ) pour un système dont le facteur de forme ne permet pas d'utiliser le modèle dynamique précédent.

### 3.10.2 Prise en compte de la conductivité dans le calcul de champ pour les poudres

Dans le cas de l'étude d'un système constitué d'un matériau dont le facteur de forme n'est pas connu, nous ne pouvons utiliser, d'un point de vue rigoureux, le modèle dynamique de Jiles-Atherton ou le modèle de l'équation de diffusion à basse fréquence. Il peut être donc nécessaire d'intégrer la prise en compte des courants induits macroscopiques via la conductivité  $\sigma$  du matériau dans la formulation magnétodynamique en calcul de champ. Nous présentons donc une application qui entre dans le cadre de cette hypothèse.

Expérimentalement, nous avons constaté que les cycles d'hystérésis relevés sur l'échantillon à base de poudres de fer (type ATOMET EM1) ne subissaient pas de déformation jusqu'à une fréquence de travail de 1KHz. Cette observation nous permet d'affirmer que les phénomènes dynamiques de mouvement de parois sont négligeables dans ce type de matériau. En effet, ceux-ci sont indépendants du facteur de forme de l'échantillon étudié. Toutefois, concernant les courants induits macroscopiques, nous ne pouvons pas, dans une première approche, les négliger puisqu'ils dépendent du facteur de forme. Les dimensions du système étudié sont bien plus grandes que celles de l'échantillon torique sur lequel nous avons fait l'identification. En fait, rien ne permet de conclure, *a priori*, sur le fait que les courants induits macroscopiques sont négligeables ou pas.

Afin de déterminer l'influence de ces courants induits macroscopiques en régime dynamique, nous avons étudié un système à base de poudres de fer. Il s'agit de la bobine étudiée au 2<sup>ème</sup> Chapitre pour les modèles statiques (paragraphe 2.4.1).

La détermination de la résistivité de ce matériau a été effectuée expérimentalement à l'aide de la méthode présentée au paragraphe 3.8.2. La valeur obtenue vaut  $\rho_{exp} = 1890 \mu\Omega.m$ . Celle-ci est utilisée dans le calcul de champ en formulation magnétodynamique en éléments finis 2D. Nous prenons comme référence le calcul effectué en statique, c'est à dire qu'on impose une tension sinusoïdale de valeur efficace 90 Volts à une fréquence de 60 Hz. L'influence des courants induits macroscopiques est ensuite observée pour des fréquences de 60 Hz et 1KHz, fréquences auxquelles aucun gonflement significatif du cycle d'hystérésis n'a été observé sur l'échantillon torique. La tension primaire est imposée dans chaque cas de manière à avoir le même flux maximum dans le matériau, à savoir  $\Phi_{max} = 0,35 Wb$ . De la même manière que le transformateur précédemment étudié, ceci n'est pas possible en pratique car la bobine surchaufferait. Ce test permet donc comparer les pertes

à différentes fréquences. Les pertes par courants induits sont calculées à partir de l'expression suivante :

$$P_{CI} = \int_V \sigma E^2 dV \quad (3.31)$$

où  $E$  est le champ électromoteur induit. Les pertes calculées dans les trois cas sont données sur le tableau 3.7. Les pertes totales sont obtenues à partir de l'expression (3.30) et les pertes statiques sont déduites de la différences entre les pertes totales et les pertes par courants induits macroscopiques. Nous constatons que les pertes statiques sont bien proportionnelles à la fréquence. En effet, si nous prenons les pertes statiques à 60 Hz et que nous multiplions par le rapport 1000/60, nous trouvons pour 1 kHz des pertes statiques égales à 71 W alors que celles obtenues à partir de l'expression (3.30) sont de 70,8 W.

**TAB. 3.7** - *Pertes par courants induits dans la bobine à 60 Hz et 1 kHz ( $\Phi_{max} = 0,35$  Wb).*

Fréquence (Hz)	Pertes statiques	Pertes par courants induits (en Watts)	Pertes totales
60	4,27	0,03	4,3
1000	70,8	7,5	78,3

Nous rappelons que les pertes mesurées à 60 Hz sont de 4,3 W. Nous constatons qu'à la fréquence de travail de 60 Hz, la prise en compte des pertes par courants induits macroscopiques ne modifie pratiquement pas le résultat calculé. Dans ce cas, les pertes par courants induits macroscopiques étaient bien négligeables et l'hypothèse d'un comportement statique à cette fréquence se trouve vérifiée.

Par contre, pour la fréquence de travail de 1 kHz, les résultats montrent que les pertes par courants induits macroscopiques sont encore faibles mais représentent une part non négligeable. Ainsi, nous avons mis en évidence l'influence du facteur de forme sur le développement de courants induits macroscopiques dans les poudres de fer de type ATOMET EM1.



# Conclusion générale

Ces travaux, sur la modélisation du cycle d'hystérésis dans les matériaux ferromagnétiques, ont permis de mettre en évidence la difficulté qui existe quant au choix d'un modèle, à la fois précis et rapide, pour une implantation dans un code de calcul de champ basé sur la méthode des éléments finis.

Dans une première étape, nous avons introduit un modèle microscopique énergétique qui donne lieu au phénomène d'hystérésis via le couplage entre les moments magnétiques atomiques. Dans ce modèle, le comportement des moments est décrit par une loi probabiliste et l'aimantation globale est une grandeur statistique. Nous avons constaté qu'il ne permet pas d'obtenir des résultats satisfaisants dans le cas des matériaux doux étudiés en génie électrique. Toutefois, son aspect pédagogique est indéniable et en fait un modèle intéressant à retenir.

Puis, nous avons comparé deux modèles parmi les plus couramment rencontrés dans la littérature spécialisée en génie électrique : le modèle de Preisach et celui de Jiles-Atherton. Ces deux modèles sont, à l'origine, destinés à une utilisation en régime statique. Ils s'appuient sur des hypothèses différentes. Le premier est un modèle phénoménologique qui assimile le matériau ferromagnétique à un ensemble de commutateurs unitaires bistables. Le deuxième est basé sur des considérations énergétiques sur les déplacements de parois de Bloch au sein du matériau. Les procédures d'identification associées à ces deux modèles sont différentes. Dans le premier cas, avec la méthode de caractérisation retenue, il faut relever expérimentalement plusieurs cycles centrés afin d'en déduire un faisceau de courbes d'Everett qui, à partir d'une interpolation, permet de calculer l'aimantation  $M(H)$  ou  $M(B)$ . Le deuxième modèle est décrit par une équation différentielle dans laquelle cinq paramètres doivent être déterminés. Nous avons proposé une procédure d'identification et d'optimisation qui permet d'obtenir de bons résultats.

La comparaison sur différents matériaux (ferrites, tôles FeSi et poudres de fer) a montré que les résultats, dans le cas d'une excitation sinusoïdale, pouvaient être très

proches en terme de prédiction de cycles ainsi qu'en terme d'estimation de pertes. Toutefois, une meilleure précision a été constaté dans le cas du modèle de Preisach pour les tôles et les ferrites. Cet avantage disparaît lorsqu'on utilise les modèles dans le cas des poudres de fer. En effet, l'écart par rapport à la mesure est identique pour les deux modèles qui permettent d'estimer avec beaucoup de précision les pertes pour ce matériau. Une simulation avec la méthode des éléments finis 2D sur une bobine à noyau en poudres de fer confirme ces résultats par une estimation des pertes très proches de la mesure. Il apparaît donc que le choix du modèle est déterminé par le temps de calcul qui est en faveur du modèle de Jiles-Atherton. Cependant, bien que ce modèle semble particulièrement bien adapté à cette étude en particulier, il faut bien garder à l'esprit que son utilisation n'est pas conseillé dans des conditions d'excitation donnant lieu à l'apparition de cycles mineurs non centrés. En effet, la non fermeture et la forme des cycles mineurs dans ce modèle, entraînent une sous-estimation des pertes.

Dans une seconde étape, nous avons étudié les principaux modèles qui permettent de prendre en compte les courants induits macroscopiques (courants de Foucault) et microscopiques (déplacement de parois).

La première difficulté réside dans la prise en compte du facteur de forme du système étudié. En effet, la plupart de ces modèles sont destinés à être utilisés dans le cas de tôles ferromagnétiques dont le facteur de forme est connu. La deuxième difficulté concerne la plage de fréquence d'utilisation puisque dans ces modèles une forte hypothèse de départ est posée. Celle-ci considère que le champ d'excitation pénètre de manière uniforme dans le matériau. Cela revient à considérer une épaisseur de peau suffisamment élevée par rapport à la section traversée par le champ, c'est-à-dire une fréquence limite d'utilisation.

Ainsi, le modèle de Preisach étendu à la dynamique proposé par Bertotti permet de modéliser la dynamique de parois. Toutefois, afin de prendre en compte l'effet des courants induits macroscopiques, il est nécessaire d'y adjoindre la résolution de l'équation de diffusion. La résolution simultanée des deux modèles (Preisach dynamique et équation de diffusion) est très lourd en temps de calcul.

D'autres modèles proposés dans la littérature sont purement une extension mathématique du modèle statique et dans ce cas la loi de comportement est telle  $f(B, dB/dt)$ . Toutefois, on constate un comportement non physique lorsque, étant sur un cycle d'hystérésis en régime dynamique,  $dB/dt$  s'annule. En effet, le phénomène de relaxation observé expérimentalement n'est pas pris en compte. Il existe

aussi des modèles combinant la résolution d'un modèle statique et la résolution de l'équation de diffusion (courants macroscopiques) 1D dans l'épaisseur d'une tôle. Dans ce cas, il est nécessaire d'ajouter une procédure de calcul supplémentaire pour la résolution de l'équation de diffusion.

Nous avons porté notre choix sur deux modèles simples à mettre en oeuvre dans un code de calcul de champ : l'approximation à basse fréquence de l'équation de diffusion pour des tôles et l'extension en dynamique du modèle de Jiles-Atherton pour des formes simples telle qu'une tôle, une sphère ou un cylindre.

Le premier modèle requiert la détermination d'un seul paramètre en plus de ceux nécessaires au modèle statique. Dans notre cas, cela concerne le modèle statique de Jiles-Atherton. Toutefois, dans cette approche, seuls les courants induits macroscopiques sont pris en compte. Dans le cas du modèle dynamique de Jiles-Atherton, nous avons proposé une inversion du modèle pour une utilisation  $M(B)$  dans un code de calcul avec une formulation en potentiel vecteur. Dans ce modèle, deux nouveaux paramètres, l'un lié aux courants induits macroscopiques et l'autre lié aux courants induits microscopiques, sont à déterminer. Leur identification est effectuée grâce à la mesure de "quelques cycles" à différentes fréquences.

Nous constatons alors que, pour ces modèles, les résultats obtenus sont très proches de l'expérience. Cependant, on observe qu'ils s'en écartent, compte tenu des hypothèses, dès que la fréquence de travail devient trop élevée (à partir de 200 Hz). Toutefois, le modèle dynamique de Jiles-Atherton permet de mieux estimer, avec une relativement bonne précision, les pertes dans cette gamme de fréquence. L'implantation de ce modèle dans le code de calcul 2D du laboratoire n'a nécessité que l'ajout des deux paramètres supplémentaires. Enfin, l'application étudiée, un transformateur de tension, a permis de valider son utilisation dans un code de calcul en éléments finis. Toutefois, on constate des problèmes d'origine numérique qui apparaissent dans le cas des tôles. Ces problèmes sont supposés être dûs au changement de pente important au voisinage du champ coercitif.

Nous avons aussi testé la prise en compte des courants induits macroscopiques pour les poudres de fer dans le code de calcul avec une formulation magnétodynamique. En effet, le facteur de forme d'un tel système n'étant pas connu, nous ne pouvons prendre en compte de manière efficace la contribution des courants induits macroscopiques en régime dynamique. Une méthode originale pour la détermination expérimentale de la résistivité a été proposée. Ainsi, la résistivité relevée expérimentalement est utilisée dans le code de calcul de champ en magnétodynamique afin de

prendre en compte les pertes par courants induits macroscopiques. Nous avons montré que ceux-ci étaient négligeables en régime quasi-statique (60 Hz) et faibles, mais non négligeables, à une fréquence de travail plus élevée (1kHz). Ce résultat montre que, dans le cas des poudres de fer utilisés dans ce travail, les effets dynamiques ont principalement comme origine les courants induits macroscopiques.

Enfin, pour les perspectives de ce travail, nous prévoyons une étude plus approfondie des modèles statiques et dynamiques implantés dans le code de calcul du laboratoire. Ceci se traduira par des calculs de pertes *a priori* et *a posteriori* sur différents matériaux et différentes structures. A cela, s'ajoute la résolution du problème numérique rencontré dans le cas des tôles.

D'autre part, le phénomène d'hystérésis n'étant pas uniquement dépendant de la fréquence, il serait intéressant d'étudier les possibilités pour une prise en compte de l'influence de la température. Une piste existe déjà dans le cas du modèle de Jiles-Atherton qui, intrinsèquement, fait intervenir la température via le paramètre  $\alpha$  dans l'équation anhystérétique.

# Annexe A

## Hystérésis et fonction d'opposition

Le phénomène d'hystérésis caractérise le retard des variations de l'aimantation du système par rapport aux variations du champ d'excitation extérieur. On peut ainsi décrire l'hystérésis comme la conséquence d'une force qui s'oppose aux variations de l'aimantation [21]. Une description simple consiste à introduire une fonction d'opposition par analogie à ce qui se passe physiquement dans le système. Sur la figure A.1 on peut schématiser l'évolution de l'énergie potentielle  $E(x)$  d'une paroi en fonction de sa position  $x$  dans le solide. Cette énergie potentielle est constituée de toutes les contributions d'origine interne au système : l'énergie d'échange, l'anisotropie magnétocristalline, etc ...

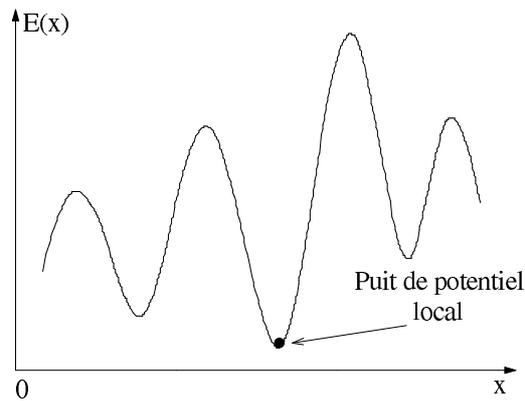


FIG. A.1 - *Énergie potentielle du système.*

Nous considérons une paroi à  $180^\circ$ , de surface  $S$  constante et où règne une polarisation à saturation locale  $P_S$ . En champ nul, cette paroi occupe une position  $x$  telle que l'énergie potentielle est minimale. On vérifie donc :

$$\frac{dE(x)}{dx} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{d^2E(x)}{dx^2} > 0 \quad (\text{A.2})$$

L'action d'un champ externe  $\mathbf{H}_{ext}$  exerce une pression  $\mathcal{P}_H = 2\mathbf{P}_S\mathbf{H}_{ext}$  sur la paroi qui va se déplacer jusqu'à l'obtention d'un équilibre des forces mises en jeu [21] :

$$2\mathbf{P}_S\mathbf{H}_{ext} - \frac{1}{S} \frac{dE(x)}{dx} = 0 \quad (\text{A.3})$$

On peut réécrire l'équation précédente sous la forme suivante :

$$H_{ext} = \beta \frac{dE(x)}{dx} = R(x) \quad (\text{A.4})$$

où  $\beta$  est une constante qui dépend de  $\mathbf{P}_S$ ,  $\mathbf{H}_{ext}$  et  $S$ . La fonction  $R(x)$ , homogène à un champ d'excitation, est appelée *fonction d'opposition* au déplacement de la paroi. On peut ainsi décrire l'existence de l'hystérésis à partir de cette fonction  $R(x)$ . La figure A.2 représente l'évolution de la position  $x$  en fonction de  $R(x)$ . On montre aussi que la variation de l'aimantation  $\mathbf{M}$  est proportionnelle au déplacement  $x$  de la paroi. Ainsi, la figure A.2 représente aussi l'évolution de  $\mathbf{M}$  en fonction du champ appliqué  $H_{ext}$ .

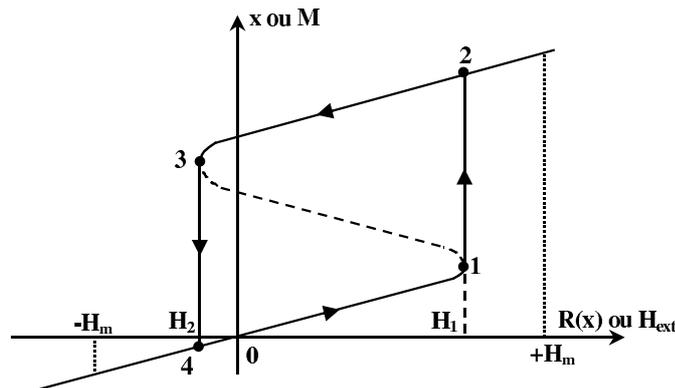


FIG. A.2 - Interprétation de l'origine de l'hystérésis grâce à la fonction d'opposition.

On observe ainsi qu'à partir de la position initiale en 0, le déplacement de la paroi se fait de manière réversible jusqu'à  $H_1$ . En effet, si le champ extérieur est diminué jusqu'à 0, la paroi revient à sa position initiale. Par contre, si le champ  $H_{ext}$  devient supérieur au champ critique  $H_1$ , la paroi subit un saut brutal entre les

points 1 et 2. Ce dernier comportement est lié au processus irréversible et est appelé saut de Barkhausen. Lorsque le champ décroît à partir de  $H_m$ , dans l'intervalle entre les positions 2 et 3, la paroi se trouve dans un autre puits de potentiel. Dès que  $H_{ext}$  devient inférieur à  $H_2$ , un nouveau saut de paroi a lieu. Ainsi, dans le cas où le champ oscille entre  $-H_m$  et  $+H_m$ , nous voyons apparaître un cycle d'hystérésis.



# Annexe B

## Identification de la fonction d'Everett

### B.1 Identification de la fonction d'Everett pour le modèle M(H)

Dans la suite, nous proposons une méthode pour l'identification de la fonction d'Everett qui nécessite la mesure d'un ensemble de cycle d'hystérésis centrés. Si on considère un cycle centré d'amplitude  $H_m$ , d'après la relation (2.17) l'aimantation  $M$  le long d'une branche descendante peut s'écrire :

$$M(H) = M(H_m) - 2E(H_m, H) \quad (\text{B.1})$$

A partir des données expérimentales  $M(H)$ , la fonction  $E(H_m, H)$  est calculée pour des valeurs de  $H$  appartenant à  $[-H_m, H_m]$ . La figure B.1 donne la fonction d'Everett  $\mu_0.E(530, H)$  correspondante à la branche d'hystérésis descendante pour une amplitude  $H_m = 530A.m^{-1}$ .

A partir de  $n$  cycles d'hystérésis centrés ( $i = 1, n$ ), nous pouvons déterminer un ensemble de courbes  $E(H_{mi}, H)$  supportant la fonction d'Everett tridimensionnelle (Fig. (B.2)) avec  $H$  compris entre  $-H_{mi}$  et  $H_{mi}$ . On remarque que pour le cas particulier où  $H = H_m$ , on a bien la fonction d'Everett qui s'annule. Dans ce cas, le triangle  $T(x, y)$  se ramène à point. Il reste à déterminer la valeur de la fonction d'Everett pour n'importe quel point  $(H'_m, H')$  du triangle  $\Delta$ . La méthode proposée consiste à utiliser une fonction d'interpolation utilisant l'ensemble des courbes d'Everett calculées au préalable.

Le choix de la méthode d'interpolation est effectué de façon à ce que la continuité de la fonction d'Everett, et donc des cycles d'hystérésis, sur l'ensemble du domaine

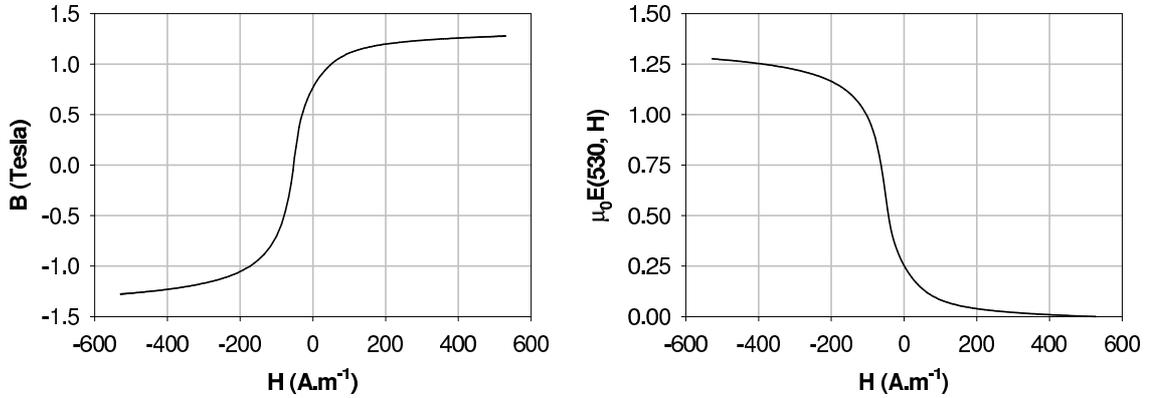


FIG. B.1 - Branche d'hystérésis descendante et fonction d'Everett correspondante.

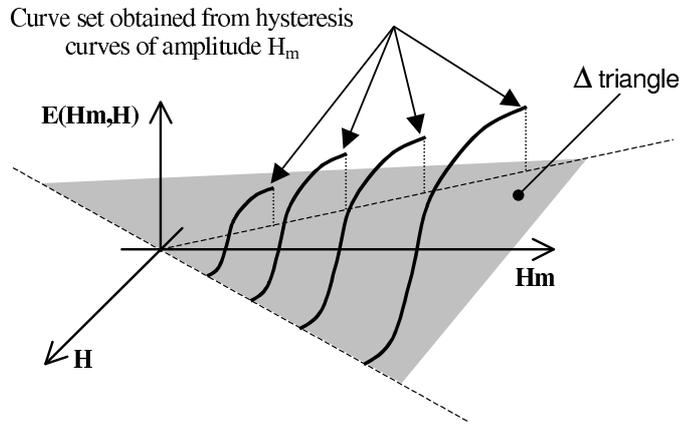


FIG. B.2 - Faisceau des courbes d'Everett mesurées supportant la fonction d'Everett  $E(H_m, H)$ .

étudié soit respectée. La méthode proposée [41] est basée sur des fonctions de forme utilisées pour l'interpolation du champ magnétique dans la méthode des éléments finis bidimensionnelle [42].

En utilisant la relation de symétrie (2.19), il est toujours possible de se ramener au cas où la valeur de  $H$  est comprise entre  $-H'_m$  et  $+H'_m$ . On cherche alors les valeurs  $H_{mi-1}$  et  $H_{mi}$  qui correspondent aux valeurs crêtes des courbes du réseau telles que  $H_{mi-1} < H'_m < H_{mi}$  (figure B.3).

Dans la suite, afin de ne pas alourdir les notations, nous supposons que  $i = 2$ , la valeur recherchée sera donc extrapolée à partir des deux courbes possédant les valeurs crêtes les plus faibles. A ce stade, il faut distinguer 2 cas :

B.1. IDENTIFICATION DE LA FONCTION D'EVERETT POUR LE MODÈLE M(H)141

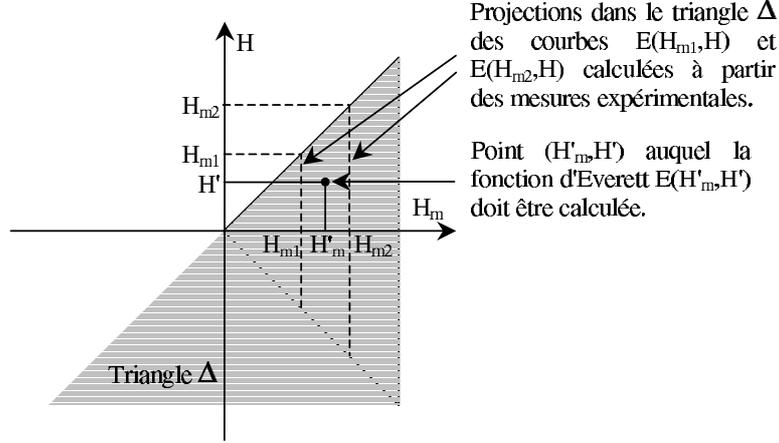


FIG. B.3 - Projection dans le plan  $\Delta$  des courbes d'Everett.

- 1<sup>er</sup> cas :  $|H'| < |H_{m1}|$

Il s'agit de déterminer les champs  $H_{11}$  et  $H_{12}$  dont les valeurs des fonctions d'Everett  $E(H_{m1}, H_{11})$  et  $E(H_{m1}, H_{12})$  sont connues (i.e. calculées à partir des mesures expérimentales). Ces champs vérifient  $H_{11} < H' < H_{12}$ . On détermine de la même manière  $H_{21}$  et  $H_{22}$  sur la droite  $H_m = H_{m2}$  tels que  $H_{21} < H' < H_{22}$ . Les 4 points  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  ainsi déterminés (figure B.4) forment un quadrilatère contenant le point  $(H'_m, H')$ . La valeur de la fonction d'Everett  $E(H'_m, H')$  correspondant à ce point est obtenue par une interpolation de type quadratique :

$$E(H'_m, H') = \frac{(H'_m - H_{m1})}{(H_{m2} - H_{m1})} [E(H_{m2}, H') - E(H_{m1}, H')] + E(H_{m1}, H') \quad (\text{B.2})$$

avec :

$$E(H_{mi}, H') = \frac{(H' - H_{i1})}{(H_{i2} - H_{i1})} [E(H_{mi}, H_{i2}) - E(H_{mi}, H_{i1})] + E(H_{mi}, H_{i1}) \quad (\text{B.3})$$

pour  $i = 1, 2$

- 2<sup>ème</sup> cas :  $|H'| > |H_{m1}|$



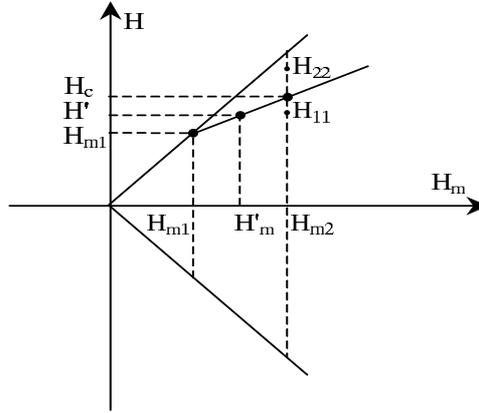


FIG. B.5 - Méthode d'interpolation **M1** utilisée pour calculer la fonction d'Everett dans le 2<sup>ème</sup> cas.

## B.2 Identification de la fonction d'Everett pour le modèle M(B)

Le modèle de Preisach peut aussi être adapté pour une utilisation avec  $B$  comme variable [43]. Dans ce cas, nous devons déterminer une fonction d'Everett qui possède une forme totalement différente de celle obtenue dans le cas du modèle  $M(H)$ . Nous pouvons utiliser la même méthode que précédemment pour obtenir la fonction d'Everett à partir du modèle  $M(B)$ . Toutefois, la fonction d'interpolation pour le calcul de la fonction d'Everett doit être modifiée. En effet, l'utilisation de la fonction d'interpolation **M1**, utilisée dans le cas du modèle  $M(H)$ , conduit à des déformations des cycles aux basses amplitudes d'excitation (figure B.7). Nous avons donc choisi une autre méthode d'interpolation, similaire à la précédente, notée **M2** (B.6). Le problème consiste toujours à calculer la valeur de la fonction d'Everett au point  $(H'_m, H')$ . La définition des champs  $H_{m1}$  et  $H_{m2}$  est la même que pour le modèle  $M(H)$ . A partir de la droite  $d$  passant par l'origine et le point  $(H'_m, H')$ , on calcule les points  $\alpha_1(H_1, H_{m1})$  et  $\alpha_2(H_2, H_{m2})$  intersections de la droite  $d$  avec les droites verticales d'abscisse  $H = H_{m1}$  et  $H = H_{m2}$ . Les points  $a_{11}$  et  $a_{12}$ , ainsi que  $a_{21}$  et  $a_{22}$  encadrant respectivement les points  $b_1$  et  $b_2$  sont ensuite déterminés. De même manière que pour le modèle  $M(H)$ , ces 4 points sont utilisés pour calculer la fonction d'Everett  $E(H'_m, H')$ . La fonction d'interpolation utilisée est celle donnée par l'équation (B.2).

Il est à noter que la méthode d'interpolation **M2** ne nécessite le traitement que d'un seul cas, contrairement à la méthode **M1**. Sur la figure B.7, nous pouvons

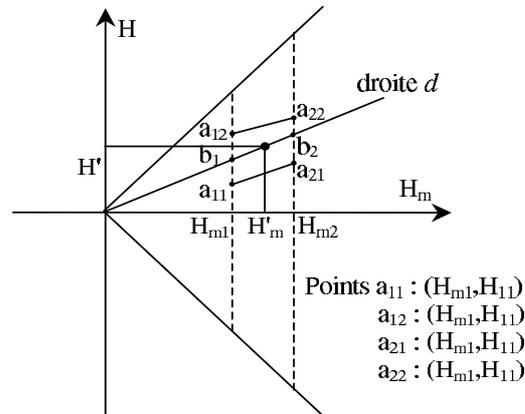


FIG. B.6 - Principe de la méthode d'interpolation M2.

constater l'amélioration du résultat par la méthode M2. Cependant, l'application de cette méthode au cas du modèle  $M(H)$  donne des résultats de qualité moindre que ceux obtenus avec M1. Enfin, la méthode M2 est très sensible à la qualité des mesures expérimentales utilisées pour l'interpolation. En effet, elle nécessite des cycles expérimentaux rigoureusement centrés sinon elle conduit, pour de fortes inductions, à des cycles décalés.

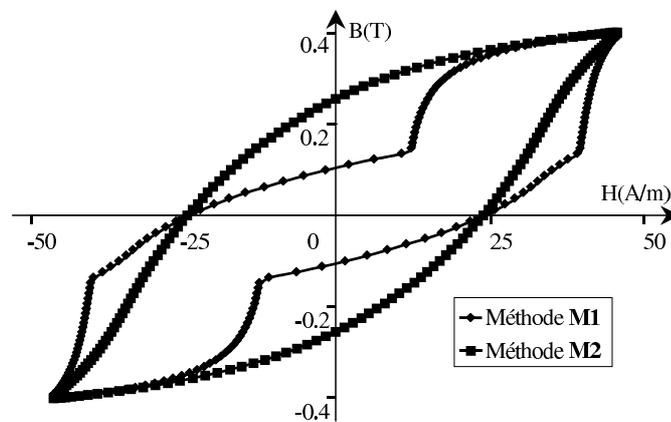


FIG. B.7 - Cycles calculés à partir des méthodes M1 et M2.

# Annexe C

## Modèle dynamique de Jiles-Atherton

### C.1 Modèle original $M(H)$

A partir des équations (2.22) et (2.23) présentées au 2<sup>ème</sup> chapitre, l'équation de bilan énergétique du modèle statique s'écrit :

$$\mu_0 \int M_{an} dH_e = \mu_0 \int M dH_e + \mu_0 k \delta (1 - c) \int dM_{irr} \quad (C.1)$$

Sachant que l'aimantation irréversible peut s'écrire  $M_{irr} = \frac{1}{(1 - c)}(M - cM_{an})$ , l'équation de bilan énergétique statique (C.1) devient :

$$\mu_0 \int M_{an} dH_e = \mu_0 \int M dH_e + \mu_0 k \delta \int \frac{dM}{dH_e} dH_e - \mu_0 k \delta c \int \frac{dM_{an}}{dH_e} dH_e \quad (C.2)$$

En ajoutant les pertes par courants induits et les pertes excédentaires dans le terme de droite :

$$\begin{aligned} \mu_0 \int M_{an} dH_e = & \mu_0 \int M dH_e + \mu_0 k \delta \int \frac{dM}{dH_e} dH_e - \mu_0 k \delta c \int \frac{dM_{an}}{dH_e} dH_e \\ & + \int \frac{\mu_0^2 d^2}{2\rho\beta} \left( \frac{dM}{dt} \right)^2 dt + \int \left( \frac{GdwH_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\mu_0 dM}{dt} \right)^{\frac{3}{2}} dt \end{aligned} \quad (C.3)$$

De plus, en posant :

$$\begin{aligned}\left(\frac{dM}{dt}\right)^2 dt &= \left(\frac{dM}{dt}\right) \left(\frac{dM}{dH_e}\right) dH_e \\ \left(\frac{dM}{dt}\right)^{\frac{3}{2}} dt &= \left(\frac{dM}{dt}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{dM}{dH_e}\right) dH_e\end{aligned}$$

Ces expressions sont substituées dans l'équation (C.3). Ainsi, en divisant par  $\mu_0$  et en intégrant par rapport à  $H_e$ , nous obtenons l'équation différentielle du modèle dynamique en  $\left(\frac{dM}{dH}\right)$  :

$$\begin{aligned}\left(\frac{dM}{dH}\right) \left[ k\delta - \alpha \left( M_{an} - M + k\delta c \frac{dM_{an}}{dH_e} \right) \right] - \left( M_{an} - M + k\delta c \frac{dM_{an}}{dH_e} \right) \\ + D_1 \left(\frac{dH}{dt}\right) \left(\frac{dM}{dH}\right)^2 + D_2 \left(\frac{dH}{dt}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{dM}{dH}\right)^{\frac{3}{2}} = 0\end{aligned}\quad (C.4)$$

avec les paramètres dynamiques  $D_1$  et  $D_2$  qui sont donnés par :

$$\begin{aligned}D_1 &= \left( \frac{\mu_0 d^2}{2\rho\beta} \right) \\ D_2 &= \left( \frac{\mu_0 G d w H_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

## C.2 Développement du calcul pour un modèle $M(B)$

On utilise pour ce modèle les expressions (3.11) et (3.12) des pertes par courants induits et des pertes excédentaires qui sont ajoutées dans l'équation du bilan énergétique (C.2). Ainsi, en posant :

$$\begin{aligned}\left(\frac{dB}{dt}\right)^2 dt &= \left(\frac{dB}{dt}\right) \left(\frac{dB}{dH_e}\right) dH_e \\ \left(\frac{dB}{dt}\right)^{\frac{3}{2}} dt &= \left(\frac{dB}{dt}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{dB}{dH_e}\right) dH_e\end{aligned}$$

et en dérivant par rapport à  $H_e$  puis en multipliant par  $\left(\frac{dH_e}{dB}\right)$ , nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \mu_0 M_{an} \left( \frac{dH_e}{dB} \right) &= \mu_0 M \left( \frac{dH_e}{dB} \right) + \mu_0 k \delta \frac{dM}{dB} - \mu_0 k \delta c \left( \frac{dM_{an}}{dH_e} \right) \left( \frac{dH_e}{dB} \right) \\ &\quad + \left( \frac{d^2}{2\rho\beta} \right) \left( \frac{dB}{dt} \right) + \left( \frac{GdwH_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{dB}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (C.5)$$

Sachant :

$$\begin{aligned} H_e &= H + \alpha M \\ B &= \mu_0(H + M) \end{aligned}$$

donc  $B = \mu_0[(H_e - \alpha M) + M]$  et par conséquent :

$$\frac{dH_e}{dB} = \frac{1}{\mu_0} + (\alpha - 1) \frac{dM}{dB} \quad (C.6)$$

L'expression (C.5), après réarrangement des termes en  $\left( \frac{dM}{dB} \right)$ , devient :

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dB} \left[ \mu_0(\alpha - 1) \left( M - k\delta c \frac{dM_{an}}{dH_e} - M_{an} \right) + \mu_0 k \delta \right] &+ \left( M - M_{an} - k\delta c \frac{dM_{an}}{dH_e} \right) \\ &+ D'_1 \left( \frac{dB}{dt} \right) + D'_2 \left( \frac{dB}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned} \quad (C.7)$$

avec les paramètres dynamiques  $D'_1$  et  $D'_2$  qui sont donnés par :

$$D'_1 = \frac{1}{\mu_0} D_1 \quad (C.8)$$

$$D'_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} D_2 \quad (C.9)$$



# Bibliographie

- [1] O.C. Zienkiewicz et R.L. Taylor.  
*"La méthode des éléments finis"*, Afnor technique, 1991.
- [2] B. Benali.  
*"Contribution à la modélisation des systèmes électrotechniques à l'aide des formulations en potentiels : application à la machine asynchrone"*,  
Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1997.
- [3] Y. Le Menach.  
*"Contribution à la modélisation numérique tridimensionnelle des systèmes électrotechniques : prise en compte des inducteurs"*,  
Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1996.
- [4] F. Liorzou, B. Phelps et D.L. Atherton.  
*"Macroscopic models of magnetization"*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 36, No. 2, pp. 418-428, 2000.
- [5] L.O. Chua et K. A. Stromsmoe.  
IEEE Transactions on Circuit Theory, CT-17, No. 4, pp. 564-574, 1970.
- [6] M.L. Hodgdon.  
IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 24, No. 6, pp. 3120-3122, 1988.
- [7] I.D. Mayergoyz.  
*"Mathematical models of hysteresis"*, Springer Verlag, New York, 1991.
- [8] A. Bossavit.  
*"Computational Electromagnetism"*, Academic Press, Boston, 1998.
- [9] Y.O. Amor.  
*"Contribution à la modélisation de l'hystérésis magnétique en vue de l'analyse par éléments finis des systèmes de chauffage par induction"*, Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique de l'Université de Nantes, 2000.

- [10] *"Caractérisation et modélisation de l'hystérésis scalaire statique : implantation dans un code de calcul éléments finis"*, GDR Sécurité et Disponibilité des Systèmes Electrotechniques, 2001.
- [11] E. Durand.  
*"Magnétostatique"*, Edition Masson et Cie, 1968.
- [12] F. Fournet.  
*"Electromagnétisme à partir des équations locales"*, Edition Masson, 1985.
- [13] Y. Le Menach, S. Clénet et F. Piriou.  
*"Determination and utilization of the source field in 3D magnetostatic problems"*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 34, pp. 2509-2512, 1998.
- [14] R. Albanese et G. Rubinacci.  
*"Magnetostatic field computations in terms of two-component vector potentials"*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 29, pp 515-532, 1990.
- [15] O. Biro et K. Preis.  
*"On the use of the magnetic vector potential in the finite element method analysis of three dimensional eddy currents"*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 25, No. 4, pp. 3145-3159, 1989.
- [16] A. Benabou, S. Clénet et F. Piriou.  
*"Comparison of the Preisach and Jiles-Atherton models to take hysteresis phenomenon into account in finite element analysis"*, EPNC 2002, Belgique, Louvain, pp. 27-30, 1-3 Juillet 2002.
- [17] C. Johnson.  
*"Numerical solution of partial differential equations by the finite element method"*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [18] V. Ionita, B. Cranganu-Cretu et B. Iona.  
IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 32, No. 3, pp. 1128-1131, 1996.
- [19] F. Piriou et A. Razek.  
IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 28, pp. 1295-1298, 1992.
- [20] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer et B. Roulet.  
*"Physique statistique"*, Edition Hermann, 1997.
- [21] P. Brissonneau.  
*"Magnétisme et matériaux magnétiques pour l'électrotechnique"*, Edition Hermès.

- [22] C. Kittel.  
*"Physique de l'état solide"*, Edition Dunod.
- [23] E. Semail.  
*"Physique du génie électrique"*, Editions TEC & DOC, 1998.
- [24] H.J. Williams, W. Shockley et C. Kittel.  
*"Studies of the propagation velocity of a ferromagnetic domain boundary"*, Phys. Rev., Vol. 80, p. 1090, 1950.
- [25] P. Viarouge, J. Cros et I. Haouara.  
*"Conception de machines électriques avec des matériaux composites Fer-Résine"*, MGE 2000, 13 et 14 décembre à Lille, pp. 167-170, 2000.
- [26] G. Bertotti.  
*"General properties of power losses in soft ferromagnetic materials"*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 24, No. 1, pp. 621-630, 1988.
- [27] P. Papon, J. Leblond et P.H.E Meijer.  
*"Physique des transitions de phases"*, Edition Dunod.
- [28] F. Preisach.  
*"Über die magnetische nachwirkung"*, Zeitschrift für Physik 94, pp. 277-302, 1935.
- [29] D.C. Jiles et J.L. Atherton.  
*"Theory of ferromagnetic hysteresis"*, Journal of Magnetism and Magnetic Materials, Vol. 61, pp. 48-60, 1986.
- [30] J. Restrepo et O. Arnache.  
*"Hysteretic behavior of  $Fe_{0.9-q}Mn_{0.1}Al_q$ -disordered alloys : a Monte Carlo study"*, Physica B 320, pp. 244-248, 2002.
- [31] R.J. Glauber.  
J. Math. Phys. No. 4, p. 294, 1963.
- [32] S.W. Sides, P.A. Rikvold et M.A. Novotny.  
Phys. Rev. Lett. No. 81, p. 834, 1998.
- [33] D. Dhart, P. Shukla et J.P. Sethna.  
*"Zero-temperature hysteresis in the random-field Ising model on a Bethe lattice"*, J. Phys. A : Math. Gen. No. 30, pp. 5259-5267, 1997.
- [34] J. H. Toloza, F.A. Tamarit et S.A. Cannas.  
*"Aging in a two-dimensional Ising model with dipolar interactions"*, Phys. Rev. B, No. 58, R8885, 1998.

- [35] F. Delincé.  
*"Modélisation des régimes transitoires dans les systèmes comportant des matériaux magnétiques non linéaires et hystérétiques"*, Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences Appliquées de Liège, 1994
- [36] H. Debruyne, S. Clénet et F. Piriou.  
*"Characterization and modelling of hysteresis phenomenon"*, *Mathematic and Computers in Simulation*, Vol. 46, No. 3-4, pp 301-311, Mai 1998.
- [37] G. Bertotti et V. Basso.  
*J. Appl. Phys.* 73 (10), pp. 5827-5829, 1993.
- [38] G. Biorci et D. Pescetti.  
*Il Nuovo Cimento* Vol. 7, No. 6, pp. 829-842, 1958.
- [39] Y. Bernard, E. Mendes et Z. Ren.  
*"A new method for the determination of the parameters in preisach model"*, CEFC'98, Tucson, Arizona, USA, p. 402, 1-3 Juin 1998.
- [40] D. Everett.  
*Trans. Faraday Soc.*, Vol. 51, pp. 1551-1557, 1955.
- [41] S. Clénet et F. Piriou.  
*"Identification de la fonction d'Everett pour le modèle de Preisach"*, MGE 2000, France, Lille, 13-14 Décembre, pp. 71-74, 2000.
- [42] O.C. Zienkiewicz et R.L. Taylor.  
*"The Finite element method"*, London, New York : McGraw-Hill, 1989.
- [43] G.S. Park, S.Y. Hahn, K.S. Lee et H.K. Jung.  
*IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 29, No. 2, pp. 1542-1545, 1993.
- [44] N. Sadowski, N.J. Batistela, J.P.A. Bastos et M. Lajoie-Mazenc.  
*Compumag*, France, Evian, 2-5 Juillet, Vol. 4, pp. 246-247, 2001.
- [45] D.C. Jiles, J.B. Thoelke et M.K. Devine.  
*"Numerical determination of hysteresis parameters for the modeling of magnetic properties using the theory of ferromagnetic hysteresis"*, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 28, pp. 27-35, 1992.
- [46] A. Benabou.  
*"Identification et optimisation des paramètres du modèle de Jiles-Atherton pour la modélisation de l'hystérésis magnétique"*, JCGE'01 Nancy (France), 13-14 Novembre, pp.229-234, 2001.

- [47] S. Clénet, J. Cros, F. Piriou, P. Viarouge et L.P. Lefebvre.  
*"Determination of losses' local distribution for transformer optimal designing"*,  
Compel 20, No. 1, pp. 187-204, 2001.
- [48] Etienne du Tremolet de Lacheisserie.  
*"Magnétisme"*, Volume I, Collection Grenoble Sciences.
- [49] P.I. Koltermann, L.A. Righi, J.P.A. Bastos, R. Carlson, N. Sadowski et N.J. Batistela.  
Physica B, Vol. 275, pp. 233-237, 2000.
- [50] D.C. Jiles.  
*"A self-consistent generalized model for the calculation of minor loop excursions in the theory of hysteresis"*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 28, No. 5, pp. 2602-2604, 1992.
- [51] E. Della Torre.  
*"Existence of magnetization-dependent Preisach models"*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 27, No. 4, pp. 3697-3699, 1991.
- [52] G. Bertotti.  
*"Physical interpretation of eddy current losses in ferromagnetic materials. I - Theoretical considerations"*, J. Applied. Phys. 57 (6), pp. 2110-2117, 1985.
- [53] L.L. Rouve.  
*"Prise en compte du comportement magnétique fréquentiel des tôles FeSi en modélisation électrotechnique"*, Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1996.
- [54] L.R. Dupré, R. Van Keer et J.A. Melkebeek.  
*"On a magnetodynamic model for the iron losses in non-oriented steel laminations"*, J. Phys. D : Appl. Phys., Vol. 29, pp. 855-861, 1996.
- [55] O. Bottauscio, M. Chiampi, F. Fiorillo et M. Repetto.  
*"Dynamic hysteresis and voltage driven solution of a ferromagnetic laminated core"*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 36, No. 4, pp. 1238-1241, 2000.
- [56] Jacques Nougier.  
*"Méthodes de calcul numérique"*, Hermès sciences publications, 1997.
- [57] D.A. Philips, L.R. Dupré et J.A. Melkebeek.  
*"Comparison of Jiles and Preisach Hysteresis Models in Magnetodynamics"*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 31, No. 6, pp. 3551-3553, 1995.

- [58] R. Del Vecchio.  
*"An efficient procedure for modeling complex hysteresis processes in ferromagnetic materials"*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 16, pp. 809-811, 1980.
- [59] D.A. Philips, L.R. Dupré et J.A. Melkebeek.  
*"The application of the Preisach Model in magnetodynamics : theoretical and practical aspects"*, Journal of Magnetism and Magnetic Materials, Vol. 133, pp. 540-543, 1994.
- [60] Y. Bernard.  
*"Contribution à la modélisation de systèmes électromagnétiques en tenant compte du phénomène d'hystérésis. Extensions du modèle de Preisach adaptées au calcul de champ"*, Thèse de Doctorat, Université Paris XI, 2000.
- [61] T. Chevalier, A. Kedous-Lebouc, B. Cornut et C. Cester.  
*"A new dynamic hysteresis model for electrical sheet"*, Physica B, Vol. 275, pp. 197-201, 2000.
- [62] T. Chevalier.  
*"Modélisation et mesure des pertes fer dans les machines électriques, application à la machine asynchrone"*, Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1999.
- [63] A. Bossavit, C. Emson et I.D. Mayergoyz.  
*"Méthodes numériques en électromagnétisme : Géométrie différentielles, éléments finis, modèles d'hystérésis"*, Editions Eyrolles, 1991.
- [64] D.C. Jiles.  
*"Modelling the effects of eddy current losses on frequency dependent hysteresis in electrically conducting media"*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 30, No. 6, pp. 4326-4328, 1994.
- [65] S. Chikazumi.  
*"Physics of Magnetism"*, New York : JohnWiley, p. 321, 1964.
- [66] O. Deblecker.  
*"Contribution à la modélisation des champs magnétiques dans les systèmes comportant des milieux non linéaires et hystérétiques"*, Thèse de Doctorat, Faculté Polytechnique de Mons, Belgique, 2001.
- [67] H. Fraisse, J.P. Masson et F. Marthouret.  
*"Modeling of a non-linear conductive magnetic circuit Part1 : definition and experimental validation of an equivalent problem"*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 31, pp. 4065-4067, 1995.

- [68] P. Tenant et J.J. Rousseau.  
*"Dynamic model for soft ferrites"*, Power Electronics Specialist Conferences, Atlanta, pp. 1070-1076, 1995.
- [69] M.A. Raulet, J.P. Masson et D. Gaude.  
*"Introduction d'une représentation dynamique de matériau dans l'équation de diffusion du champ magnétique"*, Eur. Phys. J., AP 1, pp. 73-76, 1998.

**Résumé :** Pour étudier les systèmes électromagnétiques on a de plus en recours à la modélisation numérique. Dans notre étude, nous nous sommes intéressés à la modélisation des matériaux ferromagnétiques utilisés dans les systèmes de conversion d'énergie électrique. La loi de comportement de ces matériaux, de nature hystérétique, doit être prise en compte pour une modélisation plus fine. Ainsi, 3 matériaux (tôles FeSi, Ferrites et poudres de fer) ont été étudiés en régimes statique et dynamique. En régime statique, les modèles de Preisach et de Jiles-Atherton ont été comparés en terme de précision et de temps de calcul. Cette comparaison a été étendue à l'étude d'un système modélisé avec la méthode des éléments finis. En régime dynamique, deux modèles sont comparés : celui de Jiles-Atherton étendu à la dynamique et celui de l'équation de diffusion approximée en basse fréquence. Le premier est choisi pour une implantation dans le code éléments finis du laboratoire pour l'étude d'un transformateur.

**Mots clés :** Hystérésis magnétique, Preisach, Jiles-Atherton, régimes statique et dynamique, calcul de champ

**Abstract :** To study electromagnetic systems, numerical modelling is more and more used. In our study, we are interested in the ferromagnetic materials modelling used in electrical energy conversion systems. The hysteretical behavior law of these materials has to be taken into account for a more accurate modelling, especially for iron losses calculation. We have studied 3 kinds of materials (FeSi sheet steels, Ferrites and Iron Powder) in static and dynamic regimes. In the first case, the Preisach model and the Jiles-Atherton model have been compared in terms of accuracy and calculation time. This comparison has been extended to the study of a system modelled with the finite element method. In the dynamic regime, two models are compared : the frequency dependant Jiles-Atherton model and the diffusion equation approximated at low frequency. The first model, is chosen to be implemented in the laboratory finite element code to study a voltage transformer.

**Keywords :** Magnetic hysteresis, Preisach, Jiles-Atherton, static and dynamical behaviour, field calculation