

# Contribution à la modélisation numérique des phénomènes électromagnétiques 3D en basse fréquence

## RAPPORT de SYNTHESE

11/12/2012

en vue d'obtenir

**L'Habilitation à Diriger des Recherches**

(spécialité: Génie électrique )

présentée par

Yvonnick Le Ménach

### Composition du jury

*Président :*

<i>Rapporteurs :</i>	Bastos A. Joao Pedro	Professeur à l'UFSC, GRUCAD
	Meunier Gérard	Directeur de recherche CNRS, G2ELAB
	Ren Zhoxiang	Professeur à l'UPMC, L2E

<i>Examineurs :</i>	Bouillault Frédéric	Professeur à l'Université Paris-sud, LGEP
	Clénet Stéphane	Professeur à Arts & Métiers, Paris-Tech, L2EP
	Piriou Francis	Professeur à l'Université Lille 1, L2EP

<i>Invités :</i>	Thomas Pierre	Ingénieur de recherche, EDF R&D
------------------	---------------	---------------------------------

# Remerciements

Cette synthèse de travaux de recherches qui m'ont permis d'obtenir l'Habilitation à Diriger les Recherches est principalement le résultat des travaux effectués par des étudiants (doctorants et master) que j'ai encadré pendant une décennie. C'est pourquoi je tiens, avant tout, à remercier l'ensemble de ces étudiants et notamment les docteurs Z. Shi, J.Korecki, B. Iamamura, K. Beddek et Z. Tang. Viennent ensuite les étudiants G. Parent, N. Jing, D.Q Nguyen, Z. Wang, A. Pierquin et K.Bien. Parmi ces étudiants, certains viennent de l'empire du milieu, d'autres de Tong-king, du Brésil, du Maghreb et enfin du ch'nord. La diversité de ces origines pimentent agréablement le travail d'encadrement car un simple oui a une signification bien différente selon les cultures personnes.

A lecture du rapport vous pourrez apprécier que cette synthèse est aussi le fruit des différentes collaborations notamment avec les mathématiciens et informaticiens. Parmi eux, je pense particulièrement à Emmanuel Creusé, Professeur en mathématiques appliquées et gentleman, qui à la patience et les mots pour nous faire comprendre l'essence des démonstrations nécessaires à la preuve mathématique des développements. Je tiens aussi à remercier A. Tinzfete, Docteur en mathématiques appliquées, passionné de foot et ingénieur de recherche sous contrat au laboratoire qui a effectué un excellent travail sur les solveurs et le parallélisme. Je remercie aussi F. Guyomarc'h, homme de l'ouest et numéricien, avec qui j'ai beaucoup échangé sur les solveurs linéaires et non linéaires.

Sans l'équipe modélisation du L2EP, cette synthèse n'aurait pas la même saveur. Le développement du code de calcul que nous menons depuis quinze ans est le résultat d'un formidable travail d'équipe et d'une très bonne entente entre tous les membres. Je remercie donc T. Henneron, le codeur métalleux, K. Benabou, le caractérisateur serein, M. Tounzi, le machiniste charmant, S. Clénet, le théoricien sportif et F. Piriou, notre directeur travailleur et travailliste.

Parmi ces membres, je remercie vivement Stéphane, qui a accepté de te porter garant de cette HDR, qui grâce à ses remarques toujours pertinentes, mais un jour je l'aurais, a permis d'améliorer grandement la qualité de ce rapport.

Sans F. Piriou, vous ne seriez pas en train de lire ces remerciements. J'ai été un de ses étudiants, en 1991, à INSEET dans la triste ville de St Quentin. Mes connaissances antérieures de l'électrotechnique m'ont permis de me faire remarquer après de Francis qui m'a proposé de faire un Master à Lille puis une thèse et la suite est dans ce mémoire. C'est pourquoi je tiens à remercier sincèrement et chaleureusement Francis pour sa confiance ainsi que pour les discussions scientifiques et politiques que nous avons eues au cours de toutes ses années.

# Table des matières

<b>I. CURRICULUM VITAE</b>	<b>1</b>
Bibliographie	13
<b>II. Synthèse de mes recherches</b>	<b>20</b>
<b>1. Problème à résoudre</b>	<b>23</b>
1.1. Définition d'un problème en basse fréquence . . . . .	23
1.1.1. Équations de Maxwell . . . . .	23
1.1.2. Les lois de comportement . . . . .	25
1.1.3. Domaine hétérogène et interfaces entre les milieux . . . . .	26
1.1.4. Les conditions aux limites . . . . .	26
1.2. Formulations . . . . .	27
1.2.1. Formulations de l'électrocinétique . . . . .	28
1.2.2. Formulations de la magnétostatique . . . . .	29
1.2.3. Formulations de la magnétodynamique . . . . .	32
1.2.4. Cas général . . . . .	33
1.2.5. Les espaces fonctionnelles . . . . .	34
1.3. Grandeurs globales . . . . .	37
1.3.1. Définitions du jeu de vecteurs outils $\mathbf{N}$ , $\mathbf{K}$ , $\alpha$ et $\beta$ . . . . .	38
1.3.2. Expression des grandeurs globales . . . . .	39
1.3.3. Imposition des grandeurs globales . . . . .	41
<b>2. Méthodes de discrétisations</b>	<b>44</b>
2.1. Notion de maillage dual . . . . .	45
2.2. Discrétisation des opérateurs différentiels . . . . .	46
2.2.1. Le gradient discret $G_{an}$ . . . . .	46
2.2.2. Le rotationnel discret $R_{fa}$ . . . . .	47
2.2.3. La divergence discrète $D_{vf}$ . . . . .	48
2.2.4. Propriétés des opérateurs . . . . .	48
2.3. Discrétisation des grandeurs physiques . . . . .	49
2.4. Discrétisation des lois de comportement et maillage dual . . . . .	50
2.4.1. Cas de la F.I.T . . . . .	50
2.4.2. Cas de la Cell-Method . . . . .	51

2.4.3. Cas de la méthode des éléments finis . . . . .	53
2.5. Diagrammes de Tonti . . . . .	53
2.6. Formulations discrètes . . . . .	54
2.6.1. Formulations classiques . . . . .	54
2.6.2. Formulations couplées . . . . .	56
2.7. Applications . . . . .	57
2.7.1. Cas du Cube . . . . .	57
2.7.2. Bobine à noyau de fer . . . . .	59
2.7.3. Conclusion . . . . .	62
<b>3. Outils de calcul</b>	<b>63</b>
3.1. Mouvement . . . . .	63
3.1.1. Problématique . . . . .	63
3.1.2. État de l'art . . . . .	64
3.1.3. Comportement numérique des méthodes . . . . .	66
3.1.4. Applications . . . . .	69
3.2. Estimateurs d'erreur numérique . . . . .	74
3.2.1. Définitions . . . . .	74
3.2.2. Estimateur d'erreur équilibré . . . . .	76
3.2.3. Estimateur d'erreur résiduel . . . . .	77
3.2.4. Validation et Applications . . . . .	79
3.2.5. Conclusion . . . . .	85
<b>4. Résolution de systèmes linéaires</b>	<b>87</b>
4.1. Généralités . . . . .	87
4.2. Décomposition de matrice (méthodes directes) . . . . .	88
4.2.1. Parallélisation de la décomposition . . . . .	90
4.2.2. Validation et résultats . . . . .	91
4.3. Méthodes indirectes . . . . .	93
4.3.1. Méthodes multigrilles . . . . .	93
4.3.2. Les méthodes de Gradient conjugué . . . . .	95
4.3.3. Préconditionneur . . . . .	96
4.4. Conclusion . . . . .	100
<b>5. Conclusions et perspectives</b>	<b>101</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>106</b>

**Première partie .**  
**CURRICULUM VITAE**

# CURRICULUM VITAE DÉTAILLE

## État civil

Nom : Le Ménach  
Prénom : Yvonnick  
Date et lieu de naissance : le 5 juin 1970 à Auray (56)  
e-mail : yvonnick.le-menach@univ-lille1.fr

## Emplois dans la Fonction Publique

Depuis 2002 : Maître de conférences à l'université de Lille 1 (U.F.R d'I.E.E.A)  
1999-2002 : Maître de conférences à l'université d'Artois (I.U.T de Béthune)  
1998-1999 : Demi ATER à l'école Centrale de Lille  
1996-1998 : Moniteur à l'université de Lille 1 (U.F.R d'I.E.E.A)

## Diplômes universitaires

1999 : Thèse de Doctorat en Génie Électrique de l'université de Lille 1  
1994 : DEA en Génie Électrique à l'université de Lille 1  
1993 : Maîtrise ès sciences de l'industrie à l'INSSET de St Quentin (02)  
1992 : Licence ès sciences de l'industrie à l'INSSET de St Quentin (02)

## Responsabilités administratives

Depuis 2003 : Membre élu au conseil d'U.F.R d'I.E.E.A  
Depuis 2009 : Responsable financier de l'équipe modélisation  
2004-2007 : Membre élu de la commission de spécialistes de 63ème section de l'USTL  
2000-2002 : Membre élu de la commission de spécialistes de la section V de l'université d'Artois  
2000-2002 : Membre nommé de la commission de spécialistes de 63ème section de l'USTL

## Responsabilités et activités pédagogiques

2004-2010	Directeur des études et Président du Jury de la première année de Master ASE "Automatique et Systèmes Électriques" (moyenne de 50 étudiants )
2002-2010	Coordinateur des stages en entreprises les masters GR2E
2004-2010	Responsable de l'unité d'enseignement "Outils de simulation" et des projets du M1 ASE.
Depuis 2007	Responsable de l'unité d'enseignement "Généralités des réseaux électriques" du master GR2E
Depuis 2011	Responsable de l'unité d'enseignement "Projet encadré" du M1 ASE

## Activités pédagogiques marquantes

Pendant de mes trois années passées à l'IUT de Béthune, j'ai dispensé des travaux pratiques en Électrotechnique et Électronique de Puissance et encadré la réalisation de projets techniques. Dans ce contexte, j'ai piloté le développement d'un robot afin de faire participer 4 étudiants au concours CAR Tec-Inno. Cette expérience a été reconduite avec succès après mon départ de l'IUT. Par ailleurs, mes activités de recherches très orientées vers les méthodes numériques m'ont permis d'enseigner l'informatique aux étudiants de première année de DUT GEII (Cours, Travaux Dirigés, Travaux Pratiques).

En 2002, lors de mon retour à l'université Lille 1, j'ai dispensé des travaux dirigés et travaux pratiques en Électrotechnique, Électronique de puissance et commande de machine aux étudiants de Licence EEA et de Maîtrise EEA. Ce retour a coïncidé avec la mise en place du DESS GR2E dans lequel je dispense le cours de qualité de l'énergie électrique. Depuis de 2007, j'enseigne aussi la modélisation des réseaux électriques.

En 2004, l'université Lille 1 a adopté le système LMD et on m'a confié la direction des études et la présidence du Jury de la première année de Master Automatique et Système Électrique (ASE). Dans ce cadre, j'ai développé et introduit une unité d'enseignement autour des Outils de simulations dans laquelle les étudiants découvrent et utilisent des outils numériques tels que Matlab, FEMM, le VHDL et PSIM. Cette unité a évolué depuis sous la forme d'un projet encadré dans lequel les étudiants conçoivent des composants électromagnétiques et leur commande à l'aide de Matlab, FEMM et PSIM.

J'ai également participé d'une manière active à la mise en place d'un Master Calcul Scientifique à Lille1. Ce master, qui actuellement fait partie de l'offre d'enseignement de l'UFR de mathématiques, est ouvert aux étudiants d'autres disciplines telles que EEA, la Chimie, la biologie , ... . En l'intégrant, ils peuvent obtenir une double, voire triple compétence par exemple : mathématique, informatique et physique. A titre

d'information, actuellement un étudiant issu de cette formation effectue sa thèse au sein du L2EP.

## **Responsabilités recherches et valorisation**

- Coordinateur du projet MEDEE I "Industrialisation de Code\_Carmel3D" (7 thèses)
- Participation à l'organisation de conférences EPNC 2008, NUMELEC 2006
- Membre des comités de lecture pour les conférences internationales COMPUMAG et CEFC
- Relecture pour les revues internationales IEEE Transactions on Magnetics et European Physics Journal (Applied Physics)
- Mise en place de formations sur Code\_carmel

## **Programme de recherche MEDEE I**

Le CNRT Futurelec a été transformé en projet phare MEDEE (Maîtrise énergétique des entraînements électriques). Avec l'aide de la région Nord Pas-de-Calais, ce projet met en commun des thématiques de recherche de plusieurs laboratoires et groupes industriels. Il comporte neuf thèmes allant de l'industrialisation de Code\_Carmel à la Gestion Énergétique des Réseaux Électriques Embarqués en passant par le diagnostic des machines électriques. Je suis le coordinateur scientifique du thème I du projet phare MEDEE intitulé "Industrialisation et développement de Code\_Carmel". Ce projet, qui regroupe 11 opérations, a pour but de développer Code\_Carmel afin d'en faire un code fiable et robuste et à terme libre. Six laboratoires de recherches : le L2EP, le LIFL (Laboratoire d'Informatique Fondamental de Lille), le LPP (Laboratoire Paul Painlevé), le LAMAV (Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Valenciennes), le TEMPO (Thermique, Écoulement Mécanique Matériaux Mise en forme prOduction) et enfin le LGEP (Laboratoire de Génie Électrique de Paris) et 3 industriels VALEO, EDF et Jeumont Electric y sont impliqués. Enfin sur les différentes opérations 7 sont adossées à des thèses dont deux que je co-dirige.

## **Bilan comptable**

- 6 encadrements (5 soutenues) de thèses dont 3 à 50 %, une à 40 %, une à 30 % et une à 25%
- 7 encadrements de master recherche tous à 100 %.
- 23 Publications dans des revues internationales référencées
  - 14 IEEE Trans Mag.
  - 4 COMPEL
  - 3 EPJ
  - 1 M3AS, IJAEM
- 42 Communications en conférences internationales



- 12 Compumag
- 9 CEFC
- 4 EPNC
- 2 ISEM , ISEF, ICEM, ISEF, MOMAG
- ..

## Résumé des activités de recherche au L2EP

### CONTEXTE DES RECHERCHES

Comme le titre de ce rapport l'indique mes recherches concernent la contribution à la modélisation numérique des phénomènes électromagnétiques 3D. Mais avant de détailler mes activités de recherche, je présente le cadre général de ces dernières.

#### Environnement

Mes activités de recherche se font au sein de l'équipe Modélisation du L2EP (Laboratoire d'Électrotechnique et d'Électronique de Puissance). Pour mener à bien la modélisation numérique fine des phénomènes électromagnétiques en basse fréquence, il est nécessaire de maîtriser correctement plusieurs étapes : les hypothèses simplificatrices sur le modèle mathématique et sur la géométrie du problème, sa mise en équations, la caractérisation et la modélisation des matériaux, la discrétisation du problème à résoudre, la résolution du système matriciel et finalement l'analyse critique des résultats obtenus. L'équipe modélisation du L2EP possède les compétences et les outils pour effectuer des recherche sur ces thèmes.

Après plusieurs années de collaboration fructueuse avec EDF R&D dans le cadre du CNRT (transformé depuis en projet phare MEDEE), l'équipe Modélisation et une partie des chercheurs du groupe Themis de EDF ont créé le LAMEL, un laboratoire commun entre les deux entités de recherche.

#### Code\_Carmel3D

Les travaux menés par l'équipe modélisation sont capitalisés dans Code\_Carmel (Code Avancé de Recherche en Modélisation Électromagnétique). Ce code, basé sur la méthode des éléments finis, permet de modéliser des dispositifs électromagnétiques en basses fréquences. Ainsi, on peut traiter des problèmes de type magnétostatique, électrostatique, électrocinétique et magnétodynamique. Depuis le 1<sup>er</sup> janvier 2006, date de la création du LAMEL, Code\_Carmel3D est co-développé par EDF R&D et L2EP. Dans ce cadre, une réécriture complète a été effectuée.

## **Collaborations locales & internationales**

Mes activités de recherches nécessitant des compétences en mathématiques et informatique, j'ai été amené à établir plusieurs collaborations avec des enseignants-chercheurs de Lille1. Ainsi nous travaillons avec le LIFL (Laboratoire informatique fondamentale de Lille), et notamment avec l'équipe DART dirigée par J-L Dekeyser, pour mettre en place des algorithmes parallèles des résolutions qui permettent d'améliorer les performances du code. Par ailleurs, depuis 2008, nous avons engagé une collaboration avec le Laboratoire Paul Painlevé (E.Creusé de l'équipe analyse numérique et équations aux dérivées partielles) afin de consolider nos compétences en analyse numérique. Actuellement, Zuqi Tang, doctorant au L2EP, travaille dans le cadre de cette collaboration sur les estimateurs d'erreurs en électromagnétique.

Au niveau du génie électrique nous avons établi, suite à un accord CAPES COFE-CUB avec le Brésil, des liens particuliers avec le GRUCAD de l'Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) du Brésil. Dans ce cadre, j'ai effectué deux séjours de deux semaines dans ce laboratoire. Les travaux de recherche menés avec nos collègues brésiliens ont débouché sur une publication en revue et trois communications congrès [RICL 11][CICL 8,10,17]. Suite à cette collaboration, deux thèses en co-tutelle, entre université de Lille 1 et UFSC ont été réalisées dont celle de Bruno Yamamura que j'ai co-encadré. Enfin lors du séjour professeur N.Ida (université de Akron Ohio) en tant que professeur invité à Lille1, nous avons mené des travaux communs sur le comportement électrique de pièces ferromagnétiques corrodées [CICL 32].

## **THÉMATIQUES DE RECHERCHES**

Ma contribution au sein de l'équipe s'est portée sur plusieurs thèmes : la technique d'intégration finie, la prise en compte du mouvement en 3D l'amélioration des méthodes numériques pour résoudre les systèmes matriciels (collaboration avec le LIFL). Récemment, j'ai débuté une nouvelle activité de recherche concernant les estimateurs numériques (collaboration avec le LPP et le LAMAV).

### **La prise en compte du mouvement en 3D (2002-2006)**

Beaucoup de laboratoires ont développé des méthodes de simulation du mouvement mais aucune ne s'est réellement imposée. En effet, aucune de ces techniques ne remplit simultanément les critères que sont la robustesse, la précision, la simplicité de mise en œuvre et la rapidité en temps de calcul. De plus, elles ne peuvent pas s'appliquer à tous les types de déplacement. Certaines approches, comme la bande de mouvement, par exemple, n'est utilisable que dans le cas d'un entrefer constant de machines tournantes ou linéaires. Comme actuellement, il n'existe pas de méthode « universelle » performante, il est nécessaire de définir la meilleure méthode pour une application donnée. Dans le cadre de la thèse de Xiaodong SHI, qui a été soutenue

en décembre 2005, nous avons comparé différentes approches telles que la bande de mouvement, la surface de glissement, l'interpolation nodale "l'overlapping method" et la méthode Mortar afin d'étudier leurs performances et leurs limites d'utilisation. La comparaison entre toutes ces méthodes a été effectuée [RICL 7,10] [CICL 7,9][CNCL 4]. Il ressort de cette étude que la surface de glissement est une restriction de l'interpolation nodale. Cette dernière étant plus performante car elle permet d'effectuer des déplacements indépendants du pas du maillage. Par contre, le bruit numérique est plus important. Afin de diminuer ce bruit nous avons développé une technique d'interpolation d'ordre plus élevé. Quant aux méthodes 'overlapping' et Mortar, elles sont plus performantes en ce qui concerne la qualité de la solution. Mais dans le cas de la technique Mortar demande un temps de calcul plus important. En conclusion, la méthode 'overlapping' semble être la meilleure. Suite à ces travaux, l'équipe de recherche a décidé de développer cette méthode afin de l'appliquer aux problèmes de Contrôle Non Destructif (CND) en collaboration avec EDF et le CEA. La maîtrise des méthodes de prise en compte du mouvement nous a également permis de simuler les excentricités de machines électriques afin d'élaborer des procédures pour identifier ce type de défaut [RICL 18][CICL 15,19,24,34,35]. Enfin, nous avons pu aussi simuler des mouvements plus complexes pour des cas de CND et des machines à double entrefer [RICL 8,12]

## **La FIT (depuis 2002)**

La deuxième thématique de recherche concerne le développement d'un code de calcul basé sur la Technique d'Intégration Finie (Finite Intégration Technique FIT) afin de pouvoir comparer ses performances avec la Méthode des Eléments Finis (MEF). La différence entre ces deux méthodes consiste en leur élaboration. En effet, la FIT repose sur la construction de maillages duaux. Ces deux maillages permettent de respecter les conditions de discrétisation spatiale des grandeurs physiques et des opérateurs vectoriels. On peut ainsi construire huit espaces qui sont les espaces primaux et duaux, des éléments de volumes, de facettes, d'arêtes et nodaux. Il est possible alors de projeter les différentes grandeurs dans les espaces discrets appropriés. Pour passer d'un espace à l'autre, on utilise les matrices d'incidence qui ne sont que les opérateurs gradient, rotationnel et divergence discrétisés. La méthode des éléments finis, est quant à elle, basée sur l'emploi des méthodes de Galerkin et des résidus pondérés. Les maillages primaux et duaux sont sous-jacents mais ne nécessitent pas de construction. Les deux méthodes présentent donc des similitudes. En effet, seules les matrices de masse diffèrent. Cela revient à discrétiser de deux manières différentes les lois de comportement des matériaux. Les premières simulations [RICL 9][RA 1] nous montrent que les précisions fournies par les deux méthodes sont quasi identiques. Toutefois, la FIT qui reste intrinsèquement moins précise nécessite moins d'espace mémoire. Par contre, la construction du maillage dual se révèle assez difficile pour des géométries complexes qui requièrent l'utilisation de tétraèdres ou de prismes (Cell-method) [CICL 12]. Nous avons aussi développé le couplage avec les

équations de circuit [RICL 6]. Pour modéliser le plus grand nombre de systèmes, à l'aide de cette méthode nous avons adapté les outils développés pour la MEF, dans l'environnement du code\_Carmel, à la FIT. Un point fort de la FIT est l'emploi de maillages qui n'épousent pas les frontières des matériaux. Dans ces conditions, la FIT donne toujours des résultats satisfaisants sur les grandeurs globales [RICL 17][CICL 13][CNCL 3, 5][RNCL 1]. Par contre, des erreurs numériques apparaissent sur les grandeurs locales. Un autre intérêt et non des moindres, réside dans le fait qu'elle est plus rapide que la MEF. En effet, l'utilisation d'un maillage hexaédrique permet d'assembler le système matriciel ligne par ligne contrairement à la MEF qui nécessite un assemblage élément par élément, plus coûteux en temps de calcul [RICL 15,16][CICL 18, 20, 37] .

### **Méthodes numériques appliquées à la résolution des équations de Maxwell (depuis 2006)**

Que ce soit la FIT ou la MEF, on obtient un système matriciel à résoudre, généralement symétrique, mais qui peut être non-linéaire ou non-hermitien. Pour répondre aux attentes des utilisateurs de Code\_Carmel, il est nécessaire de modéliser de plus en plus finement les phénomènes électromagnétiques. De ce fait, les systèmes à résoudre sont de plus en plus grands et, malgré la puissance croissante des calculateurs les temps de calculs restent conséquents. Dans ces conditions, plusieurs études sont menées sur la parallélisation des algorithmes ou sur l'emploi d'autres méthodes telles que les solveurs et/ou préconditionneurs multigrilles [RICL 15, 16, 22][CICL 22, 37, 38].

La résolution numérique des équations de Maxwell par éléments finis en tenant compte des incertitudes sur le matériaux conduit selon la méthode choisie à des temps de calcul très long et/ou à des systèmes matriciels très grands [RICL 19] [CICL 23, 26, 39]. Afin de diminuer les temps de constructions des systèmes matriciels, des méthodes d'intégration numérique adaptative ont été développées [RICL23]. Les systèmes matriciels ainsi obtenus ont une structure tensorielle qui permet d'éviter de stocker la matrice à résoudre (gain en espace mémoire). Toutefois pour résoudre ce type de système, il faut employer des préconditionneurs dédiés [CICL 41].

### **Estimateur d'erreurs numériques (depuis 2009)**

Cette thématique n'est pas nouvelle au laboratoire car deux thèses concernant ce sujet ont été soutenues il y a plus de 10 ans. Il s'agit des travaux de F. Marmin et G. Marques que j'ai côtoyé lors de mon doctorat. Ils ont développé des estimateurs erreurs numériques basés sur l'évaluation de la non-vérification de la loi comportement magnétique (appelé aussi relation d'équilibre) après la résolution d'un problème à l'aide des deux formulations. Ces estimateurs sont qualifiés par les mathématiciens d'estimateurs équilibrés. Toutefois ces travaux se sont restreints à la magnétostatique. Depuis 2009, nous avons repris cette activité en collaboration avec E. Creusé

du LPP et S.Nicaise du LAMAV. Dans ce cadre, nous avons appliqué un autre type d'estimateur appelé résiduel aux formulations en potentiels de la magnétostatique et de la magnétodynamique implémentées dans Code\_Carmel3D [RICL 20][CICL 26, 33, 36]. Ces estimateurs s'avèrent bien adaptés pour mettre en œuvre une stratégie de remaillage afin de diminuer l'erreur.

## **PARTENARIAT INDUSTRIEL**

Dans le cadre du laboratoire commun (LAMEL), je suis amené à travailler en étroite collaboration avec le milieu industriel, et notamment avec EDF. Ainsi j'ai participé à débouché sur plusieurs contrats et formations. Les plus marquants sont la participation à hauteur de 50 % au contrat concernant la qualification du code\_Carmel, la prise en compte du phénomène d'hystérésis vectoriel et la modélisation numérique d'un alternateur à vide. Ces trois contrats étaient avec EDF R&D. Par ailleurs, j'ai également participé avec Francis Piriou et Thomas Henneron à la formation (3 séminaires de 1 à 3 selon les pré-requis) de futurs utilisateurs industriels du code\_Carmel (VALEO et EdF R&D).

## LISTES DES ENCRADREMENTS

### Encadrements de thèse

**Xiaodong Shi** (encadrement 50%)

"Contribution à la simulation du mouvement en 3D avec la méthode des éléments finis, appliquée à la modélisation des machines électriques", soutenue de 13 décembre 2005 devant le jury composé de :

Mr. Jean-Louis Coulomb	Président
Mr. Frédéric Bouillault	Rapporteur
Mr. Yvan Lefèvre	Rapporteur
Mr. Jean-Pierre Ducreux	Examineur
Mr. Yvonnick Le Menach	Examineur
Mr. Francis Piriou	Directeur de Thèse

**Publications associées** [RICL 7, 10][CICL 7, 9][CNCL 4]

Actuellement X. Shi travaille à Schneider Electric.

**Julien Korecki** (encadrement 50%)

"Contribution à la modélisation 2D des systèmes électromagnétiques basses fréquence à l'aide de méthode d'intégration finie", soutenue le 15 mai 2009 devant le jury composé de :

Mr. Lionel Pichon	Rapporteur, Président
Mr. Patrick Dular	Rapporteur
Mr. Jean-Pierre Ducreux	Examineur
Mr. Yvonnick Le Menach	Examineur
Mr. Francis Piriou	Directeur de Thèse

**Publications associées** [RICL 15, 16, 17][RNCL 1][CICL 16, 18, 20, 21][CNCL 5]

Actuellement J. Korecki travaille en tant d'ingénieur de recherche au L2EP.

**Bruno Iamamura** (encadrement 40%)

"Contribution à la détection de défauts dans les rotors des turboalternateurs", soutenue le 16 décembre 2011 devant le jury composé de :

Mr. João Pedro Bastos	Président
Mr. Nourredine Takorabet	Rapporteur
Mr. Silvio Nabeta	Rapporteur
Mr. Claude Marchand	Examineur
Mr. Jean Leite	Examineur
Mme Eilin Guillot	Invitée
Mr. Sebastião Nau	Invité
Mr. Yvonnick Le Menach	Examineur
Mr. Abelmounaïm Tounzi	Directeur de thèse
Mr. Nelson Sadowski	Co-Directeur de thèse

**Publications associées [RICL 18][CICL 17, 19, 24, 25, 34, 35]**

Acuellement B.Iamamura travaille en tant d'ingénieur chez EXXELIA.

**Karim Beddek** (encadrement 30%)

"Propagation d'incertitudes dans les modèles éléments finis en électromagnétisme- Application au contrôle non destructif par courants de Foucault" , soutenue le 29 juin 2012 devant le jury composé de :

Mr. Jean-Louis Coulomb	Président
Mr. Olivier Le Maitre	Rapporteur
Mr. Christophe Geuzaine	Rapporteur
Mr. Laurent Krauhnbuhl	Examineur
Mr. Roger Van Keer	Examineur
Mr. Olivier Moreau	Examineur
Mr. Yvonnick Le Menach	Examineur
Mr. Stéphane Clénet	Directeur de thèse

**Publications associées [RICL 19, 23, ][CICL 23, 26, 30, 39, 41]**

Acuellement K.beddek travaille en tant d'ingénieur de recherche à EDR R&D

**Zuqi Tang** (encadrement 25%)

"Estimateurs d'erreur a posteriori résiduels en éléments finis pour la résolution de problèmes d'électromagnétisme en formulations potentielles" soutenance prévue le 29 novembre 2012 devant le jury,

Mr. Jean-Louis Coulomb	Examineur
Mr. Emmanuel Creusé	Co-directeur
Mr. Patrick Dular	Rapporteur
Mr. Yvonnick Le Menach	Examineur
Mr. Olivier Moreau	Invité
Mr. Serge Nicaise	Examineur
Mr. Pacal Omnes	Examineur
Mr. Francis Piriou	Directeur de Thèse
Mme Franceca Rapetti	Rapporteuse

**Publications associées [RICL 20][CICL 29, 31, 33, 36]**

Acuellement Z.tang travaille en tant que post doc au L2EP

**Duc Quang Nguyen** (encadrement 50%) sous la direction de S. Clénet

"Outil d'investigation pour le diagnostic HF des câbles de fortes puissance" soutenance prévue en 2013

**Publication associée [CICL 42]**

### **Encadrement de master**

**Guillaume Parent** (2004)

"Utilisation de la notion de Maillage Dual pour le Calcul de Champ"

**Publication associée [CICL 12]**

**Julien Korecki** (2005)

"Résolution de problèmes de magnétostatique à l'aide des formulations en champs"

**Publications associées [RICL 9][CICL 11]**

**Ning Jing** (2007)

"Solveur Multigrille appliqué à la FIT"

**Duc Quang Nguyen** (2009)

"Méthode de prise en compte du mouvement appliquée à la FIT "

**Zufi Wang** (2010)

"Résolution de très grands systèmes à l'aide de la FIT"

**Publication associée [CICL 31]**

**Antoine Pierquin** (2011)

"Imposition d'un courant uniforme par section dans un conducteur quelconque sous code\_Carmel\_3D"

**Publication associée [CNCL 7]**

**Kien Bui** (2011)

"Application des méthodes d'impédance de surface à la modélisation en contrôle non destructif "

Parmi ces étudiants de masters 6 ont poursuivis leurs études en thèse.



# Bibliographie

## Revue Internationale avec Comité de Lecture

- [RICL 1] "Determination and utilization of the source field in 3D magnetostatic problems", Y. Le Ménach, S. Clénet, F. Piriou, IEEE Trans. Mag., Vol. 34, no 5, pp. 2509-2512, September 1998.
- [RICL 2] "Numerical model to discretize source fields in the 3D finite elements method", Y. Le Ménach, S. Clénet, F. Piriou, IEEE Trans. Mag., Vol. 36, no 4, pp. 676-679, July 2000.
- [RICL 3] "3D computation of a claw pole magnet machine using a scalar potential formulation", Y. Le Ménach, S. Clénet, F. Piriou, J.-F. Létourneau, P. Viarouge, E.P.J. Applied Physics, Vol. 12, no 3, pp. 175-182, 2000.
- [RICL 4] "3D Compatible Potential Formulations Coupled to Electrical Circuits", Y. Le Ménach, S. Clénet, F. Piriou, COMPEL, Vol. 13, no 3, pp. 776-786, 2000.
- [RICL 5] "3D approaches to determine the end winding inductances of a permanent-magnet linear synchronous motor", A. Tounzi, T. Henneron, Y. Le Menach, R. Askour, E. Dumetz, F. Piriou, IEEE Trans. Mag, Vol. 40, no 2, pp. 758-761, March 2004.
- [RICL 6] "Consideration of the coupling of magnetic and electric equations with Finite Integration Technique (F.I.T) ", G. Albertier, Y. Le Menach, J.-P. Ducreux, F. Piriou, E.P.J. Applied Physics, Vol. 30, no 1, pp. 17-22, April 2005.
- [RICL 7] "Comparison of different techniques to model the movement in 3D with FEM", X. Shi, Y. Le Menach, J.-P. Ducreux, F. Piriou, COMPEL, Vol. 25, no 1, pp. 17-30, 2006.
- [RICL 8] "Source field computation in NDT Applications", T. Henneron, Y. Le Menach, F. Piriou, O. Moreau, S. Clénet, J.-P. Ducreux, J.-C. Vérité, IEEE Trans. Mag., Vol. 43, no 4, pp. 1785-1788, April 2007.
- [RICL 9] "Numerical solutions in primal and dual mesh of magnetostatic problem solved with the Finite Integration Technique", J. Korecki, Y. Le Menach, J.-P. Ducreux, F. Piriou, COMPEL, Vol. 27, no 1, pp. 47-55, 2008.
- [RICL 10] "Comparison between the mortar element method and the polynomial interpolation method to model the movement in the Finite Element

- Method", X. Shi, Y. Le Menach, J.-P. Ducreux, F. Piriou, IEEE Trans. Mag., Vol. 44, no 6, pp. 1314-1317, June 2008
- [RICL 11] "Implementation of a Vector Hysteresis Model in 2D Finite Element Analysis : Study of a RSST with Anisotropic Sample", J. V. Leite, A. Benabou, N. Sadowski, Y. Le Menach, S. Clenet, P. A. Da Silva Jr., International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, Vol. 28, no 1-2, pp 41-47, 2008.
- [RICL 12] "Study of an electromagnetic gearbox involving two PM synchronous machines using 3D-FEM", M. Aubertin, A. Tounzi, Y. Le Menach, IEEE Trans. Mag., Vol. 44, Issue 11 Part 2, pp. 4381-4384, November 2008.
- [RICL 13] "A mixed finite element/meshless natural element method for simulating rotative electromagnetic machines", L. Illoul, Y. Le Menach, S. Clénet, F. Chisnesta, E.P.J. Applied Physics, Vol. 43, pp. 197-208, 2008.
- [RICL 14] "Iterative Solvers For Singular Symmetric Linear Systems in Electromagnetism Low Frequency", A. Tinzeft  , Y. Le Menach, F. Piriou, IEEE Trans. Mag., Vol. 45, no 3, pp. 1428-1431, March 2009.
- [RICL 15] "Parallel direct solver for the finite integration technique in electromagnetics", A. Tinzeft  , Y. Le Menach, J. Korecki. F. Piriou, COMPEL, No 4 , Vol. 29, pp. 941-949, 2010.
- [RICL 16] "Parallel direct solver for the Finite Integration Technique in electrokinetic problems", A. Tinzeft  , Y. Le Menach, J. Korecki, F. Guyomarch, F. Piriou, IEEE Trans. Mag., Vol. 46, no. 8, pp. 3269-3272, August 2010.
- [RICL 17] "Hysteresis phenomenon implementation in FIT : Validation with Measurements", J. Korecki, A. Benabou, Y. Le Menach, F. Piriou, J.-P. Ducreux. IEEE Trans. Mag., Vol. 46, no 8, pp. 3285-3288, August 2010.
- [RICL 18] "Study of Static and Dynamic Eccentricities of a Synchronous Generator Using 3D FEM", B. A. T. Iamamura, Y. Le Menach, A. Tounzi, N. Sadowski, E. Guillot, IEEE Trans. Mag., Vol. 46, no 8, pp. 3516-3519, August 2010.
- [RICL 19] "3D stochastic Spectral Finite Element Method in static electromagnetism using vector potential formulation ", K. Beddek, Y. Le Menach, S. Clenet, O. Moreau, IEEE Trans. Mag., Vol. 47, no 5, pp. 1250-1253, May 2011
- [RICL 20] "Residual-based a posteriori estimators for the  $A-\varphi$  magnetodynamic harmonic formulation of the Maxwell system", E. Creusé, S. Nicaise, Z. Tang, Y. Le Menach, N. Nemitz, F. Piriou, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 22, no 5, 1150028 (30 pages), January 2012.
- [RICL 21] "A three dimensional electromagnetic shell finite element for coupled vector-scalar potential formulations", P. Thomas, Y. Le Menach, IEEE Trans. Mag., Vol. 48, no 2, pp. 823-826, February 2012

- [RICL 22] "Automatic multi-GPU code generation applied to simulation of electrical machines", W. Rodrigues, F. Guyomarc'h, Y. Le Menach, J.-L. Dekeyser, IEEE Trans. Mag., Vol. 48, no 2, pp. 831-834, February 2012
- [RICL 23] "Adaptive method for non-intrusive spectral projection-application on a stochastic eddy current NDT problem", K. Beddek, S. Clenet, O. Moreau, V. Costan, Y. Le Menach, A. Benabou, IEEE Trans. Mag., Vol. 48, no 2, pp. 759-762, February 2012.
- [RICL 24] "3D Stochastic Spectral Finite Element Method in static electromagnetism using vector potential formulation", K. Beddek, S. Clénet, O. Moreau, Y. Le Menach, International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, Vol. 39, no 1-4, pp 753-760, 2012.

### **Congrès internationaux avec Comité de Lecture**

- [CICL 1] "Determination and utilization of the source field in 3D magnetostatic problems", Y. Le Ménach, S. Clénet, F. Piriou, Proc., Compumag, Rio, October 1997.
- [CICL 2] "3D compatible Compatible Potential Formulations Coupled to Electrical Circuits", Y. Le Ménach, S. Clénet, F. Piriou, Proc. ,EPNC, Li  ge, September 1998.
- [CICL 3] "Numerical model to discretize source fields in the 3D finite elements method", Y. Le Ménach, S. Clénet, F. Piriou, Proc., Compumag Sapporo, October 1999.
- [CICL 4] "Parallelization of a Fortran 90 program for Electromagnetic Problems with High performance Fortran", E. Cagniot, T. Brandes, J.-L. Dekeyser, F. Piriou, S. Clénet, Y. Le Ménach, G. Marques, 3rd annual HPF user group meeting, Redondo Beach, June 1999.
- [CICL 5] "Error estimation for 3D magnetostatic problems coupled with electrical circuits", G. Marques, Y. Le Ménach, S.Clénet, F.Piriou, Proc., EPNC, Cracovie, September 2000.
- [CICL 6] "3-D approaches to determine the end winding inductances of a permanent-magnet linear synchronous motor", A. Tounzi, T. Henneron, Y. Le Menach, R. Askour, E. Dumetz, F. Piriou Magnetics, Proc., Compumag, Saratoga, July 2003.
- [CICL 7] "Comparison of methods to simulate the movement of electrical machine in the 3D FEM", X.Shi, Y. Le Menach, J.-P. Ducreux, F. Piriou, Proc., Compumag, Shenyang, June 2005
- [CICL 8] "Comparison of 3D formulations for magnetostatics",J.P.A. Bastos, N. Sadowski, F. Piriou, S. Clénet, Y. Le Menach, T. Henneron, Conference on ensayos no destructivos y estructurales, Neuqu  n, Argentina, Novembrer 2005

- [CICL 9] "A hybrid movement method to model electrical machines with end winding in 3D Finite Element Method", X. Shi, Y. Le Menach, J.-P. Ducreux, F. Piriou, Proc., CEFC, Miami, May 2006.
- [CICL 10] "Sparse matrix storage formats and matrix-vector products compared in parallel cluster Computing", M. Fischborn, P. Kuo-Peng, N. Sadowski, J. P. A. Bastos, G. Gavioli, J. Trevisan, D. Dotta, Y. Le Menach, F. Piriou, Proc., EMF, Aussois, June 2006.
- [CICL 11] "Numerical solutions in primal and dual mesh of magnetostatic problem solved with the Finite Integration Technique", J. Korecki, Y. Le Menach, J-P Ducreux, F. Piriou, Proc., EMF Aussois, June 2006.
- [CICL 12] "Study of the coupling between magnetic and electric equations by using FEM, FIT and Cell-method", G. Parent, Y. Le Menach, J.-P. Ducreux, F. Piriou, Proc., EPNC, Maribor, June 2006.
- [CICL 13] "Numerical solutions of Electrokinetic and Magnetostatic problems with imposed Global Quantities Using FEM and FIT", T. Henneron, J. Korecki, Y. Le Menach, S. Clénet, F. Piriou, Proc., CBMAG, July 2006.
- [CICL 14] "Teaching drive control using Energetic Macroscopic Representation - initiation level ", A. Bouscayrol, A. Bruyere, P. Delarue, F. Giraud, B. Lemaire-Semail, Y. Le Menach, W. Lhomme, F. Locment, Proc., EPE, Aalborg, September 2007.
- [CICL 15] "Flux density curves variations using an EF model for turbo-generators diagnostics ", E.Guillot, Y. Le Menach, Y. Guillot, Proc., ICEM, Vilamoura, September 2008.
- [CICL 16] "Analysis of dual formulations for eddy current problem with FIT", J. Korecki, Y. Le Menach, F. Piriou, J-P. Ducreux , Proc., EPNC, Lille, June 2008.
- [CICL 17] "A Tree Construction Technique for the Feecad Electromagnetic 3D System", J. P. A. Bastos, N. Sadowski, J. Müller, B. A. T. Iamamura, Y. Le Menach, F. Piriou, S. Clenet, Proc., Momag, September 2008.
- [CICL 18] "Parallel direct solver for the finite integration technique in electromagnetics", A. Tinzeft, Y. Le Menach, J. Korecki. F. Piriou, ISEF, Arras, September 2009.
- [CICL 19] "Study of static and dynamic eccentricities of a synchronous generator using 3D FEM", B. A. T. Iamamura, Y. Le Menach, A. Tounzi, N. Sadowski, E. Guillot, Proc., Compumag Florianopolis, November 2009.
- [CICL 20] "Parallel direct solver for the Finite Integration Technique in dual formulations", A.Tinzeft, Y. Le Menach, J. Korecki, F. Piriou, Proc., Compumag, Florianopolis, November 2009.
- [CICL 21] "Hysteresis phenomenon implementation in FIT : Validation with measurements", J. Korecki, A. Benabou, Y. Le Menach, F. Piriou, J-P. Ducreux, Proc., Compumag Florianopolis, November 2009.

- [CICL 22] "Parallel Sparse Matrix Solver on the GPU Applied to Simulation of Electrical Machines", W. Rodrigues, F. Guyomarc'h, Y. Le Ménach and J.-L. Dekeyser, Proc., Compumag, Florianopolis, November 2009.
- [CICL 23] "3D Stochastic Spectral Finite Element Method in static electromagnetism using vector potential formulation", K. Beddek, Y. Le Menach, S. Clénet, O. Moreau, Proc., CEFC Chicago, May 2010.
- [CICL 24] "Study of interturn short circuit in rotor windings of a synchronous generator using FEM", B.A.T Iamamura, Y. Le Menach, A. Tounzi, N. Sadowski, E. Guillot, Proc., CEFC, Chicago, May 2010.
- [CICL 25] "Eddy current effects on the steady state operating of a non-salient pole synchronous machine", B.A.T Iamamura, Y. Le Menach, A. Tounzi, N. Sadowski, E. Guillot, T. Jacq, J. Langlet, Proc., ISEM, Naples, May 2011.
- [CICL 26] "Stochastic Spectral Finite Element Method for solving 3D stochastic eddy current problems", K. Beddek, S. Clénet, Y. Le Menach, O. Moreau, Proc., ISEM, Naples, May 2011.
- [CICL 27] "A Three Dimensional Electromagnetic Shell Finite Element for Coupled Vector-Scalar Potential Formulations", P. Thomas, Y. Le Menach, Proc., Compumag, Sydney, July 2011.
- [CICL 28] "Automatic multi-GPU code generation applied to simulation of electrical machines", W. Rodrigues, F. Guyomarc'h, Y. Le Menach, J.-L. Dekeyser, Proc. Compumag, Sydney, July 2011.
- [CICL 29] "Comparison of residual and equilibrated error estimators for FEM applied to magnetostatic problems", Z. Tang, Y. Le Menach, E. Creusé, S. Nicaise, F. Piriou, N. Nemitz, Proc., Compumag, Sydney, July 2011.
- [CICL 30] "Adaptive method for non-intrusive spectral projection-application on a stochastic eddy current NDT problem", K. Beddek, S. Clénet, O. Moreau, V. Costan, Y. Le Menach, A. Benabou, Proc., Compumag, Sydney, July 2011.
- [CICL 31] "A time-domain implicit-schema direct solver : Application to Finite Integration solution", Z. Wang, Y. Le Menach, Z. Tang, J. Korecki, T. Henneron, Proc., ISEF, Funchal, September 2011.
- [CICL 32] "A Nonlinear Model for AC Induced Corrosion", N. Ida, Y. Le Menach, X. Shan, J. H. Payer, Proc., AES, Paris, April 2012.
- [CICL 33] "A Posteriori error estimateur for harmonic A- $\varphi$  formulation", Z. Tang, Y. Le Menach, E. Creusé, S. Nicaise, F. Piriou, N. Nemitz, Proc., EPNC, Pula, June 2012.
- [CICL 34] "Damper bars influence on the synchronous machine steady state operating", B. Iamamura, Y. Le Menach, A. Tounzi, N. Sadowski, E. Guillot, T. Jacq, J. Langlet, Proc., Momag, Joao Pessoa-Paraiba, August 2012.

- [CICL 35] "Study of Synchronous Generator Static Eccentricities - FEM Results and Measurements", B.A.T. Iamamura, Y. Le Menach, A. Tounzi, N. Sadowski, E. Guillot, T. Jacq, J. Langlet, Proc., ICEM, Marseille, September 2012.
- [CICL 36] "Residual based a posteriori error estimator for harmonic A-phi and T-omega formulation in eddy current problems", Z. Tang, Y. Le Menach, E. Creusé, S. Nicaise, F. Piriou, N. Nemitz, Proc., CEFC, Oita, November 2012.
- [CICL 37] "A new preconditioner based on the F.I.T to solve F.E.M problems", A. Tinzeft, Y. Le Menach, F. Guyomarc'h, Proc., CEFC, Oita, November 2012.
- [CICL 38] "Test Harness on a Preconditioned Conjugate Gradient Solver on GPUs : An Efficiency Analysis", W. Rogrigues, L. Chevallier, Y. Le Menach, F. Guyomarc'h, Proc., CEFC, Oita, November 2012.
- [CICL 39] "Stochastic Non Destructive Testing simulation : sensitivity analysis applied to material properties for Tube Support Plate clogging in nuclear power plant steam generator", O. Moreau, K. Beddek, S. Clénet, Y. Le Menach, Proc., CEFC, Oita, November 2012.
- [CICL 40] "An arbitrary thick shell finite element for eddy currents dual vector scalar potential formulations", P. Thomas, Y. Le Menach, Proc., CEFC, Oita, November 2012.
- [CICL 41] "Solution of Large Stochastic Finite Element Problems : Application to ECT NDT", K. Beddek, S. Clénet, O. Moreau, Y. Le Menach, Proc., CEFC, Oita, November 2012.
- [CICL 42] "Impedance Determination in Frequency Domain for Energy Cables by FEM and TLM", Q. Nguyen-Duc, Y. Le Menach, S. Clénet, D. Vizireanu, V. Costan, Proc., INDEL, Banja Luka, November 2012.

## **Revues Nationales avec Comité de Lecture**

- [RNCL 1] "Imposition des grandeurs globales en électrocinétique : Application à la technique d'intégration finie", J. Korecki, Y. Le Menach, J.-C. Vérité, F. Piriou, RIGE 2007

## **Congrès Nationaux avec Comité de Lecture**

- [CNCL 1] "Influence du champ source dans la formulation en potentiel scalaire ", Y. Le Ménach, S. Clénet, F. Piriou, Numelec, Lyon, Mars 1997.
- [CNCL 2] "Etude et numérique d'une machine à griffes à aimants permanents", Y. Le Ménach, S. Clénet, F. Piriou, J.-F. Létourneau, P. Viarouge, J. Cros, EF 99, Lille, Mars 1999.

- [CNCL 3] "Prise en compte du couplage des équations magnétiques et électriques avec la Méthode d'Intégration Finie (F.I.T.)", G. Albertier, Y. Le Menach, J.-P. Ducreux, F. Piriou, Numelec, Toulouse, octobre 2003.
- [CNCL 4] "Comparaison de Méthodes de Simulation du mouvement dans le cas d'une surface de glissement", X. Shi, Y. Le Menach, J.-P. Ducreux, F. Piriou, Numelec, Lille, Décembre 2006.
- [CNCL 5] "Utilisation de la technique d'intégration finie pour la modélisation de système magnétodynamique" J. Korecki, Y. Le Menach, J.-P. Ducreux, Numelec, Liège, Décembre 2008.
- [CNCL 6] "Modélisation de l'assemblage d'une matrice issue de la méthode des éléments finis", J. Taillard, F. Guyomarc'h, Y. Le Menach, F. Piriou, J.-L. Dekeyser, Numelec, Liège, Décembre 2008.
- [CNCL 7] "Imposition d'une densité de courant uniforme dans un conducteur", A. Pierquin, Y. Le Menach, J.Y. Roger, L. Chevallier, Numelec, Marseille, Juin 2012.

### **Articles de vulgarisation**

- [RN 1] "Les techniques de prise en compte du mouvement des machines tournantes", Y. Le Menach, J.-P. Ducreux, REE n°11 2006.
- [RN 2] "La technique d'intégration finie", Y. Le Menach, J.-P. Ducreux, REE n°11, 2006.

### **Autres publications**

- [RI 2] "Coupling of magnetic and electrical circuit equations using coil shape functions", Y. Le Menach, S. Clénet, F. Piriou, International Journal of Theoretical Electrotechnics, pp. 36-39, March 1999.
- [RI 2] "The field-circuit analysis of the start-up operation of the brushless DC motor", L. Knypinski, L. Nowak, K. Radziuk, Y. Le Menach, Computer Applications in electrical Engineering, pp. 93-104, 2010.

### **Rapport interne**

- [RA 1] "La technique d'intégration finie", Y. Le Menach, F. Piriou
- [RA 2] "Etude préliminaire en vue de l'implantation de l'hystérésis vectoriel dans Code\_Carmel", Y. Le Menach

## **Part II.**

### **Synthèse de mes recherches**



# Introduction générale

Actuellement, la modélisation numérique fine des phénomènes électromagnétiques en basse fréquence est fortement employée pour étudier des dispositifs électrotechniques en vue de la conception ou d'un diagnostic suite à un défaut. Ces études, basées sur des modèles numériques, visent à perfectionner les machines électriques afin d'obtenir quelques dixièmes de point de rendement supplémentaire. D'autres études se concentrent sur la compréhension fine du comportement local d'une machine (suite à un défaut). Toutefois malgré les efforts de recherche les modèles numériques dont nous disposons sont soumis à des hypothèses simplificatrices qui dans certains études peuvent affecter la pertinence des résultats obtenus. Dans ces conditions, l'amélioration de la modélisation numérique des systèmes électrotechniques est un enjeu majeur. Cette amélioration passe par une meilleure qualité de la caractérisation et la modélisation des matériaux et une discrétisation adaptée au problème traité. Associé à ces facteurs, il est nécessaire d'accroître la rapidité des solveurs afin de pouvoir traiter de grands problèmes issus d'une discrétisation très fine. Outre le fait d'améliorer la modélisation numérique, il est aussi intéressant de contrôler la qualité de la solution via des estimateurs d'erreurs numériques.

Ces travaux de synthèse abordent les différents thèmes qui permettent d'améliorer la modélisation numérique. Ce travaux ont été majoritairement effectués au L2EP depuis ma nomination en tant que Maître de Conférences en 2002.

Dans un premier temps le modèle mathématique à résoudre sera présenté. Les formulations en potentiels de l'électrocinétique, de la magnétostatique et la magnétodynamique seront développées ainsi que la modélisation des grandeurs globales.

Le chapitre suivant sera dédié aux méthodes de discrétisation. La méthode des éléments finis, la technique d'intégration finie et la cell-method seront étudiées et comparées en terme de qualité de la solution, de mise en œuvre et de rapidité.

Le troisième chapitre, concernant les outils de calcul, se découpe en deux grandes parties: les méthodes de prise en compte du mouvement et les estimateurs d'erreur numérique. Plusieurs méthodes de prise en compte du mouvement sont aussi comparées dans des termes équivalents à ceux proposés pour les méthodes de discrétisation. Néanmoins, des améliorations aux méthodes existantes sont proposées. L'étude concernant des estimateurs d'erreur numérique traite de l'application de ces derniers aux formulations en potentiels de la magnétostatique et de la magnétodynamique. Dans le cas le magnétostatique une comparaison avec les estimateurs d'erreur équilibrés est effectuée.

Enfin le dernier chapitre traite la résolution numérique de système matriciel. Plusieurs types méthodes résolutions sont abordées. Dans le cas de la FIT, la parallélisation d'une méthode résolution directe est proposée. Afin d'accélérer les méthodes de Krylov pour résoudre un problème éléments finis nous avons développé un préconditionneur basé sur une matrice issue de la FIT.

# 1. Problème à résoudre

## 1.1. Définition d'un problème en basse fréquence

Un problème électromagnétique en basse fréquence autrement dit un problème “électrotechnique” comporte des domaines où sont présents des sources électriques et/ou magnétiques (inducteur), et des domaines où des champs sont induits. Les ingénieurs, désirent souvent connaître les grandeurs globales en sortie de leur système en fonction de grandeurs globales qu’ils ont imposées. Depuis 1850, l’ingénieur s’est appuyé sur des modèles analytiques à quelques équations et sur son “sens” physique pour concevoir des dispositifs. Bien que ce bon sens physique puisse suffire dans de nombreux cas, il s’avère dépassé quand les problèmes sont non-linéaires et/ou couplés, etc... Pour parer cela, il peut avoir recours à résolution des équations établies par J.C Maxwell dans les années 1860. Depuis les années 70, il est possible de résoudre numériquement ces équations en utilisant des calculateurs de plus en plus puissants avec le temps. Toutefois, il a fallu attendre les années 80 pour que des cas industriels soit enfin traités en 2D. En 3D, les premiers cas industriels ont été traités au milieu des années 90.

Dans ce chapitre seront présentés les équations de Maxwell ainsi que les formulations utilisées en basses fréquences qui en découlent. Nous verrons aussi comment introduire les grandeurs globales à partir des grandeurs locales.

### 1.1.1. Équations de Maxwell

Pour modéliser finement les dispositifs électrotechniques, nous devons résoudre les équations aux dérivées partielles que J.C. Maxwell a établies à partir des travaux de A. Ampère et M. Faraday. Ces équations permettent d’établir un lien entre les grandeurs électriques et magnétiques et qui sont :

L’équation de Maxwell-Ampère

$$\mathbf{rotH} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.1)$$

et l’équation de Maxwell-Faraday

$$\mathbf{rotE} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

avec :

**H** champ magnétique ( $A/m$ )

**E** champ électrique ( $V/m$ )

**J** densité de courant magnétique ( $A/m^2$ )

**D** déplacement de courant électrique ( $G/m$ )

**B** induction magnétique ( $T$ )

A ces équations, pour compléter le modèle, il est nécessaire d'associer les lois conservatives telles que :

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \tag{1.3}$$

$$\text{div} \mathbf{J} = 0 \tag{1.4}$$

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho \tag{1.5}$$

avec  $\rho$  la densité de charges en Coulomb

En basse fréquence, l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS) peut être appliquée. Cela revient à négliger le terme  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  qui représente la variation des déplacements de courant par rapport au temps [Rodriguez05, Rodriguez10]. Par conséquent, le système des équations de Maxwell se réduit aux équations de la magnétodynamique.

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \mathbf{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{cases} \tag{1.6}$$

Aux équations de Maxwell, qui de part leur exactitude P.G de Gennes à qualifier d' "équations d'une pureté de diamant" [DeGennes94], il faut ajouter les lois de comportement qui vont être présentées par la suite.

### 1.1.2. Les lois de comportement

Contrairement aux équations de Maxwell, les lois de comportement prennent en compte les matériaux et permettent d'établir un lien entre, d'une part, les grandeurs magnétiques et, d'autre part, les grandeurs électriques. Elles peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$\mathbf{B} = f(\mathbf{H}) \quad (1.7)$$

$$\mathbf{J} = f(\mathbf{E}) \quad (1.8)$$

#### 1.1.2.1. La loi de comportement magnétique

Pour les matériaux qui ne sont pas ferromagnétiques (dia ou paramagnétique), une loi linéaire de type  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  avec  $\mu$  la perméabilité magnétique décrit assez bien le comportement des matériaux pour les applications visées en électrotechnique. La valeur de la perméabilité est généralement proche de celle du vide et on a :

$$f(\mathbf{H}) = \mu_0\mathbf{H}$$

Dans le cas des matériaux ferromagnétiques durs (aimants permanents) on ne représente souvent qu'une partie de la loi de comportement (droite de recul) et on a :

$$f(\mathbf{H}) = \mathbf{B}_r + \mu_0\mu_r\mathbf{H}$$

où  $\mathbf{B}_r$  représente l'induction rémanente ( $T$ ) et  $\mu_r$  la perméabilité relative qui, pour ces matériaux, est proche de l'unité.

Enfin, pour les matériaux ferromagnétiques doux, des modèles plurivoques peuvent être utilisés pour représenter le phénomène d'hystérésis tels que ceux de Jiles-Atherton ou Preisach. Toutefois, il est possible de négliger le phénomène d'hystérésis et de ne prendre en compte que le phénomène de saturation. La loi devient alors univoque et s'écrit sous la forme :

$$f(\mathbf{H}) = \mu(\|\mathbf{H}\|)\mathbf{H}$$

La perméabilité dépend alors de  $\mathbf{H}$ . L'anisotropie peut aussi être prise en compte en utilisant une perméabilité tensorielle.

Il faut noter que la qualité de la caractérisation du comportement magnétique des matériaux et les lois de comportement choisies conditionnent la qualité de la modélisation des phénomènes électromagnétiques.

### 1.1.2.2. La loi de comportement électrique (loi d'Ohm)

Dans le cas des conducteurs classiques, la loi de comportement électrique (Équation 1.8) est souvent linéaire et on a alors :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

avec  $\sigma$  la conductivité électrique ( $S/m$ ).

Par contre, dans les semi-conducteurs, cette loi peut être non linéaire. De plus, la conductivité dépend fortement de la température. Certaines simulations, notamment celles destinées à l'amélioration des rendements des systèmes électrotechniques, nécessitent de prendre en compte cet effet. Dans ce cas, il faut déterminer la répartition des températures dans les conducteurs. Une modélisation multiphysique est alors nécessaire en couplant un modèle électromagnétique et un modèle thermique.

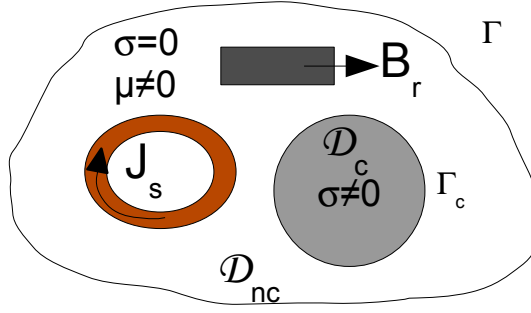
### 1.1.3. Domaine hétérogène et interfaces entre les milieux

Si les problèmes à résoudre comportent uniquement des milieux homogènes et isotropes ; la distribution de champs sera régulière et la résolution des équations de la magnétodynamique (Équation 1.6) ne présentera pas de difficultés majeures. Une étude analytique sera possible. Les difficultés commencent quand les milieux sont hétérogènes, la distribution des champs devient alors irrégulière. L'étude analytique est hors de portée et le recours aux méthodes numériques devient indispensable et nécessitant par conséquent la maîtrise de l'erreur numérique.

La transition des champs aux interfaces entre les milieux doit respecter les équations de la magnétodynamique (Équation 1.6). Les composantes tangentielles de  $\mathbf{H}$  et de  $\mathbf{E}$  et les composantes normales de  $\mathbf{B}$  et de  $\mathbf{J}$  sont conservées aux interfaces entre les milieux. Nous verrons plus tard que toutes ces conditions ne pourront pas être simultanément satisfaites numériquement.

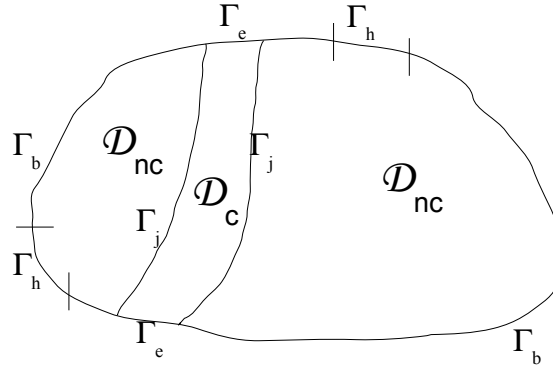
### 1.1.4. Les conditions aux limites

En pratique, l'espace est souvent tronqué et, de ce fait, borné. Il existe plusieurs façons de tronquer l'espace. La plus simple est de placer artificiellement la frontière suffisamment loin des parties actives. Dans ce cas, au delà de l'espace d'étude, les champs peuvent être considérés comme nuls. Il en résulte que la condition aux limites sur l'induction magnétique doit être  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma_b}$ . On peut aussi appliquer des conditions aux limites particulières qui permettent de prendre en compte l'infini [Bossavit82, Salon85, Meunier86]. Il est également possible d'imposer la condition  $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma_h}$  si des conditions de symétrie existent ou si des termes sources sont



**Figure 1.1.:** Domaine d'étude

imposés sur la frontière. Les conditions aux limites des milieux conducteurs sont de même nature. Naturellement on a  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$   $|\Gamma_j$  avec  $\Gamma_j$  représentant l'enveloppe complète du domaine conducteur. Néanmoins, dans bien des cas, ce domaine est aussi tronqué et on peut avoir  $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$   $|\Gamma_e$ . La surface  $\Gamma_e$  représente soit une condition de symétrie soit une surface équipotentielle sur laquelle est imposée une tension.



**Figure 1.2.:** Exemple de domaine d'étude avec différentes conditions aux limites

Tout comme pour les conservations des composantes des champs, il ne sera pas possible d'assurer exactement toutes les conditions aux limites simultanément avec les méthodes numériques.

## 1.2. Formulations

Comme nous l'avons signalé précédemment, les équations de la magnétodynamique sont, en général, impossibles à résoudre analytiquement. Mais, avant de traiter le cas de la magnétodynamique, nous allons présenter les problèmes de l'électrocinétique

et la magnétostatique afin d'introduire les différents potentiels. Des formulations vont être développées [Meunier02, Bastos03] en considérant toutes les lois de comportement linéaires. L'électrostatique ne sera pas traitée dans ce rapport mais ses formulations se rapprochent fortement de celles présentées dans les cas statiques (électrocinétique et magnétostatique).

### 1.2.1. Formulations de l'électrocinétique

Dans ce cas, le domaine d'étude est limité au domaine conducteur  $\mathcal{D}_c$  simplement connexe. Seules les grandeurs électriques sont considérées, comme le champ électrique et la densité de courant électrique. On néglige le terme  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  qui représente la variation de l'induction magnétique par rapport au temps. On doit alors résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{div} \mathbf{J} &= 0 \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} \end{cases} \quad (1.9)$$

A ce système, il faut ajouter des conditions aux limites introduites aux paragraphes précédents :

$$\begin{cases} \mathbf{E} \times \mathbf{n} &= 0 \mid_{\Gamma_e} \\ \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} &= 0 \mid_{\Gamma_j} \\ \Gamma_c &= \Gamma_j \cup \Gamma_e \end{cases} \quad (1.10)$$

#### 1.2.1.1. Formulation en potentiel scalaire électrique

Généralement, pour résoudre le système (Équation 1.9), on introduit le potentiel scalaire électrique  $\varphi$  à partir de  $\mathbf{rot} \mathbf{E} = 0$  tel que

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} \varphi \quad (1.11)$$

On peut alors réduire le système (Équation 1.9) à une seule équation :

$$\mathbf{div}(-\sigma \mathbf{grad} \varphi) = 0 \quad (1.12)$$

Cette équation représente la formulation en potentiel scalaire électrique. Les conditions aux limites sont portées par les valeurs des potentiels sur la frontière du domaine. Il est possible d'imposer une surface équipotentielle  $\varphi = cte \mid_{\Gamma_e}$  qui traduira



la condition  $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma_e}$ . On définit un potentiel  $\varphi_s$  tel que son gradient vérifie les conditions limites sur  $\Gamma_e$ . On introduit alors le potentiel scalaire inconnu  $\varphi_i$  tel que  $\varphi = \varphi_i + \varphi_s$ .  $\varphi_i$  possède alors des conditions aux limites homogènes sur  $\Gamma_e$ . De ce fait, la formulation (Équation 1.12) prend la forme suivante :

$$\text{div}(-\sigma \mathbf{grad}(\varphi_i + \varphi_s)) = 0 \quad (1.13)$$

L'Équation 1.13 présente une solution unique mais ce n'est pas le cas de l'Équation 1.12. Pour assurer l'unicité de la solution de cette équation, on peut soit fixer une valeur du potentiel en un point, soit fixer la valeur moyenne des potentiels scalaires sur l'ensemble du domaine.

### 1.2.1.2. Formulation en potentiel vecteur électrique

Moins courante, la formulation en potentiel vecteur électrique peut être établie. Pour cela, on introduit le potentiel vecteur électrique  $\mathbf{T}$  sachant que  $\text{div} \mathbf{J} = 0$  tel que :

$$\mathbf{rot} \mathbf{T} = \mathbf{J} \quad (1.14)$$

Dans ce cas, le système Équation 1.9 devient :

$$\mathbf{rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} = 0 \quad (1.15)$$

Ici aussi, les conditions aux limites sont portées par les potentiels. La condition  $\mathbf{T} \times \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma_j}$  entraîne  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma_j}$ . La condition  $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma_e}$  est assurée par la condition  $\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T} \times \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma_j}$ . Comme il a été dit précédemment, la formulation en potentiel scalaire est plus couramment utilisée que la formulation en potentiel vecteur car l'Équation 1.12 a la forme d'un Laplacien, plus facile à résoudre numériquement que les équations de type "rot rot" qui nécessitent la mise en œuvre d'une jauge [Ren96, Kettunen99] car la solution n'est pas unique.

### 1.2.2. Formulations de la magnétostatique

Dans ce cas, le domaine d'étude est limité au domaine non-conducteur  $\mathcal{D}_{nc}$ . On considère un domaine non conducteur si aucune densité de courant n'y est induite. Dans ce cas, la loi de comportement électrique n'est pas prise en compte. Toutefois une densité de courant électrique (non induite), appelée  $\mathbf{J}_s$ , peut être connue et imposée dans une partie du domaine. Les matériaux magnétiques sont considérés

linéaires et doux. Seules les grandeurs magnétiques sont recherchées : soit le champ et l'induction magnétiques. Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{rot}\mathbf{H} &= \mathbf{J}_s \\ \mathbf{div}\mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{B} &= \mu\mathbf{H} \end{cases} \quad (1.16)$$

A ce système sont associées les conditions limites suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{H} \times \mathbf{n} &= 0 \mid_{\Gamma_h} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} &= 0 \mid_{\Gamma_b} \\ \Gamma &= \Gamma_b \cup \Gamma_h \end{cases} \quad (1.17)$$

Pour résoudre ce système, on peut rechercher soit le champ magnétique ou l'induction magnétique ou avoir recours aux potentiels vecteur et scalaire magnétiques appelés respectivement  $\mathbf{A}$  et  $\Omega$ .

### 1.2.2.1. La formulation en potentiel vecteur magnétique

Tout comme la formulation en potentiel vecteur  $\mathbf{T}$  il est possible d'introduire un potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$ , sachant que  $\mathbf{div}\mathbf{B} = 0$ , tel que :

$$\mathbf{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (1.18)$$

Le système 1.15 se réduit à :

$$\mathbf{rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot}\mathbf{A} = \mathbf{J}_s \quad (1.19)$$

Les conditions aux limites sont traitées de la même façon que la formulation en potentiel vecteur électrique. Dans ce cas aussi, la formulation en  $\mathbf{A}$  présente un problème de jauge.

Contrairement à l'électrocinétique, la formulation en potentiel vecteur est la plus usuelle surtout en 2D. En effet, le potentiel vecteur est alors défini suivant une seule direction  $\vec{z}$  et perd, de ce fait, son caractère vectoriel. Les équipotentiels de  $\mathbf{A}$  représente alors les lignes de champs. Dans ces conditions, la formulation de type 'rot rot' se transforme en un laplacien.

### 1.2.2.2. La formulation en potentiel scalaire magnétique

Avant de définir le potentiel scalaire magnétique, il convient d'introduire un champ source  $\mathbf{H}_s$  tel que :

$$\mathbf{rot}\mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s \quad (1.20)$$

avec  $\mathbf{H}_s \times \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma_h}$

L'équation de Maxwell-Ampère devient  $\mathbf{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_s) = 0$  à partir de laquelle le potentiel scalaire peut être introduit comme suit car le domaine  $\mathcal{D}_{nc}$  est supposé simplement connexe :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s - \mathbf{grad}\Omega \quad (1.21)$$

A partir du système 1.15, on obtient alors la formulation en potentiel scalaire

$$\mathit{div}(\mu \mathbf{grad}\Omega) = \mathit{div}(\mu \mathbf{H}_s) \quad (1.22)$$

Le potentiel scalaire magnétique a le même comportement devant les conditions aux limites que le potentiel scalaire électrique.

Cette formulation présente peu d'intérêt en 2D mais devient très attrayante en 3D car contrairement à la formulation en  $\mathbf{A}$  elle conduit toujours à un laplacien à résoudre. Néanmoins, il faudra préalablement déterminer le champs source  $\mathbf{H}_s$ .

### 1.2.2.3. Formulation en champ $\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}$

Il est possible de résoudre directement en champs  $\mathbf{B}$  ou  $\mathbf{H}$  en plaçant la loi de comportement soit dans  $\mathit{div}\mathbf{B} = 0$  soit dans  $\mathbf{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}_s$ . On obtient respectivement les formulations en champs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  qui restent peu employées. Soit :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{rot}\mathbf{H} & = & \mathbf{J}_s \\ \mathit{div}\mu\mathbf{H} & = & 0 \\ \mathbf{H} \times \mathbf{n} & = & 0 \mid_{\Gamma_h} \\ \mu\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} & = & 0 \mid_{\Gamma_b} \end{array} \right. \quad (1.23)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{rot}\frac{\mathbf{B}}{\mu} & = & \mathbf{J}_s \\ \mathit{div}\mathbf{B} & = & 0 \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} & = & 0 \mid_{\Gamma_b} \\ \frac{\mathbf{B}}{\mu} \times \mathbf{n} & = & 0 \mid_{\Gamma_h} \end{array} \right. \quad (1.24)$$

Nous verrons plus tard une application de ces formulations.

### 1.2.3. Formulations de la magnétodynamique

Prenons uniquement le domaine conducteur  $\mathcal{D}_c$ , mais contrairement au cas de la l'électrocinétique, un problème magnétodynamique est régi par le système de Maxwell restreint à l'ARQS (Équation 1.6) auquel sont ajoutées les lois de comportement magnétique et électrique.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{rot} \mathbf{H} & = & \mathbf{J} \\ \mathbf{rot} \mathbf{E} & = & -\partial_t \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & = & \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} & = & \sigma \mathbf{E} \end{array} \right. \quad (1.25)$$

Pour résoudre le problème (Équation 1.25), deux possibilités sont offertes : soit on garde les champs, soit on utilise les potentiels introduits précédemment dans les cas des formulations statiques. Il en résulte que 4 formulations peuvent être extraites [Bossavit93, Rodriguez10, Meunier02]. Il est à noter que l'écriture 'simplifiée' des formulations présentées dans le tableau ci-dessous sont valables uniquement dans domaine conducteur  $\mathcal{D}_c$  dépourvu de densité de courant imposée.

$\mathbf{H}$	$\mathbf{rot} \sigma^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{H} + \mu \partial_t \mathbf{H} = 0$
$\mathbf{T} - \Omega$	$\mathbf{rot} \sigma^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{T} + \mu \partial_t (\mathbf{T} - \mathbf{grad} \Omega) = 0$
$\mathbf{E}$	$\mathbf{rot} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E} + \sigma \partial_t \mathbf{E} = 0$
$\mathbf{A} - \varphi$	$\mathbf{rot} \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{A} + \sigma (\partial_t \mathbf{A} - \mathbf{grad} \varphi) = 0$

**Table 1.1.:** Les formulations de la magnétodynamique

Les deux premières formulations en  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{T} - \Omega$  sont qualifiées de formulation 'Magnétique' et les deux suivantes  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{A} - \varphi$  d' 'Electrique'. D'autres formulations existent comme la formulation en potentiel vecteur modifiée  $\mathbf{A}^*$  qui, on le rappelle, vaut  $\mathbf{A}^* = -\int_t \mathbf{E} dt$ , et qui est proche de la formulation en champ  $\mathbf{E}$ . On trouve aussi la formulation en potentiel  $\mathbf{A} - \chi$  qui présente, d'après [Specogna05] un meilleur comportement numérique que la formulation  $\mathbf{A} - \varphi$ .

Traitons maintenant les conditions aux limites du domaine  $\mathcal{D}_c$ . Dans ce cas, où il n'existe pas de domaine non-conducteur, les conditions aux limites des grandeurs

magnétiques sont alors ramenées sur la frontière du domaine conducteur.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{E} \times \mathbf{n} & = & 0 \mid_{\Gamma_e} \\ \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} & = & 0 \mid_{\Gamma_j} \\ \Gamma_c & = & \Gamma_j \cup \Gamma_e \\ \mathbf{H} \times \mathbf{n} & = & 0 \mid_{\Gamma_h} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} & = & 0 \mid_{\Gamma_b} \\ \Gamma_c & = & \Gamma_b \cup \Gamma_h \end{array} \right. \quad (1.26)$$

Toutefois il est à noter que le système de Maxwell restreint à l'ARQS (Équation 1.6) implique que les conditions aux limites  $\mathbf{H} \times \mathbf{n}$  sur  $\Gamma_h$  et  $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_e$  entraînent respectivement  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$  sur  $\Gamma_h$  et  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_e$ . L'inverse n'est, par contre, pas vérifié.

Une synthèse des conditions aux limites sur les champs et les potentiels est proposée dans le Tableau 1.2.

<b>H</b>	$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma_h} \\ \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma_b} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \sigma^{-1} \text{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma_e} \\ \text{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma_j} \end{array} \right.$
<b>T</b> - $\Omega$	$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = cte \mid_{\Gamma_h} \\ \mu (\mathbf{T} - \text{grad} \Omega) \cdot \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma_b} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \sigma^{-1} \text{rot} \mathbf{T} \times \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma_e} \\ \mathbf{T} \times \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma_j} \end{array} \right.$
<b>E</b>	$\left\{ \begin{array}{l} \mu^{-1} \text{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma_h} \\ \text{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma_b} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma_e} \\ \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma_j} \end{array} \right.$
<b>A</b> - $\varphi$	$\left\{ \begin{array}{l} \mu^{-1} \text{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma_h} \\ \mathbf{A} \times \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma_b} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \varphi = cte \mid_{\Gamma_e} \\ \sigma (\mathbf{A} - \text{grad} \varphi) \cdot \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma_j} \end{array} \right.$

**Table 1.2.:** Conditions aux limites associées aux formulations

Nous verrons, par la suite, qu'il n'est pas possible d'assurer simultanément et fortement toutes ces conditions aux limites. Par ailleurs, il est à noter que les formulations  $\mathbf{A} - \varphi$  et  $\mathbf{T} - \Omega$  présentent un problème de jauge. Dans le cas où seul le domaine  $\mathcal{D}_c$  est considéré, les formulations en champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  paraissent mieux appropriées et plus simples à mettre en œuvre.

#### 1.2.4. Cas général

On considère maintenant un domaine  $\mathcal{D}$  qui comprend des parties non conductrices  $\mathcal{D}_{nc}$  et des parties conductrices  $\mathcal{D}_c$ . Il est nécessaire d'assurer la continuité de certaines composantes sur l'interface  $\Gamma_c$  entre  $\mathcal{D}_{nc}$  et  $\mathcal{D}_c$ . Dans le cas de l'ARQS ( $\frac{\partial D}{\partial t} = 0$ ),

le champ électrique  $\mathbf{E}$  n'est défini uniquement que dans  $\mathcal{D}_c$ . Dans ces conditions, les domaines  $\mathcal{D}_{nc}$  et  $\mathcal{D}_c$  sont respectivement régis par les équations de la magnétostatique et la magnétodynamique.

Dans ce cas, les formulations en potentiels sont mieux armées car les potentiels magnétiques existent dans tout le domaine  $\mathcal{D}$ . Ce sont les potentiels qui vont assurer la continuité des composantes des champs. Par ailleurs, la formulation en  $\mathbf{H}$  peut être couplée assez facilement avec la formulation en  $\Omega$ . Toutefois, il ne faut pas négliger le coût de mise en œuvre. Par contre, le couplage de la formulation  $\mathbf{E}$  avec une formulation de la magnétostatique est délicate car, comme cela vient d'être précisé, le champ électrique  $\mathbf{E}$  n'est défini uniquement que dans  $\mathcal{D}_c$ . Quant à la formulation  $\mathbf{A}^*$ , issue de la formulation en  $\mathbf{E}$ , elle est exploitable dans les domaines  $\mathcal{D}_{nc}$  et  $\mathcal{D}_c$ . De plus, elle est simple à mettre en œuvre.

### 1.2.5. Les espaces fonctionnelles

Dans les paragraphes précédents, toutes les grandeurs ont été introduites pour transcrire mathématiquement les phénomènes électromagnétiques observés en basses fréquences. Il en résulte que les équations employées sont des équations aux dérivées partielles dont la manipulation demande des précautions. Le premier constat, de par la complexité des problèmes à résoudre, est qu'il n'est pas possible de résoudre directement ces équations dans  $\mathbb{R}^3$ . Nous allons chercher une solution faible dans un espace fonctionnel plus large. Pour cela, il est nécessaire d'intégrer les équations ou les grandeurs. Les formulations s'écrivent alors sous une forme variationnelle appelée aussi forme faible.

#### 1.2.5.1. Définitions

Avant de résoudre ces formulations faibles, il convient d'exposer, même succinctement, les espaces mathématiques où vivent ces grandeurs recherchées [Costabel]. Tout d'abord,  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ , et soit  $L^2(\mathcal{D})$  l'espace fonctionnel des champs de carré intégrale sur  $\mathcal{D}$ . Dans ce cas, les champs de vecteur  $\mathbf{H}, \mathbf{B}, \mathbf{J}, \mathbf{E} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{D})$ . Des sous espaces fonctionnels plus réguliers, du fait que l'énergie soit finie, peuvent être introduits en ajoutant une contrainte relative à chaque opérateur (**grad**, **rot** et **div**).

$$H(\text{grad}, \mathcal{D}) = \{X \in L^2(\mathcal{D}); \mathbf{grad} X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{D})\}$$

$$H(\text{rot}, \mathcal{D}) = \{\mathbf{X} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{D}); \mathbf{rot} \mathbf{X} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{D})\}$$

$$H(\text{div}, \mathcal{D}) = \{\mathbf{X} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{D}); \text{div} \mathbf{X} \in L^2(\mathcal{D})\}$$

Dans  $H(grad, \mathcal{D})$   $\mathbf{X}$  est continu en chaque point de  $\mathcal{D}$ . Par contre  $H(rot, \mathcal{D})$  la composante tangentielle de  $\mathbf{X}$  est continue sur  $\mathcal{D}$  et pour  $H(div, \mathcal{D})$  la composante normale de  $\mathbf{X}$  est continue.

En électromagnétisme lorsqu'on applique l'opérateur gradient à un champ scalaire appartenant à  $H(grad, \mathcal{D})$ . Le champ de vecteurs résultant se retrouve dans  $H(rot, \mathcal{D})$ . Un constat identique peut être effectué lorsqu'on applique l'opérateur rotationnel à un champ appartenant à  $H(rot, \mathcal{D})$ . Le champ résultant se retrouve dans  $H(div, \mathcal{D})$ . Dans ces conditions, on peut créer une suite d'espaces fonctionnels reliés par les opérateurs différentiels. De plus, il existe des propriétés d'inclusion des espaces fonctionnels telles que  $Im(H(rot, \mathcal{D})) \subset Ker(H(div, \mathcal{D}))$  et que  $Im(H(grad, \mathcal{D})) \subset Ker(H(rot, \mathcal{D}))$  [Bossavit93].

En introduisant les conditions aux limites, on restreint les espaces :

$$H_0(grad, \mathcal{D}) = \{X \in L^2(\mathcal{D}); \mathbf{grad}X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{D}); X = 0 \mid_{\Gamma}\}$$

$$H_0(rot, \mathcal{D}) = \{\mathbf{X} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{D}); \mathbf{rot}\mathbf{X} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{D}); \mathbf{X} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \mid_{\Gamma}\}$$

$$H_0(div, \mathcal{D}) = \{\mathbf{X} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{D}); \mathbf{div}\mathbf{X} \in L^2(\mathcal{D}); \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma}\}$$

Dans ce cas,  $\Gamma$  représente la totalité de la surface englobant  $\mathcal{D}$ . En mathématiques, les espaces décrits ci-dessus sont classiques ou 'gentils' [Costabel] car les conditions limites sont homogènes. Or, généralement en physique, on peut appliquer des conditions de symétrie ou imposer des conditions aux limites qui engendrent des conditions limites sur les champs de différentes natures. La condition aux limites est imposée sur une partie de  $\Gamma$  nommée ici  $\Gamma_x$ . Dans ce cas, les solutions sont recherchées dans un espace plus large :

$$H_{0,x}(grad, \mathcal{D}) = \{X \in L^2(\mathcal{D}); \mathbf{grad}X \in \mathbf{L}^2(\mathcal{D}); X = 0 \mid_{\Gamma_x}\}$$

$$H_{0,x}(rot, \mathcal{D}) = \{\mathbf{X} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{D}); \mathbf{rot}\mathbf{X} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{D}); \mathbf{X} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \mid_{\Gamma_x}\}$$

$$H_{0,x}(div, \mathcal{D}) = \{\mathbf{X} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{D}); \mathbf{div}\mathbf{X} \in L^2(\mathcal{D}); \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} = 0 \mid_{\Gamma_x}\}$$

Comme ces espaces incluent les espaces  $H_0$  décrits précédemment on peut écrire que  $H_0(grad, \mathcal{D}) \subset H_{0,x}(grad, \mathcal{D})$ ,  $H_0(rot, \mathcal{D}) \subset H_{0,x}(rot, \mathcal{D})$  et  $H_0(div, \mathcal{D}) \subset H_{0,x}(div, \mathcal{D})$ .

### 1.2.5.2. Les champs électromagnétiques

A partir de ces définitions, nous pouvons déjà établir que  $\mathbf{B} \in H_{0,x}(div, \mathcal{D})$ ,  $\mathbf{J} \in H_{0,x}(div, \mathcal{D}_c)$ ,  $\mathbf{H} \in H_{0,x}(rot, \mathcal{D})$  et  $\mathbf{E} \in H_{0,x}(rot, \mathcal{D}_c)$ .

### 1.2.5.3. Les potentiels

Appliquons le même raisonnement pour les potentiels scalaire et vecteur. Tout d'abord, il est simple de traiter le cas du potentiel vecteur modifié  $\mathbf{A}^*$ . Sa divergence n'est pas forcément nulle et les conditions aux limites sont moins contraintes donc  $\mathbf{A}^* \in H(rot, \mathcal{D}_c)$ . Quant au potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ , défini à partir de l'Équation 1.18, il appartient aux mêmes espaces que  $\mathbf{H}$ . Par contre, si on applique la jauge de Coulomb ( $div \mathbf{A} = 0$ ) il doit satisfaire à la fois les conditions sur  $H(div)$  et  $H(rot)$ . Enfin, si on applique une jauge de type  $:(A, grad \xi) = 0, \forall \xi \in H_0^1(\mathcal{D})$  alors il faut définir deux nouveaux espaces tels que :

$$P_0(\mathcal{D}) = \{X \in H_0(rot, \mathcal{D}); (X, grad \xi) = 0; \forall \xi \in H_0(grad, \mathcal{D})\}$$

$$P_{0,x}(\mathcal{D}) = \{X \in H_{0,x}(rot, \mathcal{D}); (X, grad \xi) = 0; \forall \xi \in H_{0,x}(grad, \mathcal{D})\}$$

A l'aide de ces deux nouveaux espaces il est possible d'établir que  $\mathbf{A} \in P_0(\mathcal{D})$  ou  $\mathbf{A} \in P_{0,x}(\mathcal{D})$ . Mais contrairement aux espaces  $H_0(rot, \mathcal{D})$  et  $H_{0,x}(rot, \mathcal{D})$  il n'est pas possible d'établir que  $P_0(rot, \mathcal{D})$  est inclus dans  $P_{0,x}(rot, \mathcal{D})$ . En effet, la jauge décrite dans  $P_{0,x}(rot, \mathcal{D})$  nécessite que  $\xi$  doit satisfaire plus de contraintes car  $H_{0,x}(rot, \mathcal{D})$  contient  $H_0(rot, \mathcal{D})$ . Par conséquent, l'espace qui satisfait  $\{(X, grad \xi) = 0; \forall \xi \in H_{0,x}(grad, \mathcal{D})\}$  contient  $\{(X, grad \xi) = 0; \forall \xi \in H_0(grad, \mathcal{D})\}$ .

Le potentiel vecteur électrique  $\mathbf{T}$  a les mêmes propriétés que  $\mathbf{A}$  mais il existe uniquement dans  $\mathcal{D}_c$ . Donc, en fonction de la jauge utilisée, on a soit  $\mathbf{T} \in H_{0,x}(div, \mathcal{D}_c) \wedge H_{0,x}(rot, \mathcal{D}_c)$  pour la jauge de Coulomb, soit  $\mathbf{T} \in P_0(\mathcal{D}_c)$  ou  $\mathbf{T} \in P_{0,x}(\mathcal{D}_c)$  pour l'autre jauge.

Finissons par les potentiels salaires  $\varphi$  et  $\Omega$  qui sont respectivement dans  $H_{0,x}(grad, \mathcal{D}_c)$  et  $H_{0,x}(grad, \mathcal{D})$ .

### 1.2.5.4. Synthèse des espaces

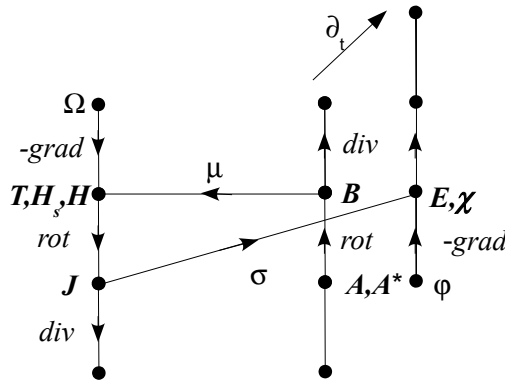
Afin d'accueillir l'ensemble de grandeurs électromagnétiques, il est nécessaire d'introduire une seconde suite d'espace fonctionnel. Cette suite, qualifiée de 'duale', est aussi reliée par les opérateurs différentiels. Les lois de comportement, appelée aussi



opérateur de Hodge [Tarhasaari99, Kotigua84], permettent de lier les espaces appartenant aux deux suites. L'ensemble des espaces fonctionnels définis précédemment peut être présenté de façon synthétique dans un diagramme [Tonti98, Tonti95]. Pour cela, il est nécessaire :

- considérer uniquement les espaces  $H(\text{grad}, \mathcal{D})$ ,  $H(\text{rot}, \mathcal{D})$  et  $H(\text{div}, \mathcal{D})$  ;
- placer les potentiels scalaires dans les espaces  $H(\text{grad}, \mathcal{D})$  ;
- placer les potentiels vecteurs et champs  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{E}$  dans  $H(\text{rot}, \mathcal{D})$  ;
- placer les champs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{J}$  dans  $H(\text{div}, \mathcal{D})$  ;
- considérer les systèmes simplement connexes

A l'aide de ces hypothèses, on peut établir le diagramme suivant.



**Figure 1.3.:** Diagramme synthétique ou Maison de Maxwell réduite à l'ARQS

## 1.3. Grandeurs globales

Toutes ces formulations permettent de déterminer les grandeurs locales des champs mais il est intéressant d'accéder aux grandeurs globales que l'ingénieur souhaite évaluer et qu'il est capable de mesurer et/ou d'imposer à un système électromagnétique. Ces grandeurs peuvent être des flux ou des différences de potentiels, électriques ou magnétiques [Dular98, Henneron06]. Ces grandeurs globales sont définies et regroupées dans le Tableau 1.3.

Flux magnétique (Wb) : $\Phi = \int_S \mathbf{B} ds$
Courant électrique (A) : $\mathcal{I} = \int_S \mathbf{J} ds$
Force électromotrice (V) : $V = \int_L \mathbf{E} dl$
Force magnétomotrice (A) : $\mathcal{E} = \int_L \mathbf{H} dl$

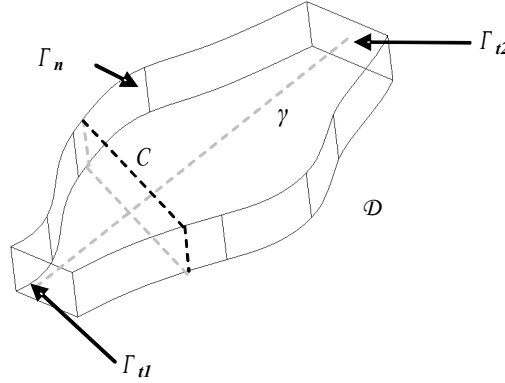
**Table 1.3.:** Les grandeurs globales de l'électromagnétisme

Avec  $S$  et  $L$  respectivement une surface et un chemin quelconque du domaine.

A cela s'ajoutent les grandeurs mécaniques telles que le couple (ou la force) et la vitesse de rotation (ou déplacement). Par la suite, la méthode employée pour imposer et calculer les grandeurs électromagnétiques globales est présentée. Pour cela nous devons définir des champs de vecteurs associés aux grandeurs globales.

### 1.3.1. Définitions du jeu de vecteurs outils $\mathbf{N}$ , $\mathbf{K}$ , $\alpha$ et $\beta$

Prenons, dans un premier temps, un domaine simplement connexe  $\mathcal{D}$  comportant deux types de surface  $\Gamma_n$  et  $\Gamma_t$ . La surface  $\Gamma_n$  correspond, selon la nature du matériau, aux surfaces  $\Gamma_j$  ou  $\Gamma_b$  introduites en 1.1.4. Par contre  $\Gamma_t$  correspond aux surfaces  $\Gamma_h$  ou  $\Gamma_e$ . De plus,  $\Gamma_t$  est décomposée en deux parties  $\Gamma_{t1}$  et  $\Gamma_{t2}$  (pas forcément égales). Sur ce domaine, on souhaite imposer et/ou calculer un flux entrant par  $\Gamma_{t1}$  et sortant  $\Gamma_{t2}$  ou une différence de potentiel entre  $\Gamma_{t1}$  et  $\Gamma_{t2}$ . A ces surfaces est associé un parcours quelconque  $\gamma$  allant de  $\Gamma_{t1}$  à  $\Gamma_{t2}$  (ou inversement) et un contour  $\mathcal{C}$  quelconque sur  $\Gamma_n$  qui doit encercler le parcours de  $\gamma$ .



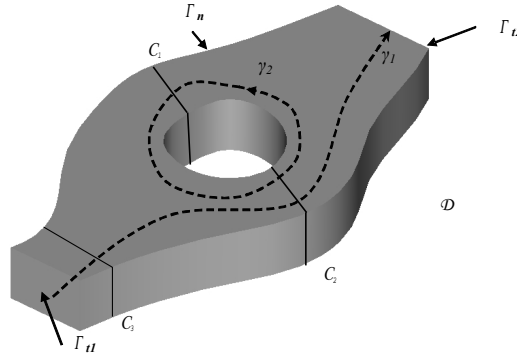
**Figure 1.4.:** Domaine  $\mathcal{D}$  étudié

Pour définir des termes sources volumiques, soit un flux (magnétique ou électrique) à travers une géométrie complexe, soit une force électromotrice et /ou magnétomotrice le long d'un chemin, il est nécessaire de définir deux champs de vecteurs  $\mathbf{N}$  et son rotationnel  $\mathbf{K}$  qui vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \int_{\Gamma_{ti}} \mathbf{N} \cdot d\mathbf{s} &= \pm 1 \\ \text{div} \mathbf{N} &= 0 \\ \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ } |_{\Gamma_n} \\ \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} &= \pm 1 \\ \text{rot} \mathbf{K} &= \mathbf{N} \end{array} \right. \quad (1.27)$$

Les champs  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{K}$  appartiennent respectivement à  $H_{0,x}(div, \mathcal{D})$  et à  $H(rot, \mathcal{D})$  et peuvent être présents dans tout le domaine  $\mathcal{D}$ .

Considérons maintenant le cas où le domaine  $\mathcal{D}$  est non simplement connexe de (Figure 1.5) car il existe, par exemple, un trou dans  $\mathcal{D}$ . La condition limite imposée sur la surface du trou est  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Dans ce cas, il existe deux courants de circulation selon les chemins  $\gamma_1$  de  $\gamma_2$ . Sur la Figure 1.5, le chemin  $\gamma_1$  représente un parcours des courants entre  $\Gamma_{t1}$  et  $\Gamma_{t2}$  et le chemin  $\gamma_2$  représente l'autre parcours des courants qui fait le tour du trou. Il est à noter que l'on peut aussi choisir un chemin  $\gamma_2$  entre  $\Gamma_{t1}$  et  $\Gamma_{t2}$  mais passant de l'autre côté du trou.



**Figure 1.5.:** Domaine d'étude non simplement connexe

Pour évaluer des termes sources surfaciques comme des surfaces équipotentielles, il faut introduire deux autres champs de vecteurs  $\beta$  et  $\alpha$  :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{rot} \beta & = & 0 \\ \int_{\gamma} \beta \cdot d\mathbf{l} & = & 1 \\ \beta \times \mathbf{n} & = & 0 \mid_{\Gamma_{ti}} \\ -grad \alpha & = & \beta \end{array} \right. \quad (1.28)$$

Les champs  $\beta$  et  $\alpha$  appartiennent respectivement à  $H_{0,x}(rot, \mathcal{D})$  et à  $H_{0,x}(grad, \mathcal{D})$ . Cela revient à définir une fonction  $\alpha$  qui vaut 1 sur  $\Gamma_{t1}$  ou  $\Gamma_{t2}$ . Par conséquent, si  $\alpha$  est défini sur  $\Gamma_{t1}$ , le résultat  $\int_{\mathcal{D}} \alpha d\tau$  est égal à la surface  $\Gamma_{t1}$ .

### 1.3.2. Expression des grandeurs globales

#### 1.3.2.1. Les cas statiques

Pour les problèmes d'électrocinétique ou de magnétostatique, le jeu de vecteurs introduits précédemment permet d'exprimer les grandeurs globales [Dular98, Henneron06].

Les différences de potentiels magnétique et électrique  $\varepsilon$  et  $V$  entre les surfaces  $\Gamma_{t1}$  et  $\Gamma_{t2}$  sont définies à partir des intégrales volumiques suivantes :

$$\varepsilon = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{N} d\tau \quad (1.29)$$

$$V = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{N} d\tau \quad (1.30)$$

Les flux électriques (courant)  $I$  et magnétiques  $\Phi$  traversant le domaine sont obtenus à partir des relations suivantes :

$$I = \int_D \mathbf{J} \cdot \mathbf{K} d\tau \quad (1.31)$$

$$\Phi = \int_D \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} d\tau \quad (1.32)$$

Comme précisé précédemment, les grandeurs globales exprimées à partir des vecteurs  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{K}$  sont qualifiées de volumiques.

De par, leur nature, les flux électrique et magnétique peuvent être déterminés sur une surface. Pour cela, on utilise l'autre jeu de vecteurs pour obtenir l'expression de ces flux.

$$I = \int_{\mathcal{D}} \beta \cdot \mathbf{J} d\tau = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{grad} \alpha \cdot \mathbf{J} d\tau \quad (1.33)$$

$$\Phi = \int_{\mathcal{D}} \beta \cdot \mathbf{B} d\tau = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{grad} \alpha \cdot \mathbf{B} d\tau \quad (1.34)$$

#### 1.3.2.2. Le cas de la magnétodynamique

Dans le cas de la magnétodynamique, l'expression des grandeurs globales se complique car il faut prendre en compte la réaction due aux courants induits. Dans ces conditions, les différences de potentiel s'expriment comme suit :

$$\varepsilon = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{N} d\tau - \int_D \mathbf{J}_{ind} \cdot \mathbf{K} d\tau \quad (1.35)$$

$$V = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{N} d\tau + \partial_t \int_{\mathcal{D}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} d\tau \quad (1.36)$$

L'intérêt de ces expressions réside dans le fait qu'elles sont indépendantes des formulations <sup>1, 2</sup>.

### 1.3.2.3. Grandeurs globales et formulations

Pour obtenir la tension électrique ou la force magnétomotrice il suffit d'exprimer les champs à l'aide des potentiels. Par exemple, l'Équation 1.35 devient, dans le cas de la formulation  $\mathbf{A} - \varphi$  :

$$\varepsilon = \int_{\mathcal{D}} \nu \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} d\tau - \int_{\mathcal{D}} \sigma (\partial_t \mathbf{A} + \mathbf{grad} \varphi) \cdot \mathbf{K} d\tau \quad (1.37)$$

Dans le paragraphe suivant, nous indiquerons la façon d'imposer ces grandeurs en entrée d'un problème.

### 1.3.3. Imposition des grandeurs globales

Chaque potentiel ou champ est lié à une grandeur globale. Ces liens sont synthétisés dans le Tableau 1.4.

	Flux magnétique	f.m.m	Courant	f.e.m
Champ	$\mathbf{B}$	$\mathbf{H}$	$\mathbf{J}$	$\mathbf{E}$
Potentiel	$\mathbf{A}$	$\Omega$	$\mathbf{T}$	$\varphi$

**Table 1.4.:** Liens naturels entre les potentiels, les champs et les grandeurs globales

Pour un problème où les formulations choisies et les grandeurs globales sont liées, l'imposition de la grandeur globale se fait naturellement en décomposant le potentiel inconnu en deux termes. Le premier fait apparaître explicitement la grandeur globale à imposer en utilisant un terme source introduit précédemment. Le second terme peut être considéré comme un champ de réaction. Le bilan du Tableau 1.5 regroupe les associations possibles.

---

1. "3D Compatible Potential Formulations Coupled to Electrical Circuits", Y. Le Ménach, S. Clénet, F. Piriou, COMPEL, Vol.13, no 3, pp. 776-786, 2000.

2. "Source field computation in NDT Applications", T. Henneron, Y. Le Ménach, F. Piriou, O. Moreau, S. Clénet, J.-P. Ducreux, J.-C. Vérité, IEEE Trans. Mag., Vol. 43, no 4, pp. 1785-1788, April 2007.

	Électrique	Magnétique
Flux	$\mathbf{T} = \mathbf{T}' + \mathbf{K}I$	$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \mathbf{K}\Phi$
ddp	$\varphi = \varphi' + \alpha V$	$\Omega = \Omega' + \alpha\varepsilon$

**Table 1.5.:** Les Grandeurs imposées

avec  $\mathbf{T}, \mathbf{A} \in H(\text{rot}, \mathcal{D})$ ,  $T'$  et  $A' \in H_{0,x}(\text{rot}, \mathcal{D})$ ,  $\varphi', \Omega' \in H_{0,x}(\text{grad}, \mathcal{D})$  et  $\varphi, \Omega \in H(\text{grad}, \mathcal{D})$ . Cependant, il est aisé d'injecter les expressions du Tableau 1.5 dans les formulations.

Dans la perspective d'avoir des formulations duales totalement complémentaires, il est nécessaire d'imposer une équation globale qui n'apparaît pas naturellement dans les formulations comme, par exemple, dans le cas de la formulation  $\mathbf{A} - \varphi$  quand il s'agira d'imposer un courant dans un conducteur massif. Pour bien appréhender les problèmes, deux exemples vont être traités.

### 1.3.3.1. Cas d'une ddp imposée pour une formulation en potentiel vecteur

Considérons un problème d'électrocinétique que l'on souhaite résoudre en potentiel vecteur en imposant une tension  $V$  aux bornes du domaine. Pour représenter ce problème, on peut reprendre la Figure 1.4 sur laquelle la différence de potentiel  $V$  est imposée entre  $\Gamma_{t_1}$  et  $\Gamma_{t_2}$ . Dans ces conditions, le courant flux électrique  $I$  devient inconnu. Pour traiter ce cas, il suffit de combiner l'expression du potentiel  $\mathbf{T} = \mathbf{T}' + \mathbf{K}I$ , de la tension  $V = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{N} d\tau$  et la formulation en potentiel vecteur électrique  $\text{rot} \frac{1}{\sigma} \text{rot} \mathbf{T} = 0$ . On déduit alors la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{rot} \frac{1}{\sigma} \text{rot} \mathbf{T}' + \text{rot} \frac{1}{\sigma} \text{rot} \mathbf{K}I &= 0 \\ \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sigma} \text{rot}(\mathbf{T}' + \mathbf{K}I) \cdot \mathbf{N} d\tau &= V \end{cases} \quad (1.38)$$

Dans ces conditions le courant  $I$  devient inconnu. Un développement similaire permet de résoudre un problème magnétostatique à la formulation en potentiel vecteur magnétique en imposant une force magnétomotrice au système.

**Remarque** Dans les cas non simplement connexes, il faut assurer que les densités de courant se répartissent correctement dans le conducteur. Si aucune contrainte n'est imposée sur la construction de  $\mathbf{N}$ , le courant se répartira de chaque côté du trou en fonction de la répartition de  $\mathbf{N}$  et non en fonction de la résistance électrique. Pour pallier ce problème, comme cela a été précisé à la sous-section 1.2.5, deux jeux de vecteurs  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{K}$  doivent être déterminés. Une équation supplémentaire est ajoutée qui permet de déterminer le courant autour du trou en considérant la tension  $V$  nulle autour du trou. Cela équivaut à un court-circuit.

### 1.3.3.2. Cas d'un flux imposé pour une formulation en potentiel scalaire

Considérons maintenant un problème magnétostatique à résoudre en potentiel scalaire en imposant un flux magnétique. Pour représenter ce problème, prenons à nouveau la Figure 1.4 sur laquelle un flux est imposé entrant par  $\Gamma_{t_1}$  et sortant par  $\Gamma_{t_2}$ . Dans ce cas, la force magnétomotrice  $\varepsilon$  devient alors inconnue. En combinant  $\Omega = \Omega' + \alpha\varepsilon$ ,  $\Phi = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{grad}\alpha \cdot \mathbf{B} d\tau$  et la formulation  $div\mu \mathbf{grad}\Omega = div\mu \mathbf{H}_s$ , on obtient la formulation couplée suivante :

$$\begin{cases} div\mu \mathbf{grad}\Omega' + div\mu \mathbf{grad}\alpha\varepsilon & = div\mu \mathbf{H}_s \\ \int_{\mathcal{D}} \mathbf{grad}\alpha \cdot \mu(\mathbf{grad}(\Omega' + \alpha\varepsilon) - \mathbf{H}_s) d\tau & = \Phi \end{cases} \quad (1.39)$$

Pour un problématique électrocinétique, la même approche nous conduit à résoudre la formulation en potentiel scalaire électrique en imposant un courant. On peut généraliser l'approche au cas de la magnétodynamique.

### 1.3.3.3. Synthèse

Les deux exemples traités précédemment montrent la démarche pour introduire des grandeurs globales dans les formulations et un bref aperçu de toutes les possibilités. Une présentation, quasi-exhaustive, a été faite par T. Henneron puis complétée par J.Korecki. Une synthèse indiquant le type de grandeurs inconnues à ajouter aux formulations en fonction des grandeurs imposées est présenté dans le Tableau 1.6.

Grandeurs à imposer	Formulations					
	<b>A</b>	<b><math>\Omega</math></b>	<b>T</b>	<b><math>\varphi</math></b>	<b>A-<math>\varphi</math></b>	<b>T-<math>\Omega</math></b>
$\Phi$	Naturel	$+\varepsilon$	/	/	Naturel	$+\varepsilon$
$I$	/	/	Naturel	$+V$	$+V$	Naturel
$\varepsilon$	$+\Phi$	Naturel	/	/	$+\Phi$	Naturel
$V$	/	/	$+I$	Naturel	Naturel	$+I$

**Table 1.6.:** Synthèse des grandeurs imposées dans les formulations

## 2. Méthodes de discrétisations

Il existe beaucoup de méthodes numériques pour résoudre les équations aux dérivées partielles introduites au cours des paragraphes précédents. Parmi ces méthodes, on peut citer :

- La méthode des éléments finis [Bossavit93, Meunier02, Bastos03]
- La méthode des différences finies [Davat82]
- La méthode des volumes finis [LeVeque02]
- La méthode des éléments naturels [Chinesta02]<sup>1</sup>
- La technique d'intégration finie [Weiland77, VanRienen01]
- La Cell-Method [Tonti95, Marrone04.2]
- La méthode de Galerkin discontinu [Hesthaven08]
- etc ...

Si on combine ces méthodes aux formulations de la magnétodynamique, il existe quelques dizaines possibilités pour résoudre numériquement un problème magnétodynamique. Et encore, le couplage de ces méthodes avec des techniques de prise en compte : de l'infini, de l'homogénéisation des matériaux, des impédances de surface ou le couplage multi-physique ne sont pas abordées. Il faut donc faire un tri parmi ces méthodes et proposer à l'utilisateur une combinaison de méthodes qui soit la plus efficace possible pour résoudre un problème.

Toutes les méthodes citées précédemment font appel à une discrétisation spatiale basée sur un maillage de l'espace sur lequel sont calculées les grandeurs physiques (champs et potentiels). Contrairement aux autres domaines de la physique, qui se contentent généralement d'une évaluation des grandeurs aux nœuds du maillage, en électromagnétisme, les grandeurs, selon leur nature, peuvent être évaluées sur les nœuds, les arêtes, les facettes et les éléments. Toutefois, toutes les méthodes ne permettent pas d'effectuer cette discrétisation. Pour la méthode des différences finies, les grandeurs sont définies uniquement aux nœuds du maillage. C'est aussi actuellement le cas pour la méthode des éléments naturels.

Les travaux permettant de bien appréhender cette discrétisation ont été effectués par A. Bossavit [Bossavit88, Bossavit01, Bossavit00], E. Tonti [Tonti95, Tonti98, Tonti01], T. Weiland [Weiland77] et par L. Kettunen [Tarhasaari99]. Cependant le travail de synthèse le plus abouti est à mettre au profit de E. Tonti. Dans la suite nous allons reprendre synthétiquement ces développements en les limitant aux cas de l'ARQS.

---

1. "A mixed finite element/meshless natural element method for simulating rotative electromagnetic machines", L. Illoul, Y. Le Menach, S. Clénet, F. Chinesta, E.P.J. Applied Physics, Vol. 43, pp. 197-208, 2008.

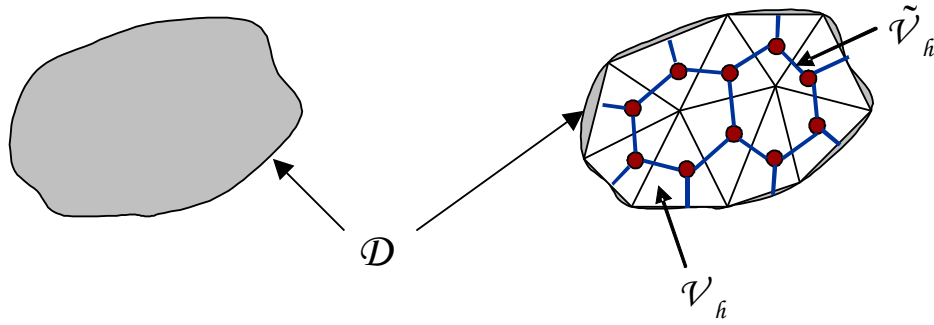


## 2.1. Notion de maillage dual

Comme il a été mentionné dans le paragraphe précédent, il est nécessaire de discrétiser l'espace pour résoudre le problème numériquement. En 3D, un espace fonctionnel discrétisé  $\mathcal{V}_h$  (maillage) est constitué d'éléments (volume), de facettes, d'arêtes et de nœuds. Les ensembles des volumes, des facettes, des arêtes et des nœuds sont respectivement appelés  $\mathcal{V}_v, \mathcal{V}_f, \mathcal{V}_a, \mathcal{V}_n$ . La réunion de tous ces ensembles forment l'espace discret :  $\mathcal{V}_h = \mathcal{V}_v \cup \mathcal{V}_f \cup \mathcal{V}_a \cup \mathcal{V}_n$ . A ce maillage il est possible d'associer un maillage (grille) dual  $\tilde{\mathcal{V}}_h$  qui est aussi constitué de volumes, de facettes, d'arêtes et de nœuds qualifiés, eux aussi, de duals. Par similitude, on peut établir :  $\tilde{\mathcal{V}}_h = \tilde{\mathcal{V}}_v \cup \tilde{\mathcal{V}}_f \cup \tilde{\mathcal{V}}_a \cup \tilde{\mathcal{V}}_n$ . Le maillage dual est construit à partir du maillage initial, qualifié de 'primal', en associant :

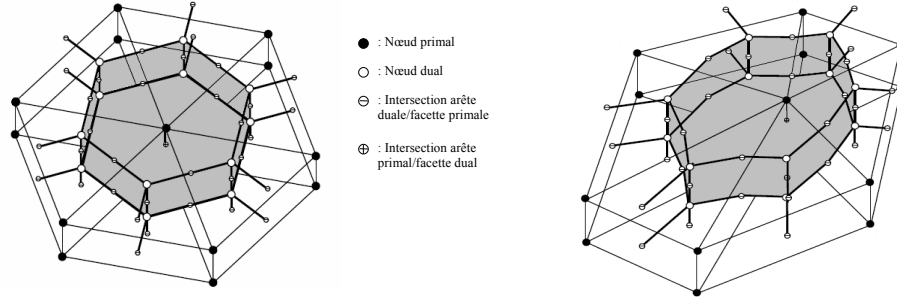
- à chaque nœud primal  $n$  un volume dual  $\tilde{v}$
- à chaque arête primale  $a$  une facette duale  $\tilde{f}$
- à chaque facette primale  $f$  une arête duale  $\tilde{a}$
- à chaque volume primal  $v$  un nœud dual  $\tilde{n}$

Sur la Figure 2.1 un maillage primal 2D et son dual sont représentés.



**Figure 2.1.:** Discretisation d'un domaine continu

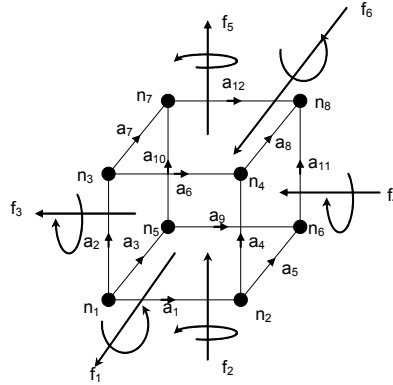
Il existe une infinité de maillages duals mais, en pratique, seuls deux types de maillage dual sont utilisés : le type barycentrique et le type Voronoï. Sur la Figure 2.2 sont représentés les deux types de maillage dual. La construction du maillage barycentrique est réalisée en plaçant les nœuds duals aux barycentres des éléments primaux. Les arêtes duals lient les nœuds duals en passant par le barycentre des facettes primales. Par conséquent, les arêtes duals sont brisées. Quant aux facettes duals, elles ne sont pas nécessairement planes. La construction du maillage dual de Voronoï est basée sur l'orthogonalité entre les constituants. En effet, une arête primale est orthogonale à son associée duale (idem pour les facettes). Il en résulte que les arêtes duals sont droites et les facettes duals planes. Malheureusement, si le maillage primal présente des éléments étirés (maillage dit hétérogène), un nœud dual peut être situé en dehors de l'élément dual qui lui est associé. Dans ces conditions, le maillage sera inexploitable par les méthodes de résolution[Chinesta02].



**Figure 2.2.:** Exemple de maillage dual d'un patch de prisme :Voronoi à gauche et barycentrique à droite (Master Recherche de G. Parent)

## 2.2. Discrétisation des opérateurs différentiels

Comme dans le cas des espaces fonctionnels continus, les opérateurs discrets vont nous permettre d'établir un lien entre les nœuds, les arêtes, les facettes et les éléments des maillages (primal et dual). En fait, il s'agit des matrices d'incidence introduites par A.Bossavit [Bossavit93] et utilisées par [Badics07]. Pour illustrer ces matrices, nous allons traiter le cas de l'hexaèdre présenté sur la Figure 2.3. Il est à noter que les orientations sont choisies arbitrairement sur le primal, Par contre, l'orientation du maillage dual est déduite l'orientation du maillage primal.



**Figure 2.3.:** Hexaèdre orienté

### 2.2.1. Le gradient discret $G_{an}$ .

La forme discrète du gradient est la matrice d'incidence arête – nœud qui relie tous les nœuds primaux et toutes les arêtes primales du maillage. La taille correspond au

nombre d'arêtes et de nœuds du maillage. De plus, ces termes prennent uniquement trois valeurs :

0 si le nœud n'appartient pas l'arête.

1 si le nœud correspond au nœud d'arrivée de l'arête

-1 si le nœud correspond au nœud de départ de l'arête.

Dans le Tableau 2.1 on donne la matrice d'incidence pour l'hexaèdre de la Figure 2.3.

$G_{an}$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$	$n_6$	$n_7$	$n_8$
$a_1$	-1	1						
$a_2$	-1		1					
$a_3$	-1				1			
$a_4$		-1		1				
$a_5$		-1				1		
$a_6$			-1	1				
$a_7$			-1					1
$a_8$				-1		1		
$a_9$					-1		1	
$a_{10}$					-1			
$a_{11}$						-1		1
$a_{12}$							-1	1

**Table 2.1.:** Matrice incidence  $G_{an}$  de l'hexaèdre de la figure 2.3

### 2.2.2. Le rotationnel discret $R_{fa}$

Il s'agit de la matrice d'incidence facette - arête qui assure la liaison entre les arêtes et les facettes du maillage. Tout comme pour  $G_{an}$  les termes de  $R_{fa}$  valent 0, 1 ou -1. A chaque facette est associée une normale qui est soit entrante soit sortante et un sens de rotation (voir Figure 2.3).

0 si l'arête n'appartient pas à la facette.

1 si l'arête est orientée dans le même sens que le sens de rotation associé à la facette

-1 si l'arête est orientée dans le sens opposée du sens de rotation associé à la facette.

$R_{fa}$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$a_{11}$	$a_{12}$
$f_1$	1	-1		1		-1						
$f_2$	1		-1		1				-1			
$f_3$		1	-1				1			-1		
$f_4$				1	-1			1			-1	
$f_5$						1	-1	1				-1
$f_6$									-1	-1	1	-1

**Table 2.2.:** Matrice incidence  $R_{fa}$  pour un hexaèdre

### 2.2.3. La divergence discrète $D_{vf}$

Cet opérateur associe tous les éléments à toutes les facettes du maillage. La divergence est définie par la matrice incidence volume – facette. Là encore, ces termes valent 0, 1 ou  $-1$ .

0 si la facette n'appartient pas au volume

1 si la normale de la facette est orientée sortante du volume.

$-1$  si la normale de la facette est orientée entrante dans le volume.

$D_{vf}$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$
$V_1$	-1	1	-1	1	-1	1

**Table 2.3.:** Matrice incidence  $D_{fv}$  pour un hexaèdre

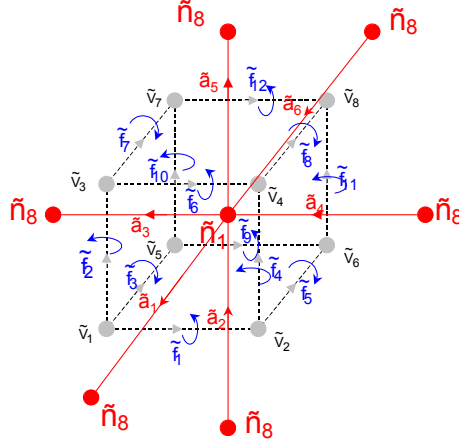
### 2.2.4. Propriétés des opérateurs

Comme nous l'avons vu pour le maillage primal, on peut définir de la même façon les opérateurs  $\tilde{G}_{an}$ ,  $\tilde{R}_{fa}$  et  $\tilde{D}_{vf}$  du maillage dual. Si l'orientation des arêtes, des facettes et des éléments du maillage dual est déduite de l'orientation des arêtes, des facettes et des éléments du maillage primal, on montre alors que l'on a les propriétés suivantes entre les opérateurs discrets [Bossavit93] :

$$G_{an} = -\tilde{D}_{vf}^t$$

$$\tilde{G}_{an} = -D_{vf}^t$$

$$R_{fa} = \tilde{R}_{fa}^t$$



**Figure 2.4.:** Maillage dual de l'hexaèdre de la figure 2.3

A l'aide de ces propriétés, on note que, connaissant les opérateurs sur la grille primaire, on peut facilement en déduire les opérateurs sur la grille duale et réciproquement.

## 2.3. Discrétisation des grandeurs physiques

Les potentiels scalaires  $\varphi$  et  $\Omega$  appartiennent à  $H(grad, \mathcal{D})$  et sont continus et différentiables. Ils sont parfaitement définis par une connaissance de leurs valeurs en chaque point de l'espace. Dans le cas d'un domaine discret (maillé), la définition se limitera à la connaissance des valeurs des potentiels à chaque nœud du maillage. Les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  et les potentiels  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{T}$  appartiennent à  $H(rot, \mathcal{D})$ . Leurs composantes tangentielles sont donc conservées. Leurs circulations selon n'importe quel trajet seront donc parfaitement définies. On choisira donc les circulations sur les arêtes du maillage comme degrés de liberté (ddl) pour les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  et les potentiels  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{T}$ . Enfin, les champs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{J}$  appartiennent à  $H(div, \mathcal{D})$  et leurs composantes normales se conservent à travers toutes les surfaces. On choisira donc les facettes pour discrétiser les champs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{J}$ . Afin d'éviter une confusion avec les grandeurs classiques de l'électrotechnique, nous appellerons respectivement  $b_f$ ,  $j_f$  le flux de facettes de  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{J}$ . De même, nous nommerons  $e_a$ ,  $h_a$ ,  $a_a$  et  $t_a$  les circulations des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  et potentiels  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{T}$ . Il est à noter que cette discrétisation est associée à une orientation des facettes et des arêtes [Tonti95]. On notera  $X_h$  le vecteur contenant les ddl relatifs au champ  $\mathbf{X}$  et  $\tilde{X}_h$  le vecteur contenant les ddl relatifs au champ  $\mathbf{X}$  sur le maillage dual.

## 2.4. Discrétisation des lois de comportement et maillage dual

Les lois de comportement établissent des liens entre les champs appartenant à  $H(\text{div}, \mathcal{D})$  et  $H(\text{rot}, \mathcal{D})$  mais de suites différentes. Par conséquent, du point de vue discret, ces lois relient des flux de facettes à des circulations sur des arêtes. Prenons le cas de la loi de comportement magnétique qui lie l'ensemble des flux de  $\mathbf{B}$  à travers les facettes à l'ensemble des circulations de  $\mathbf{H}$  sur les arêtes .

$$\tilde{\mathbf{B}}_h = \mu_h \mathbf{H}_h \quad (2.1)$$

La discrétisation de la loi d'Ohm est analogue soit :

$$\tilde{\mathbf{J}}_h = \sigma_h \mathbf{E}_h \quad (2.2)$$

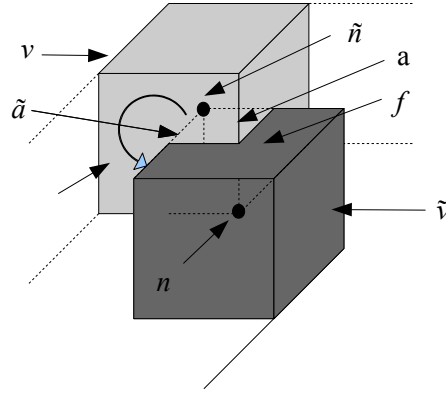
Ici  $\mu_h$  et  $\sigma_h$  sont des matrices carrées. Dans la suite nous allons présenter trois différentes qui permettent de construire ces matrices.

### 2.4.1. Cas de la F.I.T

Pour bien établir cette relation, il convient d'étudier le cas élémentaire d'une facette primale associée à son arête duale. Prenons le cas simple où le maillage primal est hexaédrique régulier. Un exemple est présenté sur la Figure 2.5 sur laquelle l'hexaèdre primal est en clair et son dual foncé. Les facettes primales qui ne sont pas en contact avec l'élément dual ne sont pas représentées afin de visualiser l'intérieur. Le volume commun entre les éléments du maillage dual et primal est appelé micro-cellule. De plus, on choisit (arbitrairement) de placer  $\mathbf{H}$  sur la grille primale. Dans ce cas, pour discrétiser la loi de comportement, il est nécessaire de prendre les huit micro-cellules qui forment le volume qui a pour section une facette primale et pour longueur une arête duale. Dans ces conditions, si on applique l'Équation 2.1 à ce volume on obtient :

$$\tilde{b}_{fi} = \mu_{hi} \frac{\tilde{S}_{fi}}{L_{ai}} h_{ai} \quad (2.3)$$

avec  $\tilde{S}_{fi}$  la surface de la facette duale  $i$  et  $L_{ai}$  la longueur de l'arête primale  $i$  et  $\mu_{hi}$  la perméabilité moyenne des huit micro-cellules. Cela revient à calculer la perméance  $\mathcal{P}_{hi}$  du tube de flux constitué des 8 micro-cellules  $\tilde{b}_{fi} = \mathcal{P}_{hi} h_{ai}$  . Dans le cas particulier



**Figure 2.5.:** Volume primal hexaédrique et son dual

de la F.I.T, où le maillage primal est hexaédrique et régulier la matrice de masse  $^{FIT}M_{af}^\mu$  liant les vecteurs  $H_a$  et  $\tilde{B}_f$  sera diagonale et on aura :

$$\tilde{B}_f = ^{FIT}M_{fa}^\mu H_a \quad (2.4)$$

On peut placer les circulations de  $\mathbf{H}$  sur la grille duale et  $\mathbf{B}$  sur la grille primale. On obtient alors une autre matrice de masse notée  $^{FIT}M_{af}^\nu$  telle que :

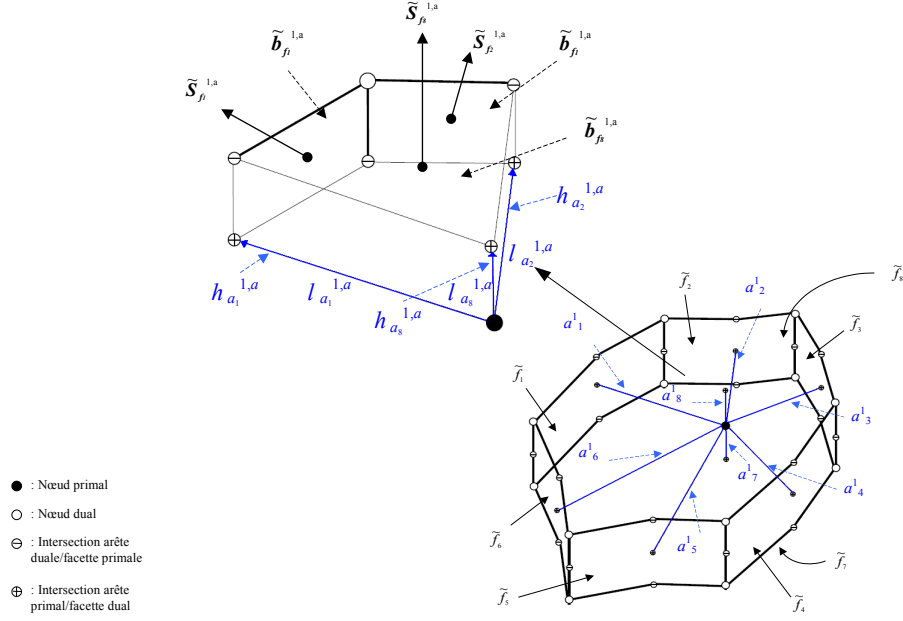
$$\tilde{H}_a = ^{FIT}M_{af}^\nu B_f \quad (2.5)$$

La FIT est très développée à la T.U de Darmstadt par l'équipe de T.Wieland. De nombreuses références, notamment de M.Clemens sont disponibles [Clemens00.2, Clemens00.1, Clemens02.2, Clemens01]. Toutefois, une description synthétique de cette méthode a été rédigée par U.Van Rienen [VanRienen01].

### 2.4.2. Cas de la Cell-Method

Prenons maintenant un maillage primal qui n'est pas constitué d'hexaèdres mais, par exemple de prismes. La loi de comportement doit alors être établie micro-cellule par micro-cellule. Ce cas général est très bien décrit par les travaux de M.Marrone [Marrone04.1, Marrone04.2]. Cette méthode est qualifiée de Cell-Method et s'applique à tous types d'éléments.

Comme une Micro Cellule est le volume commun entre un élément primal et un élément dual, elle est constituée de fractions de facettes duales d'une part, et de fractions d'arêtes primales de l'autre. Une représentation d'une telle micro-cellule est montrée sur la Figure 2.6. On associe donc à chaque fraction de facette duale une fraction de flux de facette notée  $\tilde{b}_{fi}^{l,a}$ . De la même façon, on associe à chaque fraction d'arête primale une fraction de circulation d'arête notée  $h_{ai}^{1,a}$ .



**Figure 2.6.:** Élément dual et détail d'une Micro cellule (Master recherche G. Parent)

Dès lors, il est permis d'écrire :

$$\begin{bmatrix} \tilde{b}_{f1}^{l,a} \\ \tilde{b}_{f2}^{l,a} \\ \tilde{b}_{f8}^{l,a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{f1x}^{l,a} & \tilde{S}_{f1y}^{l,a} & \tilde{S}_{f1z}^{l,a} \\ \tilde{S}_{f2x}^{l,a} & \tilde{S}_{f2y}^{l,a} & \tilde{S}_{f2z}^{l,a} \\ \tilde{S}_{f8x}^{l,a} & \tilde{S}_{f8y}^{l,a} & \tilde{S}_{f8z}^{l,a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

et

$$\begin{bmatrix} h_{a1}^{l,a} \\ h_{a2}^{l,a} \\ h_{a8}^{l,a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{a1x}^{l,a} & l_{a1y}^{l,a} & l_{a1z}^{l,a} \\ l_{a2x}^{l,a} & l_{a2y}^{l,a} & l_{a2z}^{l,a} \\ l_{a8x}^{l,a} & l_{a8y}^{l,a} & l_{a8z}^{l,a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

L'Équation 1.7 nous permet alors de faire le lien entre les deux systèmes précédents, et on obtient alors :

$$\begin{bmatrix} \tilde{b}_{f1}^{l,a} \\ \tilde{b}_{f2}^{l,a} \\ \tilde{b}_{f8}^{l,a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{f1x}^{l,a} & \tilde{S}_{f1y}^{l,a} & \tilde{S}_{f1z}^{l,a} \\ \tilde{S}_{f2x}^{l,a} & \tilde{S}_{f2y}^{l,a} & \tilde{S}_{f2z}^{l,a} \\ \tilde{S}_{f8x}^{l,a} & \tilde{S}_{f8y}^{l,a} & \tilde{S}_{f8z}^{l,a} \end{bmatrix} \mu_h^{mc} \begin{bmatrix} l_{a1x}^{l,a} & l_{a1y}^{l,a} & l_{a1z}^{l,a} \\ l_{a2x}^{l,a} & l_{a2y}^{l,a} & l_{a2z}^{l,a} \\ l_{a8x}^{l,a} & l_{a8y}^{l,a} & l_{a8z}^{l,a} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} h_{a1}^{l,a} \\ h_{a2}^{l,a} \\ h_{a8}^{l,a} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$



où  $\mu_h^{mc}$  représente la perméabilité de la micro cellule.

Le système obtenu permet de relier les fractions de flux de facettes aux fractions de circulation d'arêtes. Ensuite, il est nécessaire de reconstituer les flux de facettes complets à partir des fractions de flux obtenus dans les systèmes établis par chaque micro-cellule. Finalement, on obtient une matrice de masse qui n'est plus diagonale mais, de plus, qui n'est pas symétrique<sup>2</sup>. Toutefois, M. Marrone propose une méthode, en ajoutant des contraintes, pour symétriser cette matrice [Marrone04.1]. On appellera cette matrice  ${}^{CM}M_{fa}^\mu$  et  ${}^{CM}M_{af}^\nu$  la seconde matrice permettant de lier les flux à travers les facettes primales aux circulations sur les arêtes duales.

### 2.4.3. Cas de la méthode des éléments finis

Contrairement aux deux méthodes décrites précédemment la méthode des éléments finis fait appel à des fonctions d'interpolations [Bastos03]. Pour respecter les propriétés des champs électromagnétiques, plusieurs fonctions d'interpolations doivent être introduites telles que les fonctions nodales, d'arêtes, de facettes et de volumes que nous noterons respectivement  $w_n$ ,  $w_a$ ,  $w_f$  et  $w_v$ . En s'appuyant sur les travaux de P. Kotigua, d'A. Bossavit et L. Kettunen présentés dans [Bossavit00, Tarhasaari99, Kotigua84] la matrice de masse issue de la discrétisation par éléments finis peut être définie telle que :

$${}^{FEM}M_{fa}^\mu = \int_{\mathcal{D}} \mu w_a \cdot w_a \quad (2.9)$$

La seconde matrice de masse est définie comme suit :

$${}^{FEM}M_{af}^\nu = \int_{\mathcal{D}} \nu w_f \cdot w_f \quad (2.10)$$

Ces matrices sont symétriques et généralement non diagonales.

N.B :Toutefois, il est possible de choisir des fonctions d'interpolations bi-orthogonales afin d'obtenir une matrice de masse diagonale [Aubertin12].

## 2.5. Diagrammes de Tonti

Les trois paragraphes précédents nous ont permis de discrétiser le domaine étudié, les opérateurs différentiels et les lois de comportement. E.Tonti a proposé un diagramme dans lequel il est possible d'ordonner tous ces constituants discrets des formulations. Pour cela nous reprenons le diagramme de la Figure 1.3

---

2. "Study of the coupling between magnetic and electric equations by using FEM, FIT and Cell-Method", G. Parent, Y. Le Menach, J.-P. Ducreux, F. Piriou, Proc., EPNC, Maribor, june 2006.

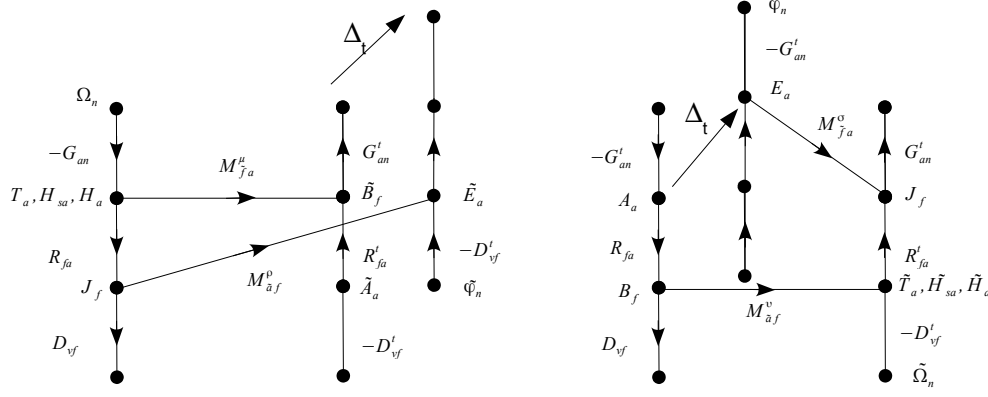


Figure 2.7.: Diagrammes de Tonti

## 2.6. Formulations discrètes

### 2.6.1. Formulations classiques

Pour établir les formes discrètes, ou du moins la forme matricielle des formulations, il suffit de substituer termes à termes les champs et opérateurs du domaine continu par leur forme discrète. Il en résulte que les formulations en potentiel vecteur et en potentiel scalaire de la magnétostatique peuvent se discrétiser de la manière suivante :

$$R_{fa}^t M_{af}^\nu R_{fa} A_a = \tilde{J}_f \quad (2.11)$$

$$G_{an}^t M_{fa}^\mu G_{an} \Omega_n = G_{an}^t M_{fa}^\mu H_{sa} \quad (2.12)$$

Pour les formulations de la magnétodynamique,  $(A, \varphi)$  et  $(T, \Omega)$ , on obtient respectivement l'Équation 2.13 et l'Équation 2.14 :

$$R_{fa}^t M_{af}^\nu R_{fa} A_a + M_{fa}^\sigma \partial_t (A_a + G_{an} \varphi_n) = 0 \quad (2.13)$$

$$R_{fa}^t M_{af}^\rho R_{fa} T_a + M_{fa}^\mu \partial_t (T_a + G_{an} \Omega_n) = 0 \quad (2.14)$$

**Remarques :**

1. Cette écriture synthétique permet d'exprimer les formulations sous leur forme matricielle quelles que soient les méthodes utilisées (la méthode des éléments finis, la Cell-Method ou la F.I.T). Toutefois, bien que l'écriture soit commune, les méthodes diffèrent fortement du point de vue mathématique. En effet, la méthode des éléments finis fait appel à la méthode de Galerkin pour résoudre la forme *faible* des formulations. Le maillage dual est implicite à la méthode. De ce fait, la construction du maillage dual n'est pas nécessaire. Par contre, la F.I.T ou la Cell-Method permettent de discrétiser directement les formulations *fortes* en s'appuyant sur la construction du maillage dual.
2. La discrétisation des opérateurs est indépendante des méthodes et des formulations.
3. Généralement, les solutions sont recherchées sur le maillage primal. Dans ce cas, la discrétisation des grandeurs physiques dépend du choix de la formulation. Néanmoins, pour la F.I.T, nous verrons dans la suite qu'il est possible d'obtenir des résultats sur le maillage dual (inaccessible pour la méthode des éléments finis).
4. La différence entre les méthodes se focalise sur la discrétisation de la matrice de masse dans laquelle est contenue toute la métrique et la physique du système.
5. La Cell-Method, bien que très séduisante pour sa mise en oeuvre, requiert un cout de calcul supplémentaire par la détermination des matrices de masse qui la pénalise fortement devant les autres méthodes. Par conséquent, la Cell-Method ne sera pas retenue pour la suite.
6. La conservation des composantes des champs est la même pour toutes les méthodes à condition de respecter le diagramme de Tonti. A savoir que :
  - La discrétisation sur les arêtes du potentiel vecteur magnétique assure la conservation des composantes tangentielles de  $\mathbf{A}$  et la conservation de la composante normale de  $\mathbf{B}$
  - La discrétisation sur les arêtes du potentiel vecteur électrique assure la conservation des composantes tangentielles de  $\mathbf{T}$  et la conservation de la composante normale de  $\mathbf{J}$
  - La discrétisation aux nœuds du potentiel scalaire magnétique assure la conservation de la composante tangentielle  $\mathbf{H}$
  - La discrétisation aux nœuds du potentiel scalaire électrique assure la conservation de la composante tangentielle  $\mathbf{E}$

De ce fait, aucune méthode associée aux formulations ne permet d'assurer fortement la conservation de la totalité des composantes des champs. En effet, ces composantes sont assurées uniquement dans la suite d'espaces dans laquelle le système matriciel est résolu. Prenons l'exemple de la formulation  $(\mathbf{A}, \varphi)$ , où ces potentiels sont recherchés sur la grille primale. Dans ce cas, les conservations de  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$  et  $\mathbf{E} \times \mathbf{n}$  seront assurées fortement. Par contre, les conservations de  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$  et  $\mathbf{H} \times \mathbf{n}$  seront assurées faiblement.

### 2.6.2. Formulations couplées

Reprenons les cas développés au paragraphe (section 1.3) où une grandeur globale est imposée aux systèmes électromagnétiques. Conformément au paragraphe 1.3.1.4 concernant la discrétisation des grandeurs physiques,  $\mathbf{N}$  est discrétisé sur les facettes,  $\beta$  et  $\mathbf{K}$  sur les arêtes et  $\alpha$  aux nœuds. En pratique  $\beta$  n'est pas déterminé. Seul  $\alpha$  et son gradient sont évalués. On notera alors la forme discrète  $N_f$ ,  $K_a$ ,  $\beta_a$  et  $\alpha_n$ . De manière générale, ces champs sont calculés sur le maillage primal. Les champs de vecteurs  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{K}$  peuvent être calculés avec les techniques d'arbres ou/et des minimisations<sup>3, 4</sup>. Cependant, dans le cas, d'inducteurs bobinés, il est nécessaire d'ajouter des contraintes de constructions pour garantir que la distribution de  $\mathbf{J}$  soit uniforme[Golovanov99, Badics07]<sup>5</sup>. On notera alors les formes discrètes  $\tilde{N}_f$  et  $\tilde{K}_a$ . Mais restons dans le cadre décrit précédemment.

$V = N_f^t \tilde{e}_a$	$\varepsilon = N_f^t \tilde{h}_a$
$I = K_a^t \tilde{j}_f$	$\Phi = K_a^t \tilde{b}_f$
$I = \beta_a^t \tilde{j}_f$	$\phi = \beta_a^t \tilde{b}_f$

**Table 2.4.:** Discrétisation des grandeurs globales

Reprenons le système (Équation 1.38) qui permet de modéliser un problème d'électrocinétique à tension imposée à l'aide du potentiel vecteur électrique  $\mathbf{T}$ . Dans ce cas, il est nécessaire d'ajouter une inconnue supplémentaire  $I$  qui représente le courant électrique à travers le domaine. Discrétisons le système à l'aide du Tableau 2.4. On obtient assez rapidement le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} R_{fa}^t M_{af}^\rho R_{fa} & R M_{af}^\rho R_{fa} K_a \\ K_a^t R_{fa}^t M_{af}^\rho R_{fa} & K_a^t R_{fa}^t M_{af}^\rho R_{fa} K_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_a \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Faisons de même avec un problème magnétostatique à résoudre en potentiel scalaire en imposant un flux magnétique (Équation 1.39). Ici l'inconnue supplémentaire est une force magnétomotrice  $\varepsilon$ . On obtient alors le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} G_{an}^t M_{fa}^\mu G_{an} & G_{an}^t M_{fa}^\mu G_{an} \alpha_n \\ \alpha_n^t G_{an}^t M_{fa}^\mu G_{an} & \alpha_n^t G_{an}^t M_{fa}^\mu G_{an} \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_n \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{an}^t M_{fa}^\mu H_{sa} \\ \Phi + \alpha_n^t G_{an}^t M_{fa}^\mu H_{sa} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

3. "Determination and utilization of the source field in 3D magnetostatic problems", Y. Le Ménach, S. Clénet, F. Piriou, IEEE Trans. Mag., Vol. 34, no 5, pp. 2509-2512, September 1998.

4. "Numerical model to discretize source fields in the 3D finite elements method", Y. Le Ménach, S. Clénet, F. Piriou, IEEE Trans. Mag., Vol. 36, no 4, pp. 676-679, July 2000.

5. "Imposition d'une densité de courant uniforme dans un conducteur", A. Pierquin, Y. Le Menach, J.Y. Roger, L. Chevallier, Numelec, Marseille, Juin 2012.

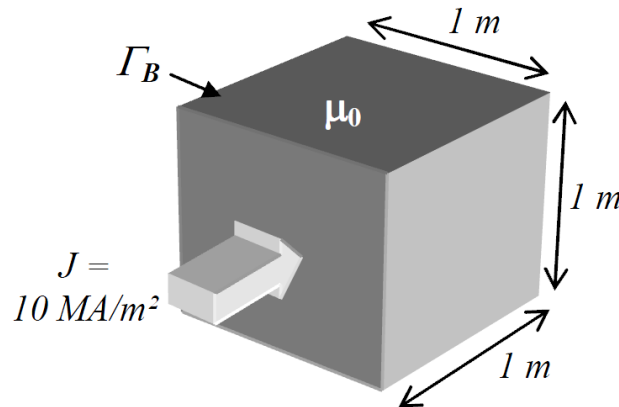
Si les matrices de masse sont symétriques, les systèmes à résoudre sont symétriques et la résolution ne présente pas de difficulté majeure. La dernière ligne et la dernière colonne sont bien plus pleines que le reste du système. Si le nombre de grandeurs imposées est important, ces dernières lignes et colonnes peuvent être prépondérantes et entraînent une augmentation significative de la taille mémoire et peuvent engendrer un mauvais conditionnement de la matrice.

## 2.7. Applications

Plusieurs applications vont être présentées afin de comparer les qualités des solutions issues de la F.E.M, de la F.I.T. Comme cela a été précisé plus tôt, la Cell-Method n'est pas retenue car elle requiert un coût de calcul supplémentaire sans apporter plus de précision. On traitera successivement un exemple du cube magnétostatique et d'une bobine à noyau de fer.

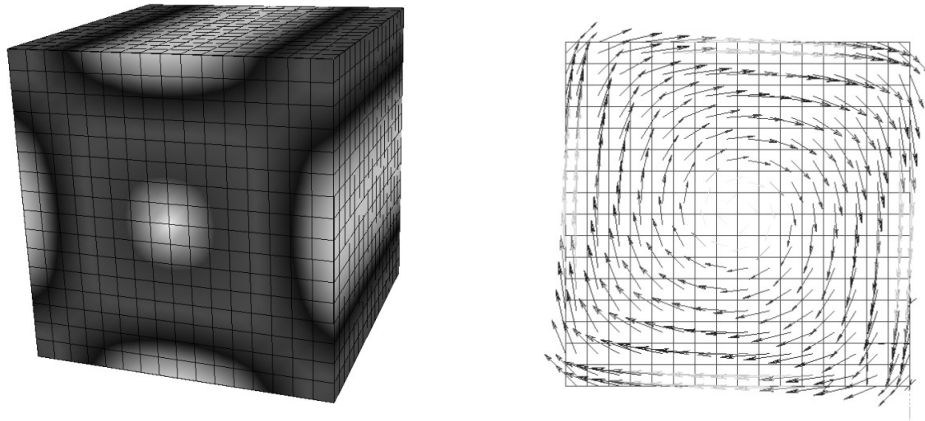
### 2.7.1. Cas du Cube

Il s'agit d'un cube dans lequel est imposé un courant uniforme et continu [Albanese90]. L'intérêt de ce cas académique est que la solution analytique est parfaitement connue. La Figure 2.8, dessinée par J.Korecki, présente toutes les informations nécessaires pour traiter ce problème .



**Figure 2.8.:** Le cube (Thèse de J. Korecki)

A l'aide de la FIT, la distribution de champs a été calculée sur les grilles primale et duale et par les formulations  $\mathbf{A}$ ,  $\Omega$ ,  $\mathbf{B}$ , et  $\mathbf{H}$  présentées dans la sous-section 1.2.2. On s'intéressera à un maillage constitué de 1000 hexaèdres réguliers.



**Figure 2.9.:** Distribution de l'induction dans le cube ( $\Omega$  primal)

Dans ces conditions 8, formulations peuvent être utilisées pour déterminer le champ magnétique, mais seulement 2 solutions numériques différentes sont obtenues<sup>6</sup>. Le Tableau 2.5 synthétise les résultats. Les colonnes nommées 'Primal' et 'Dual' correspondent à la grille sur laquelle est discrétisée la grandeur.

Formulation	Primal	Dual
H	2 292kJ	2.138kJ
B	2.138kJ	2 292kJ
$\Omega$	2 292kJ	2.138kJ
A	2 138kJ	2 292kJ

**Table 2.5.:** Énergies magnétiques présente dans le cube

On vérifie bien que la solution ne dépend pas de la formulation mais du choix initial qui définit l'appartenance des grandeurs à la grille primale ou à la grille duale. Si on reprend les deux diagrammes de Tonti (Figure 2.7) qui correspondent aux choix de discrétisation les grandeurs, on constate que chaque diagramme donne sa solution. On peut noter si  $\mathbf{B}$  est discrétisé sur le maillage primal les valeurs sont obtenues par défaut et, dans le cas contraire, les valeurs sont obtenues par excès.

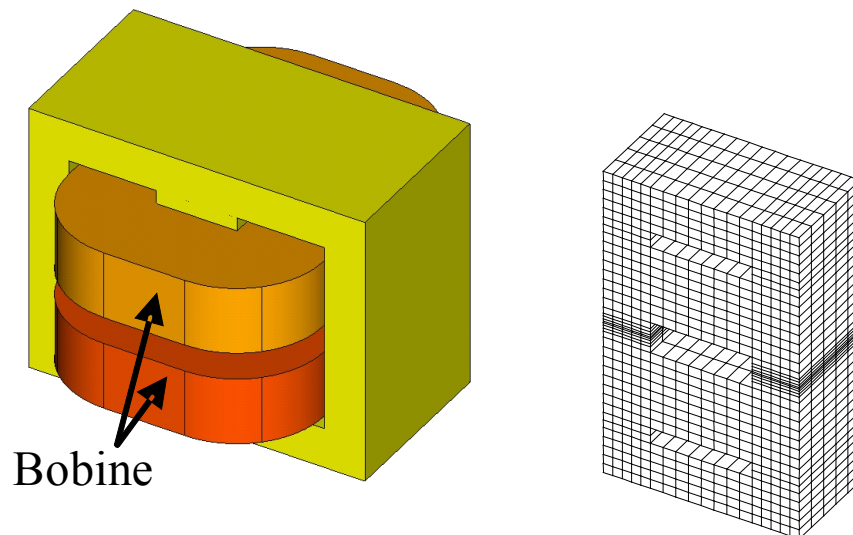
Les calculs à l'aide de la FEM ont aussi été effectués. La FEM nous permet uniquement d'obtenir les résultats sur le maillage primal. La formulation en  $\mathbf{A}$  nous donne 2 145kJ. Par contre, la formulation en  $\Omega$  donne 2 227 kJ. Les deux résultats de FEM sont plus proches de la solution analytique, qui est de 2 208kJ, que les résultats fournis par la FIT. Néanmoins, cet écart provient principalement du

6. "Numerical solutions in primal and dual mesh of magnetostatic problem solved with the Finite Integration Technique", J. Korecki, Y. Le Menach, J.-P. Ducreux, F. Piriou, COMPEL, Vol. 27, no 1, pp. 47-55, 2008

post-traitement. En effet en utilisant les fonctions d'interpolations employées par la FEM, pour construire les champs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  à partir des potentiels scalaires et vecteurs calculés par la FIT les solutions obtenues sont pratiquement les mêmes dans le cas de l'énergie.

### 2.7.2. Bobine à noyau de fer

Pour cette application, seule la formulation en potentiel  $\Omega$  est employée. On comparera les résultats obtenus par la FIT à ceux issus de la FEM. Pour cela, on s'intéressera à la qualité des solutions sur le plan global et local. De plus, on mènera une étude sur le comportement numérique de la FIT. Comme exemple d'application, nous avons traité le cas d'une bobine de filtrage à noyau de fer (Figure 2.10). On peut distinguer les deux enroulements de 50 spires montés en série. L'entrefer est visible sur le maillage. On modifiera ce dernier afin de mener une étude plus complète.



**Figure 2.10.:** Bobine à noyau de fer étudiée

Pour des raisons de symétrie, l'étude se limite à la moitié de la bobine. L'effet 3D des têtes de bobines n'est pas pris en compte. Le maillage utilisé est présenté (Figure 2.10) et comprend 6125 éléments, 7800 nœuds, 21644 arêtes et 19970 facettes.

#### 2.7.2.1. Grandeurs locales

Pour ce calcul en linéaire, on impose un courant de 1 A dans les enroulements et on détermine l'écart quadratique entre les deux solutions pour différentes valeurs de

taille de l'entrefer e	$\varepsilon$
e=0	0.001 %
e=0.1mm	0.25 %

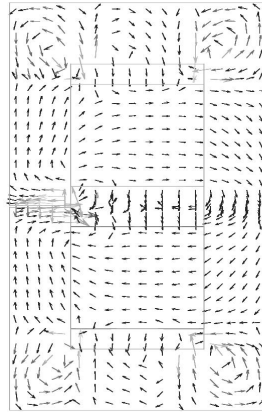
**Table 2.6.:** Écart entre l'induction  $B_{FIT}$  et  $B_{FEM}$ 

l'entrefer en utilisant la relation suivante.

$$\varepsilon = \frac{\|\sum B_{FEM} - B_{FIT}\|^2}{\|\sum B_{FEM}\|^2} \quad (2.17)$$

Dans cette relation  $B_{FIT}$  et la  $B_{FEM}$  sont les inductions issues respectivement de la FIT et de la FEM. Les résultats obtenus sont reportés dans le Tableau 2.6 et ils montrent que les écarts entre les deux méthodes sont, pour cet exemple relativement faibles.

La Figure 2.11 illustre la distribution des écarts entre les inductions  $B_{FIT}$ , reconstruites à partir des fonctions de forme  $FIT$ , et la  $B_{FEM}$ . Comme on pouvait s'y attendre, les écarts sont principalement concentrés là où les variations de champs sont les plus importantes soit autour de l'entrefer et dans les angles.

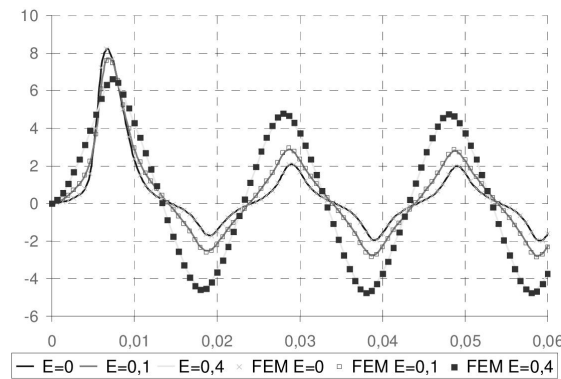
**Figure 2.11.:** Distribution des écarts entre l'induction  $B_{FIT}$  et  $B_{FEM}$ 

### 2.7.2.2. Grandeurs globales

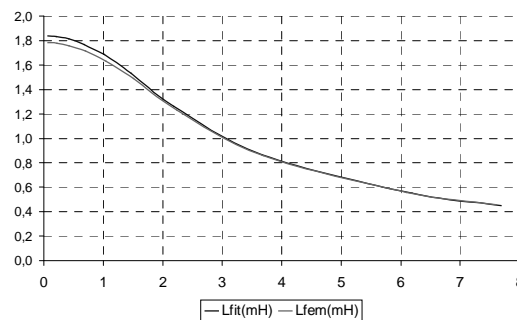
L'étude en tenant compte de la non linéarité des matériaux magnétiques a aussi été effectuée. Pour la FIT et la FEM, la méthode de résolution non linéaire est



la méthode dite de substitution. Le test d'arrêt du solveur est évidemment fixé à la même valeur. Pour illustrer les simulations les Figure 2.13 et Figure 2.12 montrent l'évolution du courant en fonction du temps pour différents entrefers et l'évolution du ratio entre le flux et le courant en fonction du courant. L'écart est sensible pour les faibles valeurs de courant mais devient négligeable lorsque l'effet de la saturation augmente. Cette bobine a aussi été modélisée en prenant en compte le comportement hystérétique des matériaux ferromagnétiques<sup>7</sup>.



**Figure 2.12.:** Évolution du courant pour différents entrefers avec F.I.T et la F.E.M



**Figure 2.13.:** Évolution de l'inductance en fonction de l'entrefer calculée par la F.I.T et la F.E.M

### 2.7.2.3. Comportement numérique.

Comme le prévoit la théorie, les matrices FIT et FEM sont différentes. La matrice FIT est moins pleine que la matrice FEM car la FIT génère moins de connectivité entre les inconnues. Du point de vue technique, les assemblages des matrices FEM

<sup>7</sup> "Hysteresis phenomenon implementation in FIT : Validation with Measurements", J. Korecki, A. Benabou, Y. Le Menach, F. Piriou, J.-P. Ducreux. IEEE Trans. Mag., Vol. 46, no 8, pp. 3285-3288, August 2010.

et FIT peuvent être codés différemment. L'assemblage de la matrice FEM nécessite deux boucles pour le calcul des termes élémentaires, une sur les éléments et une pour l'intégration numérique en utilisant une méthode de quadrature. Par contre, la FIT ne requiert pas d'intégration numérique (elle est intrinsèque à la méthode). De plus, l'utilisation des hexaèdres engendre la même connectivité entre les inconnues et fixe un nombre identique de termes non nuls par ligne (comme pour les différences finies). Dans ces conditions, l'assemblage de la matrice peut se faire à l'aide d'une unique boucle sur les inconnues. Le temps d'assemblage de la matrice FIT est donc plus court que celui requis par la matrice FEM. Par contre, le nombre d'itérations de la méthode du gradient conjugué nécessaire à la résolution du système est quasiment le même. Mais, comme la matrice FIT comprend moins de termes non nuls, le temps de résolution est, de ce fait, plus court.

### 2.7.3. Conclusion

Les résultats présentés ici permettent de donner de quelques comparaisons entre la FIT et la FEM. De nombreuses autres applications ont été étudiées au laboratoire, principalement par J.Korecki lors de sa thèse. Les résultats globaux obtenus par la FIT et la FEM tels que l'énergie, le courant et les flux sont souvent très proches<sup>8</sup>. Mais l'absence de fonction d'interpolations pour la FIT nuit fortement à la qualité de la solution sur les grandeurs dérivées telles que le couple et les forces. L'utilisation exclusive des hexaèdres réduit grandement le nombre d'applications que l'on peut traiter. La Cell-Method, basée sur les mêmes hypothèses que la FIT, permet l'emploi de tétraèdres ou de prismes. Malheureusement, la décomposition en micro cellules ralentit la méthode.

Nous avons aussi étudié la FIT dite conforme que l'on appelle la C-FIT [Clemens02.1, Clemens04, Podebrad03]. Cela consiste à ne pas discrétiser les interfaces entre les différents milieux par les facettes duales ou primales des éléments. Cette approche est très séduisante car le maillage devient indépendant de la géométrie. Toutefois la C-FIT ne permet pas d'assurer la continuité des composantes normales ou tangentielles des champs aux interfaces et cela se traduit par une qualité médiocre de la solution locale. Afin d'obtenir une qualité acceptable le nombre d'inconnues doit être augmenté considérablement mais, dans ce cas, la C-FIT n'est pas nécessairement plus rapide que la FEM pour une qualité de solution égale.

Reste à la FIT sa rapidité. Sur certains exemples, nous avons constaté que la FIT était deux fois plus rapide que la FEM. D'après la loi de Moore (doublement annuel de la puissance de calcul des ordinateurs), en termes de temps de calcul, la FEM a un an de retard sur la FIT. Nous verrons, dans le chapitre 4 concernant la résolution des systèmes linéaires, comment nous pouvons tirer partie de la rapidité de la FIT.

---

8. "Numerical solutions of Electrokinetic and Magnetostatic problems with imposed Global Quantities Using FEM and FIT", T. Henneron, J. Korecki, Y. Le Menach, S. Clénet, F. Piriou, Proc., CBMAG, July 2006.

## 3. Outils de calcul

Dans les deux premiers chapitres, nous avons défini les problèmes d'électromagnétisme à résoudre limités à l'ARQS et présenté des méthodes de discrétisation possibles. Toutefois les méthodes présentées sont génériques et il est nécessaire de développer d'autres outils pour modéliser correctement des dispositifs électrotechniques. Par exemple, pour modéliser les convertisseurs électromécaniques il est indispensable de prendre en compte le mouvement. De plus, afin d'évaluer la qualité des solutions numériques obtenues, il faut développer des estimateurs d'erreurs numériques. Mais commençons par présenter les différentes méthodes de prise en compte du mouvement.

### 3.1. Mouvement

Pour modéliser des machines électriques tournantes, il faut évidemment prendre en compte le mouvement du rotor. Généralement, vu leur rigidité, les déformations des pièces magnétiques ne sont pas prises en compte et cela, malgré les efforts qu'elles subissent. Cette hypothèse induit que le maillage des pièces peut rester identique. Par conséquent, la prise en compte du mouvement d'une pièce par rapport à une autre peut être modélisé à l'aide de techniques de recollement de maillage. Dans la suite, nous allons présenter et comparer plusieurs techniques

#### 3.1.1. Problématique

La Figure 3.1 représente un domaine d'étude avec mouvement. Le domaine  $\mathcal{D}_m$  se déplace à l'intérieur du domaine  $\mathcal{D}_f$ . Pour simplifier l'étude, les domaines  $\mathcal{D}_m$  et  $\mathcal{D}_f$  sont considérés rigides et non conducteurs. Cela exclut la création de courants induits dus aux variations de flux engendrés par le mouvement.

Pour le modèle mathématique, il faut reprendre le système (Équation 1.16) et les conditions aux limites (Équation 1.17) qui s'appliquent dans le domaine  $\mathcal{D}_m$  (mobile) et  $\mathcal{D}_f$  (fixe). Mais à ce modèle, il est nécessaire d'ajouter les conditions de continuité des champs sur  $\Gamma_m$ , la surface où a lieu le mouvement entre les deux domaines. Cette surface est usuellement appelée surface de glissement. On doit donc assurer la conservation des composantes tangentielle de  $\mathbf{H}$  et normale  $\mathbf{B}$  sur  $\Gamma_m$  :

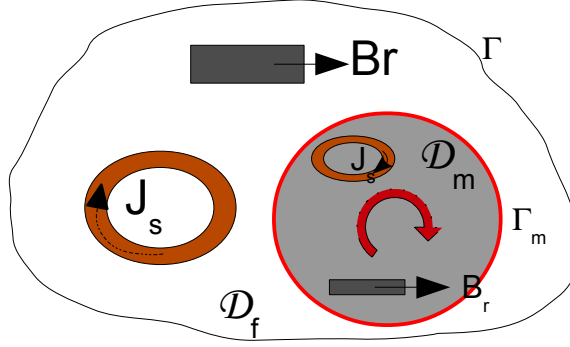


Figure 3.1.: Domaine d'étude avec mouvement

$$\begin{cases} \mathbf{H}_m \times \mathbf{n} |_{\Gamma_m} = \mathbf{H}_f \times \mathbf{n} |_{\Gamma_m} \\ \mathbf{B}_m \cdot \mathbf{n} |_{\Gamma_m} = \mathbf{B}_f \cdot \mathbf{n} |_{\Gamma_m} \end{cases} \quad (3.1)$$

Généralement, pour prendre en compte le mouvement, les maillages des domaines  $\mathcal{D}_m$  et  $\mathcal{D}_f$  glissent sur  $\Gamma_m$  en induisant un maillage non conforme. Les méthodes de prise en compte devront donc respecter, le mieux possible, la continuité de la composante assurée naturellement par la formulation employée. De nombreuses techniques de prise en compte du mouvement plus au moins performantes, ont été développées depuis le milieu des années 1980. Il est à noter que le mouvement rotatif d'une machine est très spécifique et que, dans ces conditions, des techniques dédiées à ce type de mouvement peuvent être efficaces.

### 3.1.2. État de l'art

Seuls seront considérés les mouvements en rotation et linéaire d'une machine électrique. Pour ce type de problème, il existe un entrefer dans lequel l'énergie électromagnétique est concentrée. De plus, l'entrefer est le lieu où le mouvement doit être modélisé. Par conséquent, la modélisation du mouvement doit être particulièrement précise pour éviter de générer des erreurs numériques inacceptables qui seraient particulièrement pénalisantes pour la détermination du couple électromagnétique. Il faut notamment assurer, le mieux possible, la condition (3.1).

La méthode de 'base' utilisée par toutes les autres méthodes est la méthode du pas bloqué [Preston88, Boualem98]. Elle consiste à mailler régulièrement la surface sur laquelle le mouvement sera opéré. Le mouvement s'effectuera par pas ou par des multiples entiers de pas de maillage en modifiant la connectivité des éléments<sup>1</sup>. Les

1. "3D computation of a claw pole magnet machine using a scalar potential formulation", Y. Le Ménach, S. Clénet, F. Piriou, J.-F. Létourneau, P. Viarouge, E.P.J. Applied Physics, Vol. 12, no 3, pp. 175-182, 2000.

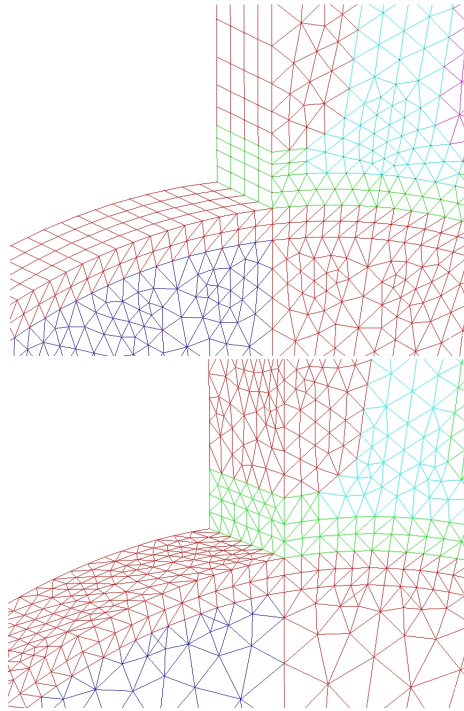
intérêts de cette méthode résident dans la conservation de la conformité du maillage et sa non déformation. De ce fait, la continuité de la solution est garantie entre chaque pas mouvement. L'inconvénient majeur est la relation de proportionnalité entre le pas de temps et la vitesse de déplacement. Pour pallier cet inconvénient la bande de mouvement a été développée [Davat85, Sadowski92, Dular01] mais cela fait apparaître un bruit numérique dû à la déformation du maillage. Ces deux méthodes sont très simples à mettre en œuvre car elle ne requiert aucun traitement mathématique supplémentaire. Afin d'éviter ce bruit, I.Tsukerman suivie par S. Lepaul ont développé la méthode Overlapping [Tsukerman92, Lepaul99]<sup>2</sup>. Cette méthode, très astucieuse, consiste à prolonger le maillage lié au stator jusqu'au rotor et réciproquement. L'entrefer est donc maillé par deux maillages qui se chevauchent d'où le nom de la méthode. Une condition de Dirichlet est imposée sur les nœuds issus des prolongations des maillages. La mise en œuvre est délicate surtout en 3D et en potentiel vecteur mais la qualité de la solution est excellente [Krebs09.2, Krebs10, Krebs11]. De plus, cette méthode permet de prendre en compte des surfaces non planes ou non cylindriques. Un autre intérêt de la technique overlapping est qu'elle ne dégrade pas le conditionnement du système matriciel à résoudre. Une autre famille de méthode issue des multiplicateurs de Lagrange [Rodger90] à laquelle on peut ajouter la méthode Mortar [Rapetti00, Rapetti02, Antunes05.1, Antunes05.2]. Les travaux de Antunes [Antunes05.2] ont montré que la méthode Mortar et les multiplicateurs de Lagrange sont semblables bien que l'approche initiale soit différente. La méthode de Mortar-Lagrange est basée sur la minimisation de l'écart entre les potentiels donc des champs sur  $\Gamma_m$ . La qualité de la solution obtenue par ces méthodes est aussi excellente. Enfin, il existe aussi des méthodes d'interpolations qui permettent d'assurer la continuité de grandeurs sur les surfaces en mouvement [Perrin-Bit95, Dreher96]. Il existe encore d'autres méthodes telles que le macro élément qui consiste à établir une solution analytique de l'induction dans l'entrefer et de la coupler avec la méthode des éléments finis. Cette technique, est très précise mais conduit aussi à une matrice pleine liant les inconnues du stator et du rotor.

Il est délicat d'établir un classement de ces méthodes tant les critères à considérer sont nombreux. Les deux premières méthodes, pas bloqué et surface de glissement, conservent un maillage conforme et la condition 3.1 est naturellement respectée par les méthodes de discrétisation. Il en résulte qu'elles sont simples à mettre en œuvre. Toutes les autres méthodes autorisent un maillage non conforme. Dans ces cas, la différence entre les méthodes est la manière de vérification de la condition 3.1. Cela revient à faire du recollement de maillage.

La Figure 3.2 représente deux maillages qui peuvent être utilisés pour modéliser une machine avec la prise en compte mouvement. Le premier maillage est régulier. On peut y appliquer toutes les méthodes et notamment celle du pas bloqué et de la bande de mouvement. Par contre, sur le second maillage la surface, de glissement  $\Gamma_m$  est maillée irrégulièrement. Après le déplacement du rotor, le maillage ne sera

---

2. "Comparison of methods to simulate the movement of electrical machine in the 3D FEM", X.Shi, Y. Le Menach, J.-P. Ducreux, F. Piriou, Proc., Compumag, Shenyang, June 2005



**Figure 3.2.:** Maillages utilisés pour modéliser le mouvement

plus conforme. Il sera alors nécessaire d'employer une méthode de prise en compte plus performante que le pas bloqué ou la bande de mouvement.

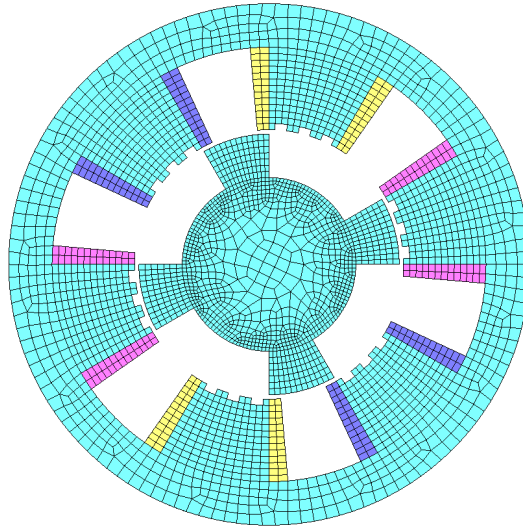
### 3.1.3. Comportement numérique des méthodes

Afin de comparer les différentes méthodes présentées précédemment, Xiaodong Shi a implémenté dans Code\_Carmel un grand nombre de ces méthodes toutes appliquées à la formulation en potentiel scalaire et certaines à la formulation en potentiel vecteur<sup>3, 4</sup>. La comparaison a été effectuée sur plusieurs machines. Toutefois, pour évaluer la qualité de la solution des méthodes, nous nous intéresserons particulièrement à la valeur du couple réactant d'une machine 6/4. Cette machine, purement fictive, dont le maillage des parties actives est présenté sur la Figure 3.3, possède des dents crànelées afin d'augmenter la variation de réluctance. L'entrefer est maillé régulièrement avec un pas de discrétisation de 2.5 degrés. Pour le pas bloqué, le couple est donc calculé tous les 2.5°. Par contre, pour les autres méthodes, le calcul est opéré tous les 0.833 degrés.

---

3. "Comparison of different techniques to model the movement in 3D with FEM", X. Shi, Y. Le Menach, J.-P. Ducreux, F. Piriou, COMPEL, Vol. 25, no 1, pp. 17-30, 2006.

4. "Comparison between the mortar element method and the polynomial interpolation method to model the movement in the Finite Element Method", X. Shi, Y. Le Menach, J.-P. Ducreux, F. Piriou, IEEE Trans. Mag., Vol. 44, no 6, pp. 1314-1317, June 2008

**Figure 3.3.:** Machine réluctante 6/4

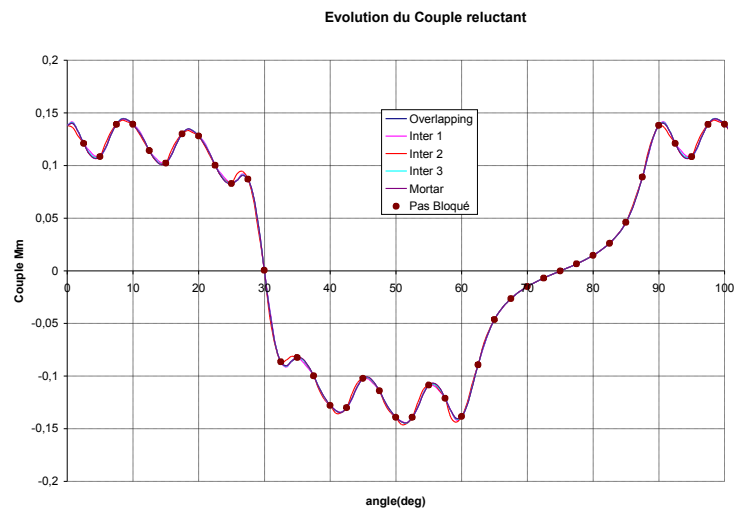
Méthodes	Temps CPU		Itér.	Stockage système	
	Temps s	Rapport		Termes nonnuls	Rapport
Pas Bloqué	3.656	1.0	150	88281	1.0
Overlapping	3.66	1.0	151	88857	1.0068
Interpolation du 1 <sup>ere</sup> ordre	4.196	1.14	152	89281	1.0116
Interpolation du 2 <sup>nd</sup> ordre	4.202	1.149	152	90585	1.0264
Interpolation du 3 <sup>eme</sup> ordre	4.22	1.154	152	91737	1.0394
Mortar	19.94	5.45	157	250713	2.84

**Table 3.1.:** Formulation en potentiel scalaire ; comparaison des méthodes

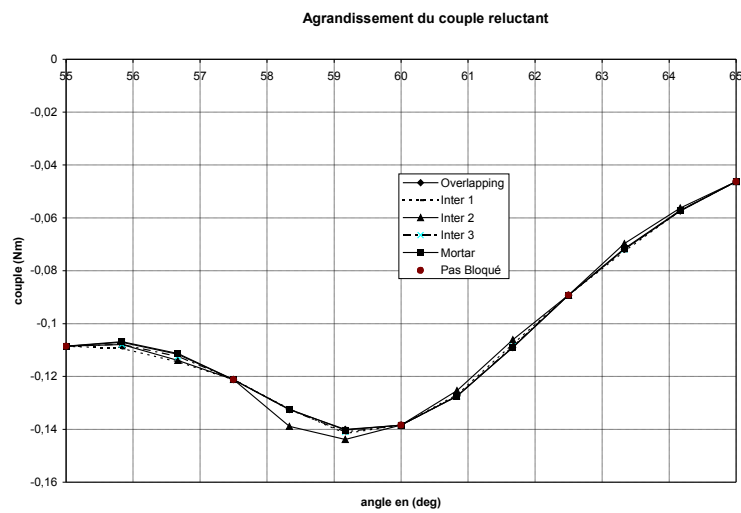
L'évolution de couple en fonction de la position est présentée sur la Figure 3.4. Les points représentent les valeurs du couple obtenues par la méthode du pas bloqué. A toutes les positions multiples de  $2.5^\circ$ , toutes les méthodes donnent le même résultat que le pas bloqué. L'évolution est quasi la même pour toutes les méthodes. C'est pourquoi un agrandissement de l'évolution du couple est proposé sur la figure (Figure 3.5). Mais même sur cette figure, il est difficile de mettre en défaut la qualité des solutions. Dans ces conditions, seul le comportement numérique peut départager les méthodes.

Pour les raisons évoquées précédemment, la méthode du pas bloqué est prise comme référence pour le temps de calcul et pour le nombre de termes non-nuls de la matrice. La synthèse des simulations est présentée dans le Tableau 3.1.

Il en résulte que la méthode overlapping est très efficace avec un temps quasiment égal à celui du pas bloqué. Les méthodes d'interpolation engendrent un surcoût de temps d'environ 15%. Par contre, la méthode Mortar telle qu'elle a été implémentée



**Figure 3.4.:** Évolution du couple réductant



**Figure 3.5.:** Agrandissement de l'évolution du couple réductant



est très lente. Pour toutes ces méthodes, le nombre de termes non nuls est quasi constant et le conditionnement de la matrice n'est pas affecté car le nombre d'itérations du Gradient Conjugué reste quasi identique. Au regard de ce tableau, qui ne représente pas une comparaison exhaustive des méthodes, en considérant le rapport qualité de solution/vitesse, la méthode d'overlapping semble être la meilleure.

### 3.1.4. Applications

Nous allons présenter ici deux applications industrielles qui ont nécessité la maîtrise et l'emploi de méthodes de prise en compte du mouvement. La première application est la modélisation 3D d'un turbo-alternateur avec la prise en compte des têtes de bobines statoriques et rotoriques. La seconde application concerne la prise en compte des excentricités rotoriques d'un alternateur.

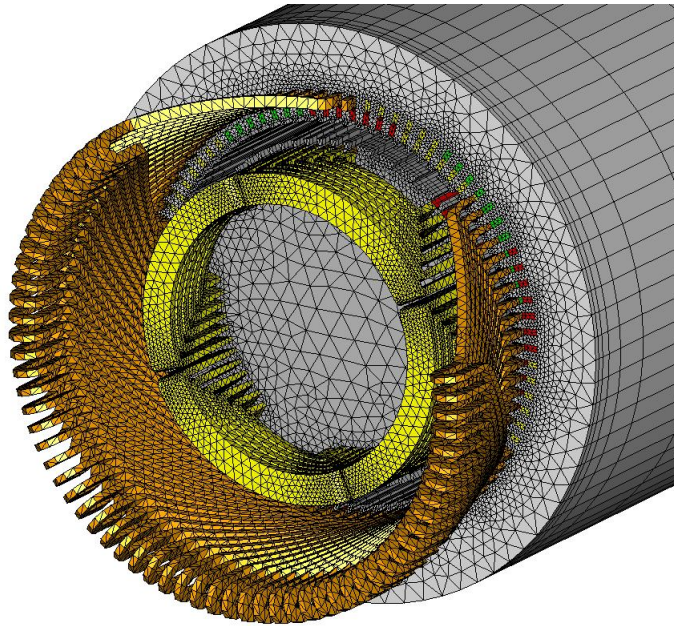
#### 3.1.4.1. Prise en comptes de têtes de bobines

La modélisation des têtes de bobines à l'aide de la méthode des éléments finis n'est pas récente [Brahimi93, Richard96, Ranran09] et date du milieu des années 90. Mais cela reste, malgré tout, encore un défi pour les utilisateurs et développeurs. En effet, la complexité des géométries rend difficile la CAO et l'imposition des termes sources<sup>5</sup>. Actuellement, de nombreux travaux portent sur les efforts exercés sur ces têtes de bobine. Des travaux encore plus ambitieux apparaissent sur les refroidissements de machines en tenant compte de ces têtes de bobines. Les résultats présentés dans ce rapport se focalisent sur le comportement électromagnétique de la machine. Toujours dans le cadre de la thèse de X. Shi, un turboalternateur a été modélisé en rotation en tenant compte des têtes de bobines. Pour cela, il a développé des méthodes d'interpolations pour simuler le mouvement<sup>6</sup>. Une vue partielle du maillage est donnée sur la Figure 3.6. Il est possible d'observer sur la Figure 3.7, l'influence des têtes de bobines sur les parties ferromagnétiques frontales du turbo-alternateur. En effet, on remarque un effet de saturation magnétique sur le pied des dents. Afin d'effectuer une comparaison, nous avons tracé la caractéristique à vide (Figure 3.8) obtenue avec le maillage 2D extrudé (M1), le maillage 3D M3 (Figure 3.6) ainsi que la caractéristique à vide expérimentale. A partir de cette figure, on peut noter que l'amplitude de la f.e.m. à vide en tenant compte des têtes de bobines, est légèrement supérieure (entre 2% et 3%) à celle sans têtes de bobines.

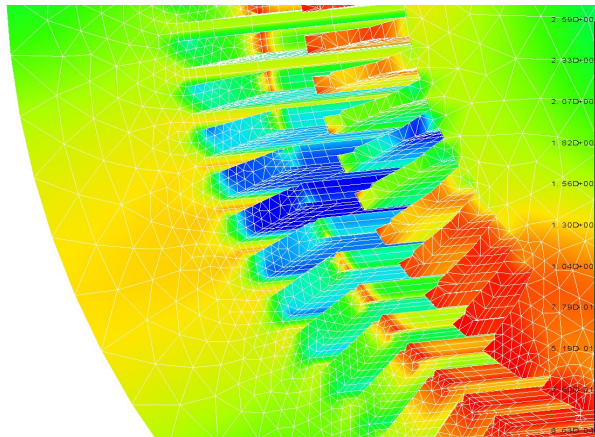
---

5. "3D approaches to determine the end winding inductances of a permanent-magnet linear synchronous motor", A. Tounzi, T. Henneron, Y. Le Menach, R. Askour, E. Dumetz, F. Piriou, IEEE Trans Mag, Vol. 40, no. 2, pp. 758-761, March 2004.

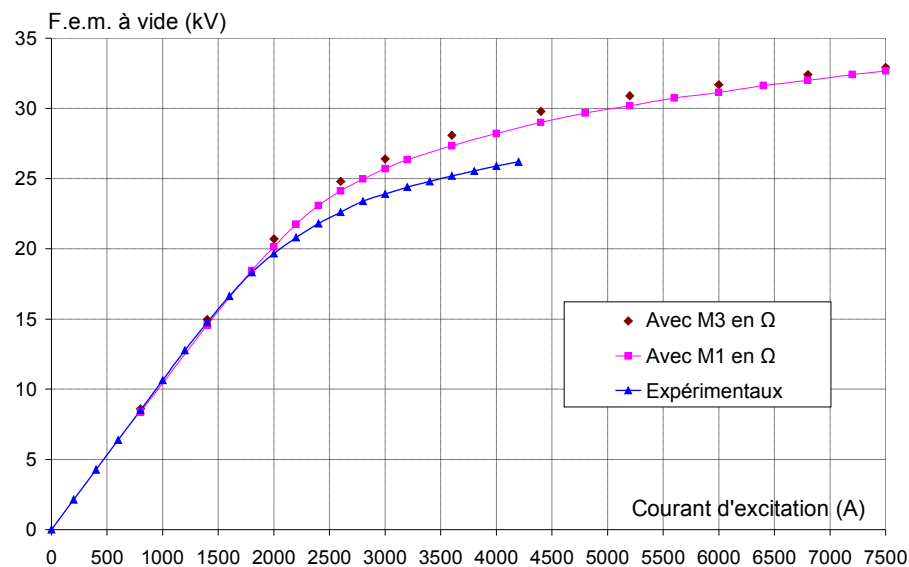
6. "A hybrid movement method to model electrical machines with end winding in 3D Finite Element Method", X. Shi, Y. Le Menach, J.-P. Ducreux, F. Piriou, Proc., CEFC, Miami, May 2006.



**Figure 3.6.:** Maillage de têtes de bobines (Thèse de X. Shi)



**Figure 3.7.:** Induction dans les parties ferromagnétiques (Thèse de X. Shi)



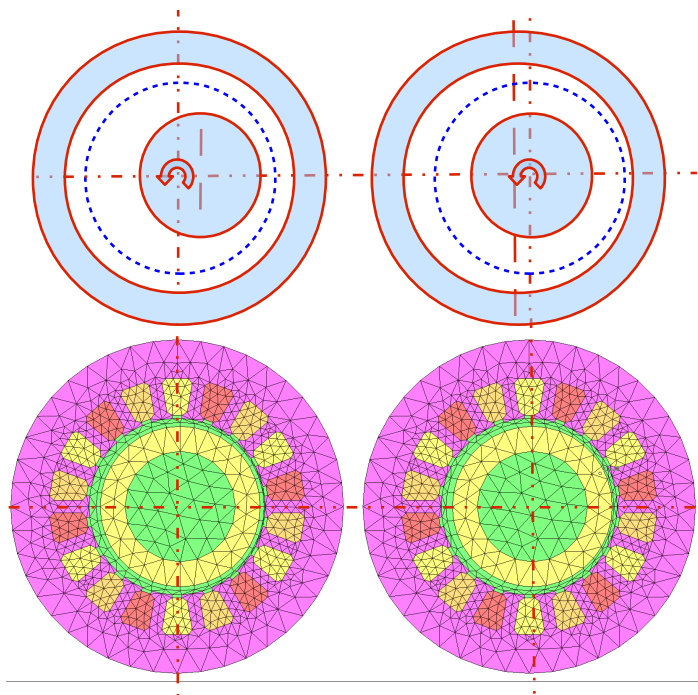
**Figure 3.8.:** F.e.m en vide avec et sans têtes de bobines (Thèse de X. Shi)

### 3.1.4.2. Excentricités dans les machines

Avec le vieillissement des machines électriques apparaissent des défauts d'excentricité dus à l'usure des paliers ou des roulements. Ces défauts génèrent évidemment des vibrations, qui à leurs tours, peuvent provoquer des bruits intolérables voire des destructions de matériel. Actuellement, de nombreuses études sont menées pour évaluer ces excentricités afin de prévoir des interventions de maintenance. Des approches analytiques et expérimentales ont fortement été développées pour observer l'influence des excentricités sur les courants débités ou absorbés. Des analyses sur les vibrations ont également été aussi effectuées. De notre côté, nous nous intéressons aux machines de très fortes puissances dans lesquelles il est possible de mesurer l'induction dans l'entrefer afin de déterminer les excentricités. Dans ces conditions, il faut prendre en compte les excentricités dans les méthodes de prise en compte du mouvement. Il existe deux types d'excentricités : statique et dynamique<sup>7</sup>. On considère une excentricité statique si l'axe du rotor est fixe mais décentré par rapport l'axe du stator. Par contre l'excentricité dynamique se caractérise par un effet de balourd qui est dû à une rotation de l'axe de rotation du rotor autour de l'axe du stator. Il est assez simple de simuler ces types d'excentricités en utilisant les méthodes décrites précédemment. Pour cela, il est nécessaire de fixer la surface de glissement centrée en (0,0). Cette surface est matérialisée (Figure 3.9) par les lignes

7. "Study of Static and Dynamic Eccentricities of a Synchronous Generator Using 3D FEM", B. A. T. Iamamura<sup>1</sup>, Y. Le Menach, A. Tounzi, N. Sadowski, E. Guillot, IEEE Trans. Mag., Vol. 46, no 8, pp. 3516-3519, August 2010.

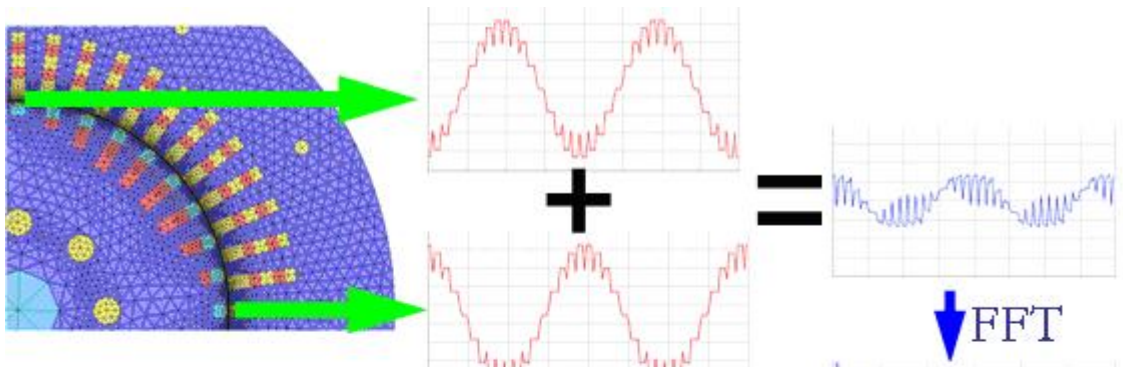
en pointillés. Si on déplace les éléments du stator (dessin de droite) on génère une excentricité statique. Inversement (dessin de gauche Figure 3.9 ) si les éléments du rotor, sont déplacés on traite l'excentricité dynamique. Du point de vue magnétique, pour l'excentricité statique la réluctance de l'entrefer n'est pas uniforme mais elle reste constante quelle que soit la position du rotor (à condition que le rotor soit lisse). Par contre, dans le cas dynamique cette réluctance dépend de la position du rotor.



**Figure 3.9.:** Exemple d'excentricité

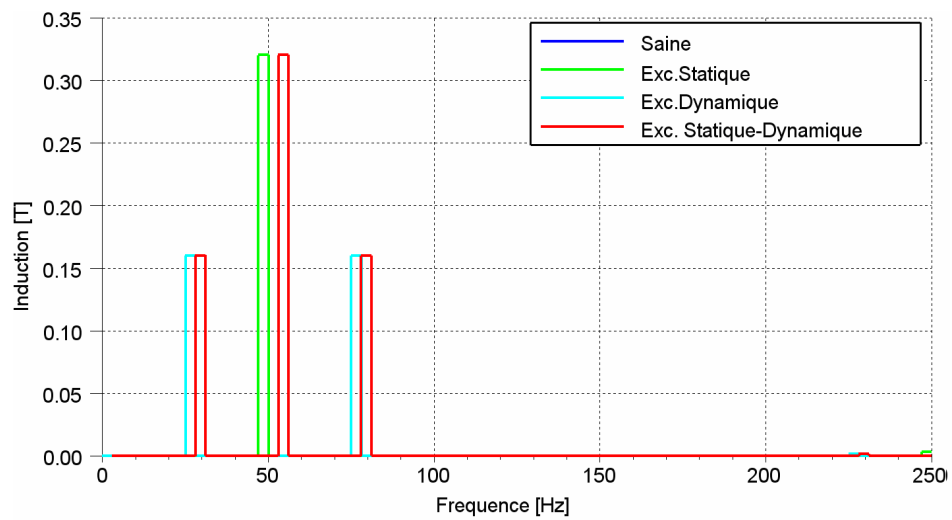
Il est possible de combiner les deux types d'excentricité en déplacement tous les nœuds du maillage (rotor et stator) sauf ceux de la surface de glissement. La détection des excentricités est effectuée en analysant, à l'aide d'une FFT, le signal issu de la somme de deux valeurs d'induction radiales présentes dans l'entrefer décalées spatialement de  $90^\circ$  et temporellement d'une demi-période électrique. La Figure 3.10 présente schématiquement cette méthode de détection de défauts.

Il en résulte que lorsque la machine est parfaitement saine, ce signal est nul. La FFT du signal issue d'une excentricité statique fait apparaître un premier harmonique à 50 Hz . Par contre, une excentricité dynamique génère un signal dont la décomposition harmonique laisse apparaître deux raies identiques : une à 25 Hz et l'autre à 75Hz. Enfin un défaut combiné (statique et dynamique) engendre un signal dont la décomposition harmonique correspond à la somme des FFT des signaux données par une excentricité statique et une excentricité dynamique. A ces défauts d'excentricités on peut ajouter un défaut de parallélisme (axes non parallèle) qui peut se



**Figure 3.10.:** Méthode de détection des excentricités (Thèse de B. Iamamura)

modéliser uniquement en 3D. L'exploitation et la validation de ces simulations est détaillée dans le rapport de thèse de B.Iamamura.



**Figure 3.11.:** FFT de signaux résultants de l'addition des inductions radiales dans l'entrefer correspondants aux différentes excentricités (Thèse de B. Iamamura)

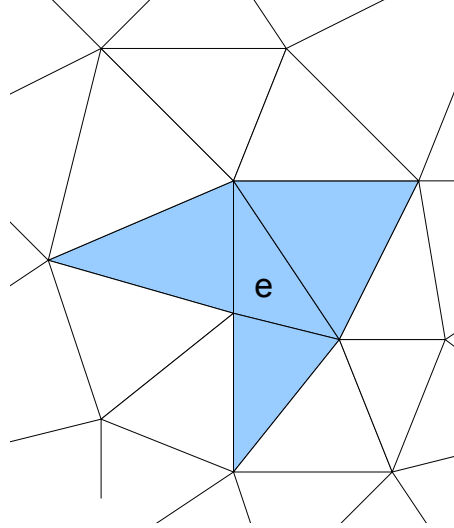
## 3.2. Estimateurs d'erreur numérique

Le résultat d'une simulation numérique doit faire l'objet d'une analyse. En effet, l'utilisateur doit être capable de critiquer le résultat en se basant sur son bon sens physique et sur un calcul analytique d'ordre de grandeur. Malheureusement, un tracé de champ en 3D d'un problème magnétodynamique est difficile à interpréter. De plus, la localisation des erreurs numériques reste difficile à prédire. Les utilisateurs agissent naturellement sur un paramètre pour réduire les erreurs numériques qui est la finesse du maillage. Toutefois un maillage anisotrope (tailles de mailles différentes) peut fournir une qualité de solution bien meilleure qu'un maillage isotrope à condition d'avoir raffiné aux endroits où la méthode des éléments finis génère les erreurs les plus grandes. C'est pourquoi, pour valider un modèle numérique, il est intéressant de quantifier l'erreur numérique, ou du moins de l'estimer, afin de la localiser et de la réduire. Pour cela, il est nécessaire de définir l'erreur et un estimateur égal, si possible, à cette erreur ou à minima qui se comporte comme cette erreur.

Il existe plusieurs familles d'estimateurs : les estimateurs *a priori* qui permettent d'évaluer la vitesse de convergence d'un schéma numérique et les estimateurs *a posteriori* qui permettent de quantifier l'erreur d'approximation entre le modèle continu et le modèle discret. Les estimateurs *a priori* sont développés par des spécialistes d'analyse numérique et sont principalement utilisés pour comparer des schémas entre eux. Par contre, de nombreux physiciens ont développé des estimateurs *a posteriori* en se basant sur des considérations purement physiques telles que la minimisation de l'énergie [Zienkiewicz87, Nicaise05, Ladas08]. Un autre type d'estimateur s'appuie sur le respect des lois de comportement [Ladevèze83, Rikabi88, Cendes85]. De plus, au laboratoire certains estimateurs spécifiques aux problèmes de CND ont été développés [Krebs09.2]. On qualifie ces estimateurs d'équilibrés. D'autres estimateurs se basent sur le saut des composantes tangentielle et normale des champs entre chaque élément [Hahn88]. Des études comparatives de ces derniers estimateurs ont été effectuées sur des problèmes magnétodynamiques [Li94]. On trouve aussi les estimateurs hiérarchiques qui évaluent et comparent la solution obtenue avec des maillages constitués d'éléments d'ordre différent [Bank93, Dular09]. Enfin, on trouve la famille d'estimateur d'erreur résiduel basé sur l'évaluation du résidu de l'équation à résoudre sur chaque élément et sur l'évaluation des conditions faiblement assurées par les formulations [Beck00, Creusé03, Sterz06]. Ces estimateurs sont utilisés pour adapter le maillage à la solution recherchée. Par la suite, on détaillera seulement les estimateurs résiduels et équilibrés. Mais commençons par définir l'erreur.

### 3.2.1. Définitions

Le premier constat est qu'il est possible d'établir deux erreurs : l'erreur locale  $\varepsilon_{\mathcal{L}}$  et l'erreur globale  $\varepsilon_{\mathcal{G}}$ . Cette dernière est simple à déterminer car il s'agit de la norme



**Figure 3.12.:** Exemple de Patch de l'élément 'e' en 2D

de l'écart au sens  $L^2$  entre la solution exacte et la solution approchée, soit :

$$\varepsilon_{\mathcal{G}}^2 = \int_{\mathcal{D}} |u - u_h|^2 d\mathcal{D} \quad (3.2)$$

avec  $u$  la solution exacte,  $u_h$  la solution approchée du problème éléments finis

L'erreur locale  $\varepsilon_{\mathcal{L}}$  est définie sur un morceau de maillage (patch en anglais). Il existe un patch  $\mathcal{P}_e$  par élément qui comprend l'ensemble des éléments qui ont une arête en commun avec l'élément 'e' considéré (voir Figure 3.12). Par rapport à l'erreur globale, seul le domaine d'intégration diffère :

$$\varepsilon_{\mathcal{L}_e}^2 = \int_{\mathcal{P}_e} |u - u_h|^2 d\mathcal{P} \quad (3.3)$$

En conséquence, on a l'inégalité suivante :

$$\varepsilon_{\mathcal{G}}^2 < \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \varepsilon_{\mathcal{L}_e}^2 \quad (3.4)$$

Avec  $\mathcal{T}_h$  qui représente l'ensemble des éléments 'e' du maillage.

Contrairement aux erreurs globales, les estimateurs globaux sont égaux à la somme géométrique des estimateurs locaux. Soit :

$$\eta_{\mathcal{G}}^2 = \sum_{e \in \mathcal{T}_h} \eta_{\mathcal{L}_e}^2 \quad (3.5)$$

Avec  $\eta_{\mathcal{L}}$  et  $\eta_{\mathcal{G}}$  respectivement l'estimateur local et global. Reste à établir un lien entre les estimateurs et les erreurs. Une relation directe est difficile à obtenir. Néanmoins, il est possible de contrôler l'erreur à l'aide des deux inégalités suivantes :

$$\varepsilon_{\mathcal{G}} \leq C_2 \eta_{\mathcal{G}} \quad (3.6)$$

$$C_1 \eta_{\mathcal{L}_e} \leq \varepsilon_{\mathcal{L}_e} \quad (3.7)$$

$C_1$  et  $C_2$  sont des constantes qui dépendent des données du problème à résoudre mais ne dépendent pas du maillage. La majoration (Équation 3.6) de l'erreur par l'estimateur traduit la fiabilité globale d'estimateur alors que sa minoration (Équation 3.7) lui confère son caractère d'efficacité locale. De par ces deux conditions, la diminution de l'estimateur global assure que l'erreur globale diminue et les endroits où les valeurs de l'estimateur local sont élevées indiquent que l'erreur locale y est aussi élevée. La démonstration mathématique de ces notions pour le cas des estimateurs résiduels fait l'objet de la thèse de Z. Tang .

**Remarque :**

Il est à noter qu'on peut exploiter un estimateur en vue d'un remaillage si cet estimateur est efficace et fiable (l'efficacité uniquement ne suffit pas).

#### 3.2.2. Estimateur d'erreur équilibré

On définit l'estimateur équilibré en statique à partir des solutions complémentaires obtenues par la résolution des formulations duales *et* évaluant le niveau de non vérification des lois de comportement (relation d'équilibre) [Rikabi88, Remacle95, Marmin00]. Pour présenter cet estimateur, considérons le cas de la magnétostatique et des formulations en potentiel vecteur et scalaire magnétiques qui fournissent respectivement les valeurs approchées  $\mathbf{B}_h$  et  $\mathbf{H}_h$ . Bien que  $\mathbf{B}_h$  et  $\mathbf{H}_h$  vérifient les deux équations d'équilibre, ils ne vérifient pas la loi de comportement. On peut alors définir l'estimateur local basé sur la non vérification de cette loi comme suit :

$$\eta_{\text{equilibre}, \mathcal{L}}^2 = \|\mathbf{B}_h - \mu \mathbf{H}_h\|_{L^2(T)}^2 \quad (3.8)$$

Les erreurs induites par les formulations sont :

$$\varepsilon_{A, \mathcal{G}}^2 = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} |\mathbf{B} - \mathbf{B}_h|^2 d\mathcal{D} \quad (3.9)$$



$$\varepsilon_{\Omega, \mathcal{G}}^2 = \int_{\mathcal{D}} \mu |\mathbf{H} - \mathbf{H}_h|^2 d\mathcal{D} \quad (3.10)$$

Il s'avère que dans le cas de la magnétostatique, et par extension à l'électrostatique et à l'électrocinétique, la fiabilité globale et l'efficacité locale de cet estimateur peuvent être démontrées à condition de considérer la somme géométrique des deux erreurs égales au carré de l'estimateur. De plus, les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont égales à 1 soit :  $\eta_{\text{équilibre}, \mathcal{L}}^2 \lesssim \varepsilon_{A; \mathcal{G}}^2 + \varepsilon_{\Omega; \mathcal{G}}^2$  et  $\eta_{\text{équilibre}, \mathcal{D}}^2 = \varepsilon_{A; \mathcal{D}}^2 + \varepsilon_{\Omega; \mathcal{D}}^2$ . Cet estimateur fournit l'erreur globale exacte. Mais il est nécessaire de résoudre le problème à l'aide des deux formulations, ce qui, globalement double le temps calcul. Néanmoins, il est possible de construire une solution duale à partir d'une solution primale [Marmin00] et d'en déduire une estimation de l'erreur Équation 3.8.

**Remarque :** Lorsque on applique cet estimateur au cas des formulations de la magnétodynamique  $A - \varphi$  et  $T - \Omega$ , seule l'efficacité locale peut être démontrée. Une hypothèse, qui n'engage que moi, selon laquelle il n'est pas possible d'établir le caractère fiable de l'estimateur est que ces lois de comportement (électrique et magnétique) sont 'mathématiquement' différentes. En effet, en reprenant les diagrammes de Tonti (Figure 1.3 et Figure 2.7) on remarque que la loi d'Ohm et la loi de comportement magnétique ne relient pas les mêmes suites espaces. A.Bossavit qualifie de dysharmonieux l'introduction de la loi d'Ohm dans le diagramme de Tonti (pp 120 [Bossavit93]). En effet, la loi l'ohm contient une dimension temporelle supérieure à la loi de comportement magnétique qui "casse" la symétrie du diagramme. Cette dissymétrie induit que la fiabilité de l'estimateur équilibré ne peut pas être démontrée pour les formulations en potentiels de la magnétodynamique.

### 3.2.3. Estimateur d'erreur résiduel

La famille d'estimateur d'erreur résiduel est basée sur la non vérification des conditions faiblement imposées par les formulations [Beck00]. Prenons par exemple la formulation en potentiel scalaire magnétique, la condition aux limites de type  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0|_{\Gamma_b}$  est imposée faiblement tout comme la continuité de la composante normale de  $\mathbf{B}$  entre chaque élément. De plus,  $\text{div} \mathbf{B} = 0$  est vérifié faiblement sur chaque élément. On montre, d'après des développements s'appuyant, notamment sur une décomposition de Helmholtz adaptée et sur la notion d'interpolé de Clément, que l'estimateur peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\eta_{\text{residu}, \mathcal{L}}^2 = \eta_{T;1}^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{\text{int}} \cap \partial \mathcal{T}} \eta_{F;1}^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{\text{ext}}} \eta_{F;2}^2 \quad (3.11)$$

$$\eta_{T;1}^2 = h_T^2 \|\operatorname{div} \mu(\mathbf{H}_s - \mathbf{grad} \Omega_h)\|_{L^2(T)}^2$$

$$\eta_{F;1}^2 = h_F^2 \|[\operatorname{div} \mu(\mathbf{H}_s - \mathbf{grad} \Omega_h) \cdot \mathbf{n}]_F\|_{L^2(F)}^2$$

$$\eta_{F;2}^2 = h_F^2 \|\operatorname{div} \mu(\mathbf{H}_s - \mathbf{grad} \Omega_h) \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(F)}^2$$

avec :

- $\eta_{T;1}$  la vérification sur chaque élément de l'équation à résoudre appelé résidu volumique,
- $\eta_{F;1}$  l'évaluation du saut de la composante normale de  $\mathbf{B}$  sur chaque facette du maillage,
- $\eta_{F;2}$  l'évaluation de la condition aux limites sur  $\Gamma_b$ ,
- $\mathcal{F}_h^{int}$  l'ensemble des facettes internes,
- $h_T$  le diamètre de la plus petite sphère contenant l'élément,
- $h_F$  le diamètre du plus petit cercle contenant la facette.

Sur les éléments du premier ordre, le résidu volumique est toujours nul car l'induction  $\mathbf{B}$  est constante dans tous les éléments

Pour la formulation en  $\mathbf{A}$ , seuls deux termes existent car la condition aux limites sur  $\Gamma_b$  est imposée fortement, soit :

$$\eta_{residu, \mathcal{L}}^2 = \eta_{T;1}^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{int} \cap \partial \mathcal{T}} \eta_{F;1}^2 \quad (3.12)$$

$$\eta_{T;1}^2 = h_T^2 \left\| \mathbf{J}_s - \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}_h \right) \right\|_{L^2(T)}^2$$

$$\eta_{F;1}^2 = h_F^2 \left\| \left[ \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}_h \times \mathbf{n} \right]_F \right\|_{L^2(F)}^2$$

- $\eta_{T;1}$  la vérification sur chaque élément de l'équation à résoudre,
- $\eta_{F;1}$  l'évaluation du saut de la composante tangentielle de  $\mathbf{H}$  sur chaque facette.

Ces estimateurs sont à la fois fiables et efficaces. Par conséquent, ces estimateurs auront le même comportement que l'erreur. Toutefois, les constantes  $C_1$  et  $C_2$  ne sont pas connues ce qui peut donner des valeurs très importantes ou très faibles à l'estimateur.

Pour les formulations de la magnétodynamique, il est nécessaire d'adapter cet estimateur en modifiant le résidu volumique. Pour la formulation  $A - \varphi$ , il faut évaluer le saut de la composante normale de  $\mathbf{J}$  entre chaque élément ainsi que la condition de  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$  aux interfaces des domaines conducteur et non conducteur<sup>8</sup>. Par contre, pour la formulation  $T - \Omega$ , c'est le saut de la composante tangentielle de  $\mathbf{E}$  qui doit être évalué. La condition  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$  aux interfaces des domaines conducteur et non conducteur est, quant à elle, respectée fortement. La fiabilité et l'efficacité de cet estimateur ont été prouvées dans les cas où il n'existe, sur les frontières, que les conditions sur la composante normale de  $\mathbf{B}$ . Actuellement, les travaux de S.Nicaise, E. Creusé et Z. Tang auxquels nous sommes associés visent à lever cette limitation ainsi que les restrictions de cet estimateur engendrées par la non connexité du domaine conducteur.

### Remarque

Il est à noter que l'emploi de la restriction aux éléments tétraédriques du 1<sup>er</sup> ordre conduit à rendre nul les termes volumiques pour la formulation en potentiel scalaire et les termes volumiques pour la formulation en potentiel vecteur dépourvus de densité de courant.

## 3.2.4. Validation et Applications

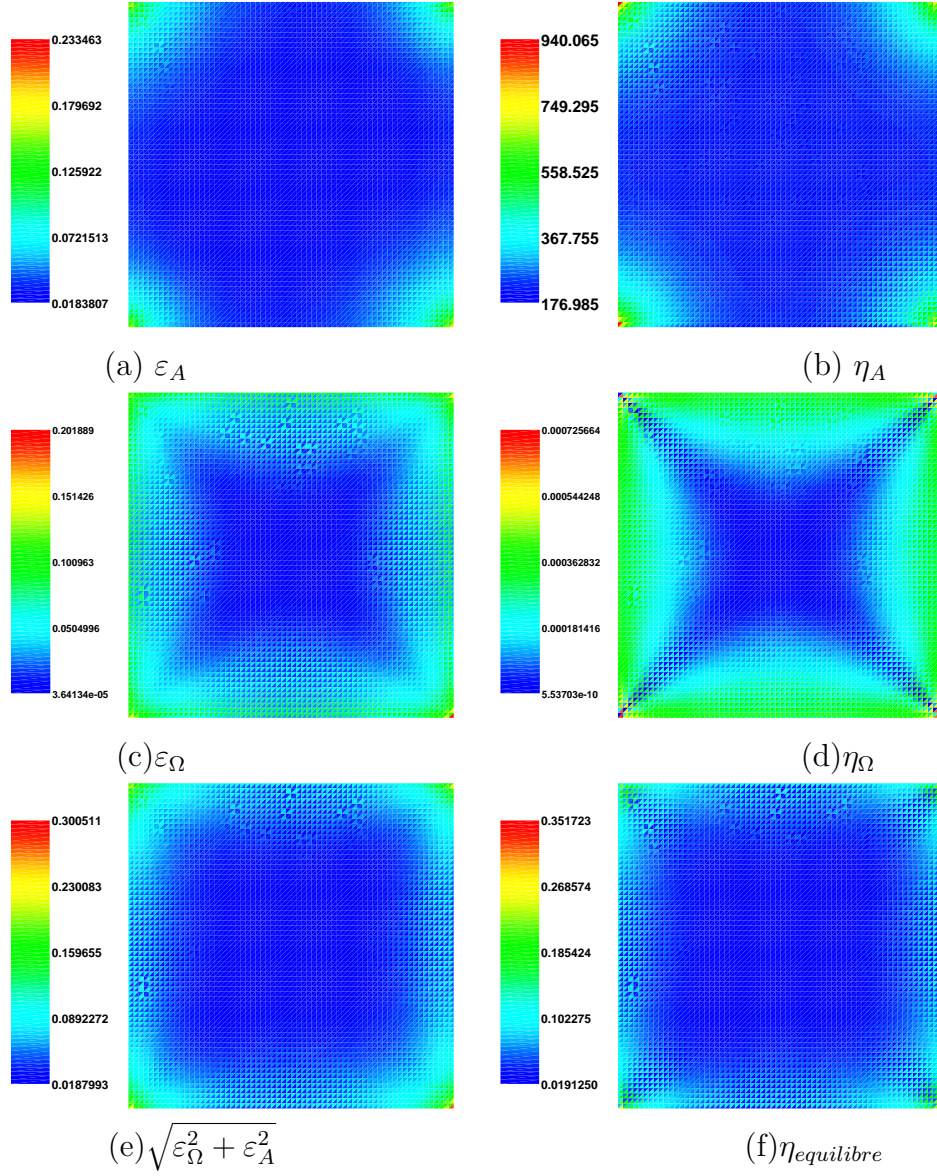
### 3.2.4.1. Validation des estimateurs<sup>9</sup>

On se propose de tester l'estimateur sur un cas où la solution est connue comme le cube [Albanese90] déjà présenté au chapitre précédent. Le calcul a été effectué avec les deux formulations en  $\mathbf{A}$  et  $\Omega$ . Les erreurs exactes en  $\mathbf{A}$  et  $\Omega$  ainsi que les estimateurs résiduels respectivement appelés  $\varepsilon_A$ ,  $\varepsilon_\Omega$ ,  $\eta_A$  et  $\eta_\Omega$  ont été évalués.

---

8. "Residual-based a posteriori estimators for the  $A-\varphi$  magnetodynamic harmonic formulation of the Maxwell system", E. Creusé, S. Nicaise, Z. Tang, Y. Le Menach, N. Nemitz, F. Piriou, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 22, no 5, 1150028 (30 pages), January 2012.

9. "Comparison of residual and equilibrated error estimators for FEM applied to magnetostatic problems", Z. Tang, Y. Le Menach, E. Creusé, S. Nicaise, F.Piriou, N. Nemitz, Proc., Compumag, Sydney, July 2011.

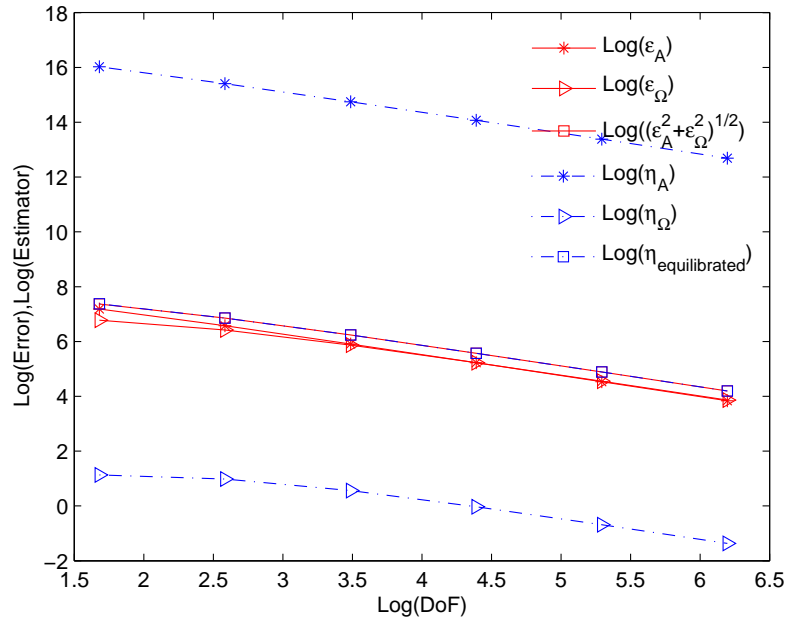


**Figure 3.13.:** Carte des estimateurs locaux et des erreurs locales (Thèse de Z. Tang)

Sur la Figure 3.13 sont présentées, sur la première ligne, les cartes d'erreurs en  $\mathbf{A}$   $\varepsilon_A$  et l'estimateur en  $\mathbf{A}$   $\eta_A$ . La répartition donnée par l'estimateur est la même que l'erreur exacte ce qui montre que l'estimateur résiduel est localement correct. Comme attendu, les valeurs de l'estimateur ne sont pas égales aux valeurs de l'erreur exacte. Les mêmes observations peuvent être effectuées concernant l'erreur en  $\Omega$   $\varepsilon_\Omega$  et l'estimateur  $\eta_\Omega$ . Les deux cartes sont différentes. L'erreur  $\varepsilon_\Omega$  est plus diffuse que l'erreur  $\varepsilon_A$  car la formulation en  $\Omega$  entraîne des erreurs sur toute la frontière où est imposée une condition sur la composante normale de  $\mathbf{B}$ . On peut remarquer aussi que les valeurs des erreurs en  $\mathbf{A}$  et  $\Omega$  sont du même ordre. Enfin, sur la dernière ligne,

on trouve la distribution de l'estimateur équilibré qui présente la même distribution que la norme 2 de la somme des erreurs  $\varepsilon_\Omega$  et  $\varepsilon_A$ . Cela valide le fait que l'estimateur équilibré est aussi localement efficace. Le raffinement du maillage à partir des trois estimateurs fournira trois raffinements différents.

La Figure 3.14 montre l'évolution des erreurs globales et des estimateurs globaux en fonction du nombre d'inconnues. Le raffinement du maillage est uniforme (indépendant de l'erreur locale ou de l'estimateur local). Tous les estimateurs ont le même comportement que l'erreur exacte et on vérifie bien que l'estimateur équilibré est bien égal à la somme géométrique des erreurs. Par contre, les estimateurs résiduels donnent des valeurs relatives (la constante  $C_2 \neq 1$ ).



**Figure 3.14.:** Évolution des erreurs et des estimateurs en fonction nombre d'inconnues(Thèse de Z .Tang)

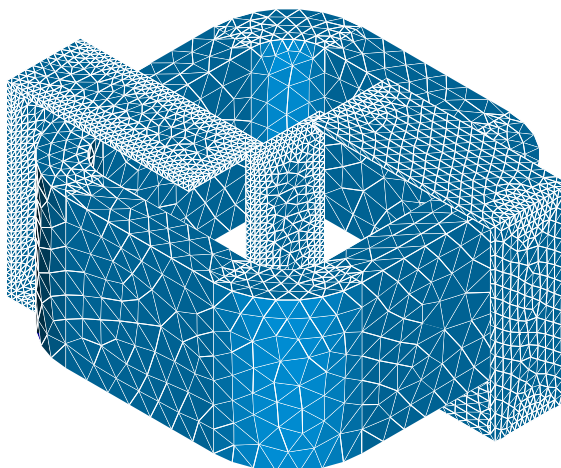
### 3.2.4.2. Applications

Afin de montrer les capacités des estimateurs présentés par les relations ( Équation 3.11 et Équation 3.12), un cas magnétostatique et un cas magnétodynamique ont été traités.

#### Application magnétostatique

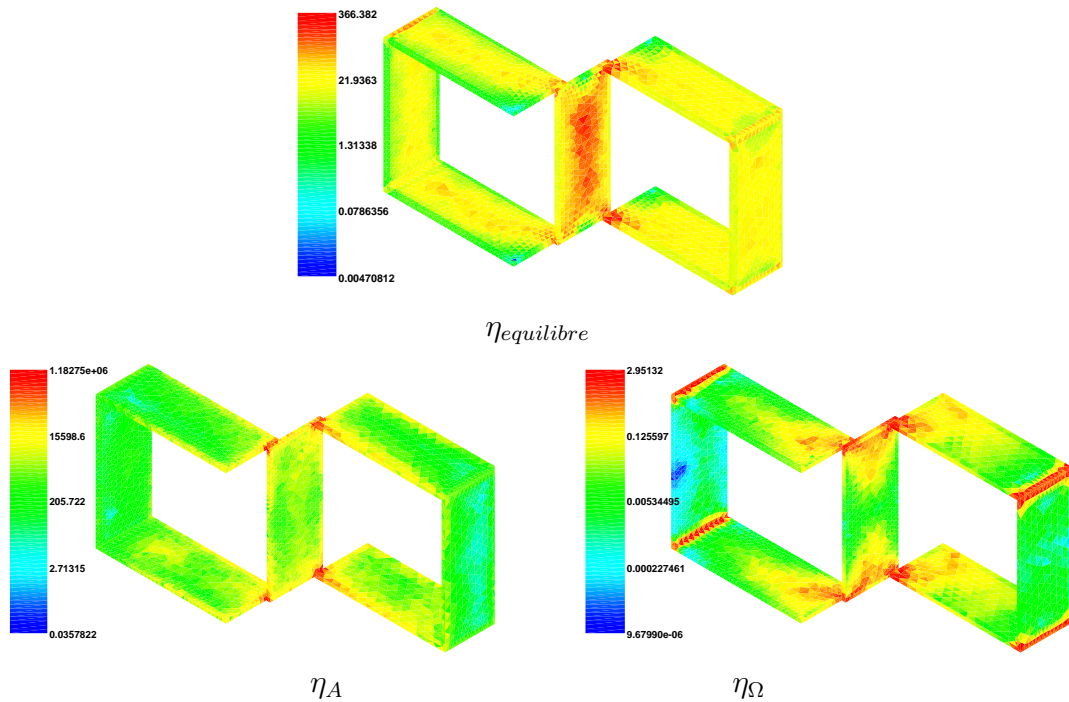
Pour le cas de la magnétostatique, le team workshop °13 a été choisi pour sa géométrie particulière [1] qui présente des effets à forte saturation situés près de l'entrefer.

A cet endroit, les champs subissent des changements de modules et de direction importants. Le maillage de la structure est présenté sur la Figure 3.15. Afin de comparer la qualité de la solution, la plaque de droite est maillée plus grossièrement que la plaque de gauche. La maillage de la plaque centrale possède la même densité que la plaque de gauche maillée finement.



**Figure 3.15.:** Maillage du workshop n°13

Les cartes de la distribution de l'estimateur de l'erreur sont présentées sur la figure (Figure 3.16). Le premier constat, auquel on pouvait s'attendre, est que l'estimation d'erreur est liée à la densité du maillage. Le second est que les trois cartes sont différentes, mais les trois estimateurs mettent en évidence les erreurs commises où la saturation est très forte. L'estimateur équilibré  $\eta_{\text{équilibré}}$  indique des erreurs importantes dans la plaque centrale où les champs sont les plus élevés. Cet estimateur n'indique pas les zones à forte saturation comme étant les zones avec la plus grande erreur. L'estimateur résiduel  $\eta_A$  montre que l'erreur se concentre sur les zones à forte saturation car la continuité des composantes tangentielles des champs est assurée faiblement. Concernant l'estimateur résiduel  $\eta_\Omega$  on peut remarquer que l'erreur est importante au niveau des zones à forte saturation mais aussi dans les angles. Cela est dû au changement de direction des champs et aux fuites qui ne sont pas modélisées correctement avec cette formulation.



**Figure 3.16.:** Distribution des estimateurs d'erreurs

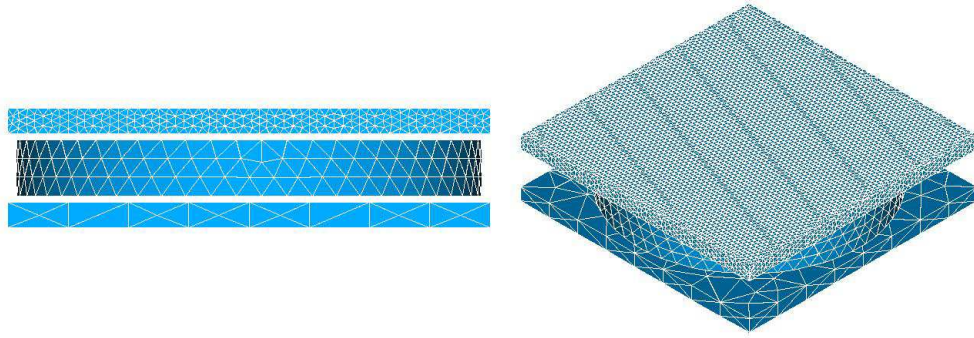
### Application magnétodynamique

Le second exemple traité est un cas magnétoharmonique. Une bobine filaire inductrice est placée entre deux plaques conductrices. Comme précédemment afin de mettre en évidence l'influence de la discrétisation spatiale, les deux plaques sont maillées différemment (Figure 3.17). On s'intéresse ici uniquement aux erreurs dans les plaques conductrices dues à la présence de courants induits. Sur les Figure 3.18 et Figure 3.19, on retrouve bien le fait que l'erreur est bien plus importante si le maillage est grossier. La carte d'erreur indique la présence de valeurs importantes des courants. La Figure 3.20 présente une carte d'estimation d'erreur sur une section de la plaque inductrice pour différentes propriétés physiques.

Cas test	1	2	3	4
$\mu_r$	1	1	1	100
$f(Hz)$	50	500	5000	50
$\delta(mm)$	31.2	9.9	3.1	3.1
$\delta/0.00127$	245	77.5	24.5	24.5

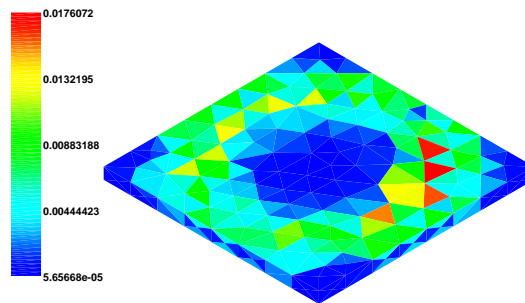
**Table 3.2.:** Paramètre de l'étude selon les cas

Les simulations ont toutes été effectuées avec la même conductivité mais la fréquence est modifiée à la hausse entre les 3 premières simulations avec une perméabilité



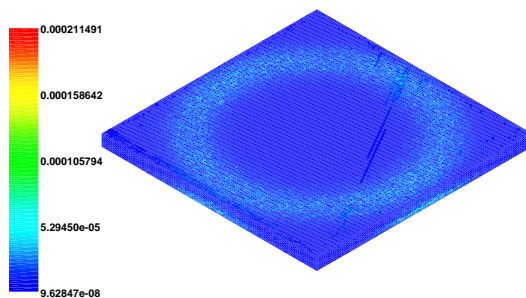
**Figure 3.17.:** Bobine inductrice entre 2 plaques conductrices

constante égale à  $\mu_0$ . De ce fait, l'effet de peau est accentué entre chaque simulation. La dernière ligne du Tableau 3.2 donne la profondeur de pénétration en pourcentage par rapport à l'épaisseur de la plaque (12.7 mm). Enfin, pour le quatrième et dernier calcul, la perméabilité est augmentée et la fréquence est diminuée afin de présenter la même épaisseur de peau que la troisième simulation. L'estimateur d'erreur met en évidence les erreurs dues à la mauvaise prise en compte de l'effet de peau par un maillage régulier. Toutefois, pour les deux derniers cas traités, bien que l'épaisseur de peau soit identique, les cartes de l'estimateur sont différentes car l'induction magnétique pénètre plus profondément dans la plaque car la perméabilité relative de cette dernière qui est égale à 100.

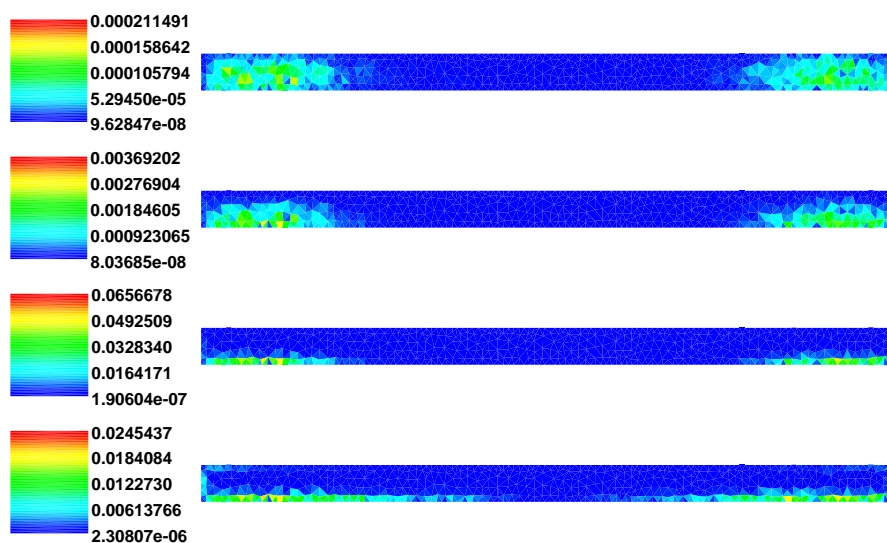


**Figure 3.18.:** Carte d'estimation d'erreur sur la plaque conductrice inférieure





**Figure 3.19.:** Carte d'estimation d'erreur sur la plaque conductrice supérieure



**Figure 3.20.:** Carte d'estimation d'erreur sur une section de la plaque inductrice pour différentes propriétés physiques

### 3.2.5. Conclusion

Les estimateurs d'erreur numérique servent à contrôler la qualité de la solution mais aussi à améliorer la solution. Les estimateurs résiduels semblent mieux adaptés pour raffiner le maillage car ils sont efficaces et fiables en magnétostatique et en magnétodynamique. A notre connaissance, la fiabilité des estimateurs équilibrés n'a pas été prouvée en magnétodynamique alors qu'ils le sont en magnétostatique. Toutefois, l'estimateur résiduel est spécifique à chaque formulation. Dans ces conditions, si des stratégies de remaillage sont élaborées à partir de ces estimateurs, cela nous conduira à trois maillages différents donc à trois solutions, certes très proches, mais différentes, l'estimateur équilibré fournissant la valeur exacte de l'erreur. En magnétodynamique, la question ne se pose pas car il faut utiliser l'estimateur résiduel.

Reste les autres estimateurs que nous n'avons pas évalué, notamment les estimateurs hiérarchiques.

## 4. Résolution de systèmes linéaires

### 4.1. Généralités

Pour obtenir une bonne solution sur un problème industriel le maillage peut être très fin et donc le nombre de degrés de liberté peut devenir très important. Actuellement, il est courant de rencontrer des problèmes atteignant un million d'inconnues. Avec les moyens de calcul actuels, la résolution d'un tel système est de l'ordre de quelques minutes. Ceci n'est pas très long en soi mais il est bien souvent nécessaire de répéter un grand nombre de fois cette résolution (non linéarité, pas à pas dans le temps, ...). Les temps de calcul deviennent alors prohibitifs et peuvent atteindre plusieurs semaines.

Il est connu que la puissance de calcul des ordinateurs ne cesse d'augmenter mais, depuis plusieurs années, les fréquences d'horloge des processeurs stagnent autour de 3 GHz pour des raisons principalement d'échauffement. Pour pallier cette stagnation, les constructeurs ont multiplié le nombre de processeurs dans les ordinateurs. Ils arrivent, de ce fait, à respecter la fameuse loi de Moore. La conséquence directe de la multiplication des processeurs est que les codes séquentiels doivent être parallélisés pour utiliser les puissances actuelles des ordinateurs.

Les informaticiens travaillent depuis longtemps sur la parallélisation de méthodes de résolution directes ou indirectes. Actuellement, des bibliothèques (scaLapack, Mumps, PETSc... ) sont disponibles en accès libre. Cependant, ces bibliothèques sont développées pour des cas généraux et ne sont, par conséquent, pas toujours optimales et/ou adaptées aux cas traités en électromagnétisme.

Les méthodes numériques pour résoudre les équations aux dérivées partielles transforment ces dernières en système matriciel. La méthode des éléments finis et la FIT engendrent le même type de matrices. Comme la connectivité est plus faible avec la dernière, le remplissage (nombre de termes non nuls de la matrice) est moindre avec la FIT qu'avec la FEM. Bien évidemment, la taille des systèmes nous interdit le calcul de la matrice inverse qui est, de plus, pleine. Toutefois, il est possible de déterminer une décomposition de la matrice (LU, Crout,...). Ces méthodes, appelées méthodes directes, transforment la matrice en augmentant fortement le stockage mais elles permettent d'obtenir le vecteur solution exacte (aux erreurs d'arrondi près) du système. Une autre famille de méthodes, dites de Krylov ou indirectes, cherchent un vecteur solution approché sans modifier la matrice. De façon générale, les méthodes indirectes sont plus rapides que les méthodes directes. Toutefois les

méthodes directes peuvent s'avérer très intéressantes s'il est nécessaire de résoudre un grand nombre de fois un système matriciel dans lequel seuls les termes sources changent (par exemple l'utilisation d'une méthode de point fixe).

## 4.2. Décomposition de matrice (méthodes directes)

Il existe un grand nombre de méthodes directes qui ne seront pas toutes détaillées ici. On peut citer les méthodes les plus courantes qui sont les décompositions de Gauss, de Crout, de Cholesky, de Householder ... qui s'appliquent à différents types de matrice (voir Tableau 4.1).

Décomposition	$Ax = B$	Conditions
Gauss	$A = LU$	Non Symétrique
Crout	$A = LDL^T$	Symétrique
Cholesky	$A = LL^T$	Symétrique définie positive
Householder	$A = QR$	Rectangle

**Table 4.1.:** Quelques décompositions de matrices

avec  $A$  la matrice à décomposer

$B$  le vecteur source

$L$  la matrice triangulaire inférieure

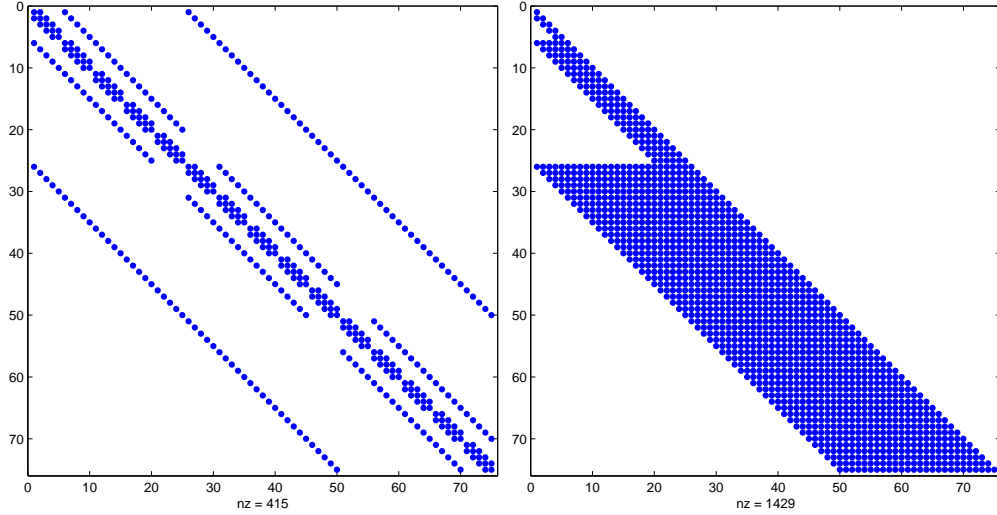
$U$  la matrice triangulaire supérieure

$D$  la diagonale

$Q$  la matrice orthogonale

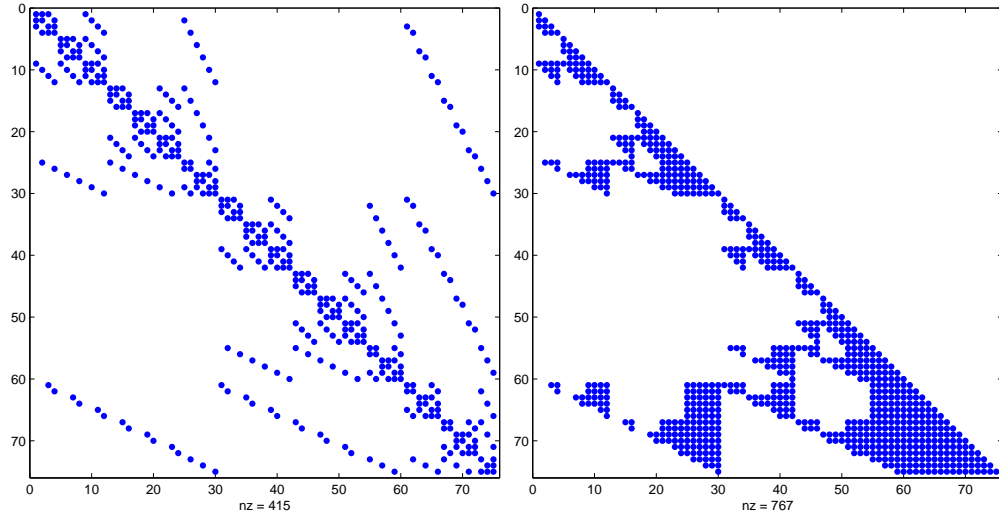
$R$  la matrice triangulaire supérieure

Parmi ces méthodes, nous devons choisir laquelle est la plus appropriée à la résolution de nos problèmes d'électromagnétisme et l'adapter en vue de les paralléliser. Les matrices issues de la FEM et de la FIT sont symétriques et, selon que le problème est jaugé ou non, sont définies positives ou non. Dans notre cas, on peut choisir une décomposition de type Cholesky qui peut jauger les systèmes à condition de conserver uniquement les lignes linéairement indépendantes. Le stockage de ces décompositions reste problématique mais peut être réduit fortement en réordonnant préalablement les lignes de la matrice  $A$ . De plus, un grand remplissage conduit à des temps de calcul plus long. Sur un simple exemple issu d'une formulation en potentiel scalaire magnétique appliqué à un maillage régulier 3D (Figure 4.1) on constate que le nombre de termes non nuls est multiplié par 3, et, ce cas n'est pas le plus défavorable. En effet, si la première inconnue est connectée à toutes les autres inconnues le remplissage de  $L$  est total.



**Figure 4.1.:** Remplissage de  $A$  et de  $L$  avant renumérotation

Pour pallier ce problème, plusieurs techniques de renumérotation telles que l'algorithme de Cuthill-McKee (réduction la largeur de bande des matrices symétriques) [Cuthill69], la dissection emboîtée [George73] ou la minimisation d'accroissement de front (rapide et très efficace)[Amestoy96, Demmel99, Amestoy00, Chandr.09] ont été développées. Une fois, les inconnues renumérotées, la décomposition peut être calculée soit séquentiellement soit en parallèle. Pour décomposer une matrice non structurée (maillage irrégulier), la bibliothèque MUMPS mettant en œuvre une méthode multifrontale semble la mieux adaptée. Dans un premier temps, cette méthode recherche des 'super-noeuds' qui vont être distribués sur les différents processeurs. Par contre, pour une matrice structurée (maillage régulier), la dissection emboîtée est particulièrement bien adaptée. Cette méthode initialement développée pour les différences finies, peut être facilement transposable à la FIT et facilement parallélisable. Le principe de cette méthode est assez simple. Le maillage est séparé par une surface en deux parties égales si possible. La surface séparatrice supporte les numéros d'inconnues les plus élevés. La même opération est effectuée sur les deux parties. Par ce processus, l'ensemble des inconnues, sont renumérotées. La figure (Figure 4.2) montre le remplissage de  $A$  et  $L$  après la renumérotation opérée par la méthode de la dissection emboîtée. Le nombre de termes non nuls de  $A$  est 415 et est passé à 767 termes non nuls pour la matrice triangulaire inférieure  $L$ . Sur cet exemple, les méthodes Cuthill-McKee et de minimisation d'accroissement de front ont donné respectivement 853 et 607 termes non nuls. Par contre, la récursivité de la dissection emboîtée engendre une matrice très structurée qui permet de décomposer la matrice triangulaire  $L$  en bloc.



**Figure 4.2.:** Remplissage de  $A$  ( $G^t MG$ ) et de  $L$  après renumérotation par dissection emboîtée

### 4.2.1. Parallélisation de la décomposition<sup>1, 2</sup>

Sur la Figure 4.3, la structure de  $L$  après renumérotation par la dissection emboîtée est reprise. Une décomposition en blocs est proposée selon la dépendance des calculs. La forme 'emboîtée' de la matrice nous conduit à choisir un nombre qui est une puissance de 2 pour opérer cette décomposition. Dans cet exemple, nous prendrons 8 processeurs. Les calculs des 8 blocs  $A, B, \dots, H$  peuvent être effectués indépendamment. Viennent ensuite les calculs des 8 blocs  $A_1, B_1, \dots, H_1$  jusqu'aux blocs  $A_3, B_3, \dots, H_3$ . Un premier étranglement apparaît pour déterminer les blocs  $I, J, K, L$  qui demandent le calcul préalable de 2 blocs. Le calcul des blocs  $I_1, J_1, \dots, L_1$  permette d'élargir le front de parallélisme, mais le calcul des derniers blocs est quasi séquentiel.

Pour être efficace en terme de temps de calculs, certains blocs sont stockés totalement. En effet, si le taux de remplissage d'une matrice devient important, il est inutile de stocker uniquement les termes non nuls (stockage morse) car le temps CPU pour décrypter le codage morse devient important. De plus, un stockage plein permet de mettre à profit les programmes de la bibliothèque LAPACK. Une fois la matrice  $L$  assemblée, la résolution du système est très rapide car deux boucles imbriquées suffisent. La première est itérée de 1 jusqu'au nombre d'inconnues et la seconde de 1 jusqu'au numéro de l'inconnue en cours de traitement.

1. "Parallel direct solver for the finite integration technique in electromagnetics", A. Tinzeft, Y. Le Menach, J. Korecki, F. Piriou, COMPEL, No 4, Vol. 29, pp. 941-949, 2010.

2. "Parallel direct solver for the Finite Integration Technique in electrokinetic problems", A. Tinzeft, Y. Le Menach, J. Korecki, F. Guyomarch, F. Piriou, IEEE Trans. Mag., Vol. 46, no. 8, pp. 3269-3272, August 2010.

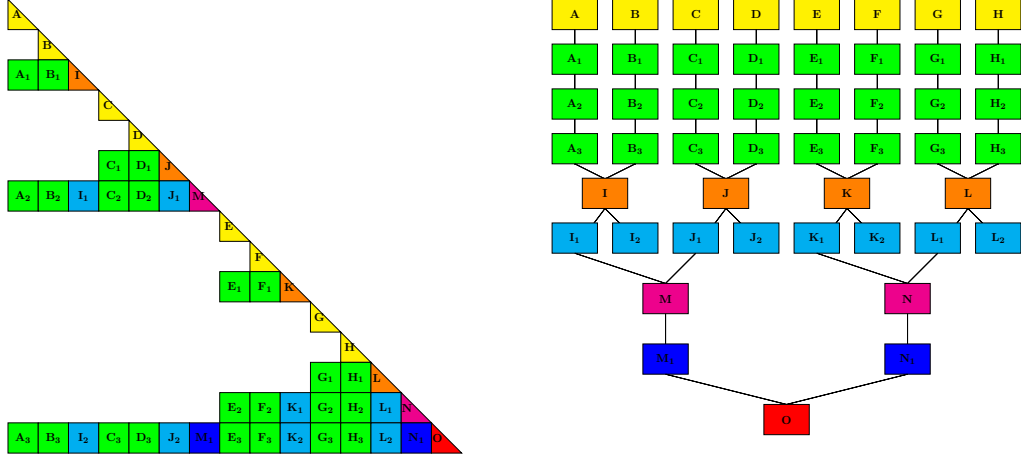


Figure 4.3.: Décomposition de L en blocs selon leurs dépendances

### 4.2.2. Validation et résultats

Pour valider cette approche, des problèmes d'électrocinétique simples ont été résolus. Un exemple est présenté sur la Figure 4.4. Pour cela, on utilise la formulation en potentiel scalaire électrique (Équation 1.13) et une différence de potentiel électrique  $V$  de 100  $\mu\text{V}$  est appliquée entre les surfaces  $\Gamma_{E1}$  et  $\Gamma_{E2}$ . La forme discrète de la formulation est donnée par l'Équation 4.1.

$$G_{an}^t M_{fa}^\sigma G_{an} \varphi_n = G_{an} \alpha_n V \quad (4.1)$$

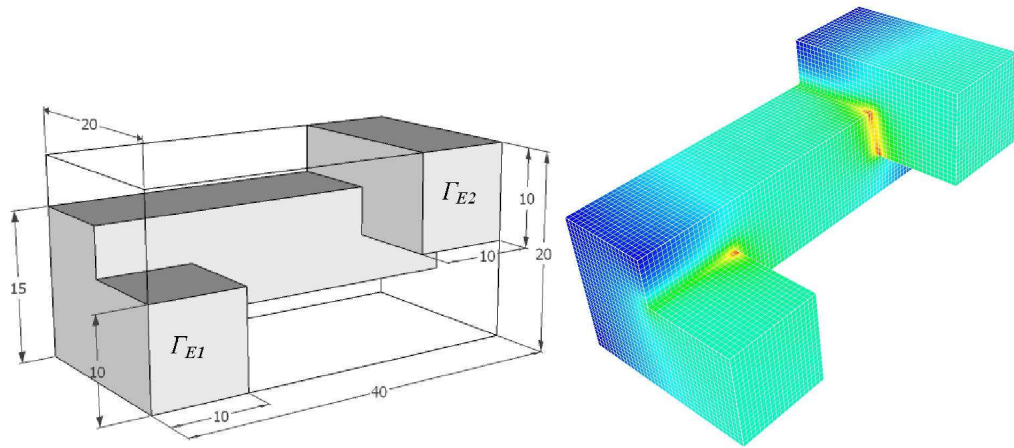
avec les termes  $G_{an}$ ,  $M_{fa}^\sigma$  et  $\alpha_n$ , introduits au chapitre 2, représentant respectivement la matrice d'incidence, la matrice de masse et le potentiel scalaire source discrétisé aux nœuds. Les inconnues du problème regroupées dans le vecteur  $\varphi_n$  représentent les inconnues aux nœuds.

Pour la formulation en potentiel vecteur (Équation 1.15), le terme source n'est pas une différence de potentiel mais un courant de 11.2 A. Dans ce cas, la densité de courant se décompose en deux termes,  $\mathbf{J} = \mathbf{rot}(\mathbf{T} + \mathbf{T}_s)$  avec  $\mathbf{T}_s$  connu et  $\mathbf{T}$  inconnu. On obtient la formulation discrète suivante :

$$R_{fa}^t M_{af}^\rho R_{fa} T_a = R_{fa}^t M_{af}^\rho R_{fa} T_{sa} \quad (4.2)$$

avec les termes  $R_{fa}$ ,  $M_{af}^\rho$  et  $T_a$  représentant respectivement la matrice d'incidence, la matrice de masse et les inconnues du problème qui sont dans ce cas les circulations du potentiel vecteur sur les arêtes.

Afin d'illustrer les résultats obtenus suite aux résolutions, la distribution du module de la densité de courant dans le conducteur est présentée sur la Figure 4.4.



**Figure 4.4.:** Problème électrocinétique et distribution de la densité de courant

Nombre de processeurs		1	2	4	8
Maillage 1 135 276 inconnues	Temps de l'assemblage (s)	199	113	77	57
	Accélération	1	1.76	2.56	3.5
Maillage 2 448 319 inconnues	Temps de l'assemblage (s)	482	268	153	107
	Accélération	1	1.8	3.15	4.5

**Table 4.2.:** Temps et accélération obtenus pour la formulation en potentiel scalaire

Pour cette étude, on s'intéresse uniquement aux temps de calcul qui sont reportés dans les Tableau 4.2 et Tableau 4.3 :

Les accélérations sont tout à fait correctes mais le nombre de processeurs employés ne permet pas de mettre en évidence la saturation engendrée par le transfert de données qui pourra apparaître pour un nombre de processeurs supérieurs. La méthode permet de résoudre un système de 1 281 721 inconnues avec la méthode directe en 4 minutes. Toutefois, pour la formulation en potentiel scalaire, les méthodes indirectes présentées dans le paragraphe suivant restent plus rapides même en séquentiel.

Nombre de processeurs		1	2	4	8
Maillage 1 377 681 inconnues	Temps de l'assemblage (s)	465	251	172	111
	Accélération	1	1.85	2.7	4.2
Maillage 2 1 281 721 inconnues	Temps de l'assemblage (s)	1256	664	428	246
	Accélération	1	1.89	2.93	5.09

**Table 4.3.:** Temps et accélération obtenus pour la formulation en potentiel vecteur



## 4.3. Méthodes indirectes

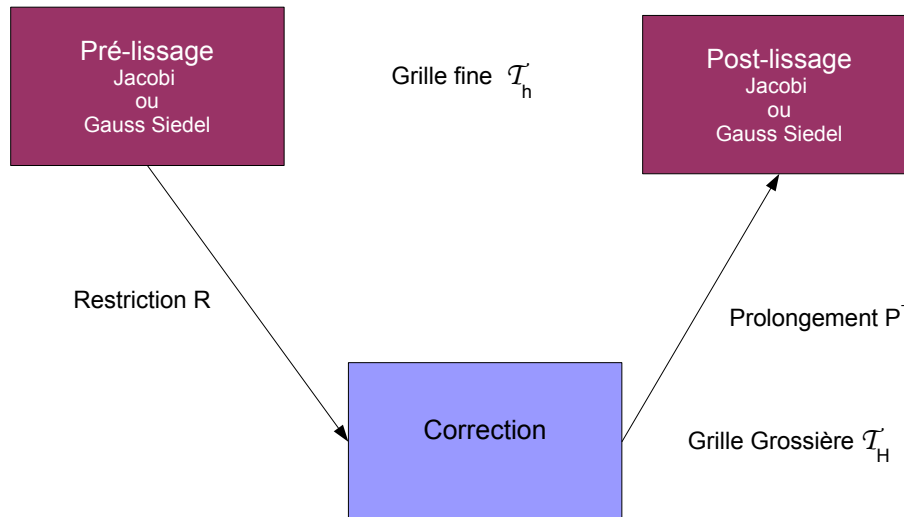
Dans la partie précédente, nous avons vu que les méthodes directes peuvent être efficaces en temps de calcul si l'exécution est parallélisée. Néanmoins, le stockage de la décomposition reste, et restera, très coûteux. Pour pallier cet inconvénient, les méthodes de résolution indirecte ne modifient pas la structure du système à résoudre. Ces méthodes cherchent un vecteur solution approchée du système à résoudre. Il est même possible, dans certaines conditions, de résoudre un système matriciel sans stocker la matrice [Bastos09]. En toute théorie, une méthode indirecte converge uniquement s'il existe une seule solution au système mais nous verrons plus tard que, dans certains cas, cette condition n'est pas indispensable. Les méthodes indirectes peuvent être séparées en trois familles, soit :

- Les méthodes itératives de relaxation (type Jacobi, Gauss-Seidel, SSOR)
- Les méthodes multigrilles (arithmétique ou géométrique),
- Les méthodes de Krylov telles que le gradient conjugué [Saad86, Saad03], bi Gradient conjugué [VanderVorst92], GMRES [Smoch99], MRTR [Abe97], ... ).

Les méthodes de relaxation convergent plus lentement que les méthodes de Krylov. De ce fait, elles sont peu utilisées mais leur simplicité de mise en œuvre peuvent s'avérer intéressante lorsqu'on cherche une solution approchée (loin de la solution exacte). Quant aux méthodes multigrilles, elles sont fortement utilisées pour des maillages réglés mais peuvent être étendues à tous types de maillage. Toutefois les paramètres de réglage peuvent s'avérer difficiles à obtenir pour que la méthode converge efficacement pour tout type de problème.

### 4.3.1. Méthodes multigrilles

Les méthodes multigrilles sont peu appliquées pour résoudre des problèmes de type éléments finis en électromagnétisme mais beaucoup de travaux récents montrent la possibilité et l'efficacité de ces méthodes [Watanabe05, Spasov03, Perrussel06, Zhuang11]. Comme leur nom l'indique, ces méthodes mettent en œuvre plusieurs grilles. Elles sont, au minimum 2, dénommées grille fine et grille grossière et notées respectivement  $\mathcal{T}_h$  et  $\mathcal{T}_H$ . La Figure 4.5 illustre la mise en œuvre la plus simple. La grille fine correspond au maillage sur lequel les champs sont calculés. La grille grossière peut être incluse dans la grille fine. Dans ce cas, on dit aussi que les grilles sont emboîtées et la méthode est qualifiée de multigrille géométrique. Si les grilles ne sont pas emboîtées, la méthode est dite arithmétique.



**Figure 4.5.:** Cycle minimal d'un solveur multigrille

On cherche donc à résoudre :

$$A_h x_h = b_h \text{ sur } \mathcal{T}_h \quad (4.3)$$

mais on s'appuie sur la résolution sur la grille grossière.

$$A_H x_H = b_H \text{ sur } \mathcal{T}_H \quad (4.4)$$

Le gain en temps de calcul est d'autant plus important que le rang de  $A_H$  est très inférieur au rang de  $A_h$ .

Le passage de la grille fine  $\mathcal{T}_h$  à la grille grossière  $\mathcal{T}_H$  est appelé restriction. Par contre le passage de la grille grossière à la grille fine est appelé prolongement. L'algorithme d'une méthode multigrille est donné ci-dessous pour un nombre de grilles égal à deux et qui décrit un simple cycle en  $V$  (Figure 4.5).

---

**Algorithme 4.1** une méthode multigrille

---

1. L'opération de pré-lissage qui, après quelques itérations de Gauss-Siedel, fournit une évaluation approximative de  $x_h^i$
  2. L'évaluation du résidu  $r_h^i = b_h - A_h x_h^i$
  3. La réduction permet de déterminer le terme source système relatif à la grille grossière  $r_H^i = R(b_h - A_h x_h^i)$ .
  4. Le calcul de la correction est effectué sur la grille grossière en résolvant à l'aide d'une méthode directe  $A_H X_H^i = r_H^i$
  5. Le prolongement permet de transférer la correction évaluée sur un maillage grossier vers un maillage fin  $x_h^{i+1} = x_h^i + P X_H^i$
  6. Le post-lissage effectue une opération similaire au pré-lissage : Quelques itérations de Gauss-Siedel donnent une nouvelle évaluation approximative de  $x_h^{i+1}$
  7. Retour à l'étape 2 tant que la précision désirée n'est pas atteinte
- 

La difficulté de ces méthodes réside dans la détermination de paramètres qui sont :

- le choix des nombre de grilles
- le choix du cycle (si le nombre de grilles est supérieur à 2 on peut dans ce cas avoir des cycles en  $V$  ou  $W$ )
- Le choix des matrices de restriction  $R$  et de prolongement  $P$

La convergence de la méthode est très sensible au choix du paramètre et, de ce fait, nuit à la robustesse du solveur.

### 4.3.2. Les méthodes de Gradient conjugué

Il s'agit de la famille de méthodes la plus employée pour résoudre les problèmes de types éléments finis en électromagnétisme. Deux raisons principales expliquent ce choix.

1. Ces méthodes sont les plus rapides (efficaces) pour résoudre un Laplacien. Cela englobe une grande partie des problèmes 2D et les formulations 3D en potentiel scalaire.
2. Pour les formulations en potentiel vecteur de type *rot.rot* ; la méthode du gradient conjugué jauge le système matriciel si le terme source est compatible.

Il est prouvé que ces méthodes convergent si la matrice est définie positive. Si le système n'est pas jaugé, la matrice n'est pas définie positive mais le gradient conjugué converge vers une solution [Ren96]<sup>3</sup>. Dans nos problèmes, on s'intéresse au gradient ou au rotationnel de la solution qui, contrairement à la solution du problème non jaugé est unique.

---

3. "Iterative Solvers For Singular Symmetric Linear Systems in Electromagnetism Low Frequency", A. Tinzeft, Y. Le Menach, F. Piriou, IEEE Trans. Mag., Vol. 45, no 3, pp 1428-1431, March 2009.

La vitesse de convergence dépend du conditionnement de la matrice  $A$ . Le conditionnement d'une matrice peut être défini comme suit  $Cond(A) = \frac{\text{Valeur propre maximale}}{\text{Valeur propre minimale}}$ . Par conséquent, plus  $Cond(A)$  est proche de 1, plus la convergence est rapide.

### 4.3.3. Préconditionneur

Pour accélérer les vitesses de convergence, il suffit de diminuer le conditionnement  $A$  en utilisant un preconditionneur. Le principe consiste à résoudre  $M^{-1}Ax = M^{-1}B$  avec  $M$  le preconditionneur. Le preconditionneur idéal est  $M^{-1} = A^{-1}$ . Dans ce cas, le conditionnement de système est égal à  $1 = cond(M^{-1}A) \ll cond(A)$ ; le gradient conjugué converge en une seule itération. En pratique nous n'avons évidemment pas  $M^{-1} = A^{-1}$  mais on cherche à s'en rapprocher. L'algorithme du gradient preconditionné est rappelé par l'algorithme suivant :

---

#### Algorithme 4.2 Gradient conjugué preconditionné

---

$x_0$  fixé

posons  $r_0 = Ax_0 - b$ ,  $z_0 = M^{-1}r_0$ ,  $p_0 = z_0$ ,  $k = 0$

faire tant que  $r_k \neq 0$

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{(r_k^T, r_k)}{(p_k^T, Ap_k)} \\ x_{k+1} &= x_k + \alpha_k p_k \\ r_{k+1} &= r_k + \alpha_k Ap_k \\ z_{k+1} &= M^{-1}r_{k+1} \\ \alpha_k &= \frac{(z_{k+1}, r_{k+1})}{(z_k, r_k)} \\ p_{k+1} &= z_{k+1} + \beta_{k+1} p_k \\ k &= k + 1\end{aligned}$$


---

Avec

- k l'itération
- r le vecteur résidu
- p le vecteur de direction de la descente
- $\alpha$  le scalaire minimisant la descente

On remarque dans cet algorithme que l'évaluation  $M^{-1}$  est employée à chaque itération. Par conséquent, le preconditionneur doit d'être rapide à construire et être peu gourmand en stockage. Les plus courants sont :

- le preconditionneur diagonal ( $M = D$ ) avec  $D$  la diagonale de  $A$  est extrêmement simple à construire mais peu efficace.
- le preconditionneur SSOR construit comme suit :
  - $A = D - E - E^t$  et  $M = \frac{1}{\omega(2-\omega)}(D - \omega E)D^{-1}(D - \omega E)^t$
  - Avec  $0 < \omega < 2$  et  $E$  la matrice triangulaire inférieure
- les preconditionneurs basés sur les factorisations de Cholesky et Crout. Comme nous l'avons vu précédemment, ces factorisations engendrent un remplissage important. Pour pallier cet inconvénient, la factorisation incomplète est généralement effectuée.

### 4.3.3.1. Préconditionneur F.I.T pour F.E.M <sup>4</sup>

Nous savons que, sur un même maillage, les solutions FIT et FEM sont très proches. Comme nous l'avons montré précédemment, nous avons la possibilité de construire rapidement la décomposition de Cholesky du problème FIT. Nous proposons d'employer cette décomposition pour preconditionner un problème issu de la méthode des éléments finis. Le maillage FIT sera toujours plus grossier que le maillage FEM. Dans ce cas, le preconditionneur est défini comme suit :

$$M^{-1} = P A_{FIT}^{-1} P^T = P L_{FIT}^{T^{-1}} L_{FIT}^{-1} P^T \quad (4.5)$$

Avec  $P$  matrice de passage 'matrice d'interpolation' entre un maillage FIT grossier et un maillage FEM fin.

Dans un premier temps, ce preconditionneur a été appliqué sur des maillages emboîtés (Figure 4.6) où les nœuds F.I.T et F.E.M sont confondus. Les maillages FIT et FEM sont constitués respectivement d'hexaèdres et de tétraèdres. Dans ce cas, les solutions FIT et FEM sont très proches. L'exemple traité est simple, il s'agit d'un problème d'électrocinétique modélisé par la formulation en potentiel scalaire (Équation 4.1). Une différence de potentiel est appliquée entre deux faces opposées. De plus, comme le domaine est uniforme, la solution est un champ de vecteur uniforme. Sur cet exemple, le problème FIT comprend 1089 inconnues contre 7497 inconnues pour le problème élément finis.

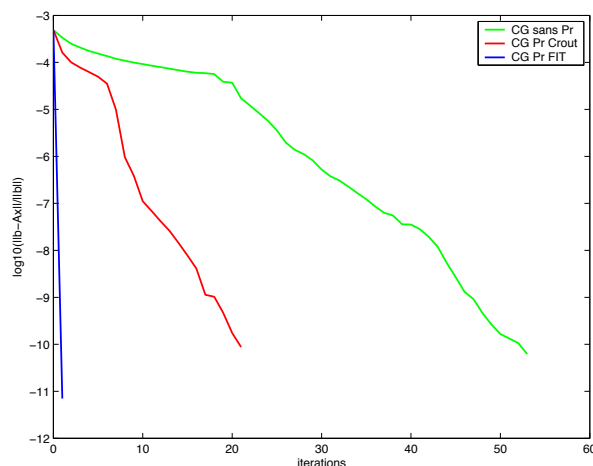
Comme on pouvait s'attendre, la convergence est très rapide. Une seule itération suffit pour converger vers la solution (Figure 4.7). La convergence est bien plus efficace que le preconditionneur de Crout.



**Figure 4.6.:** Maillages emboîtés

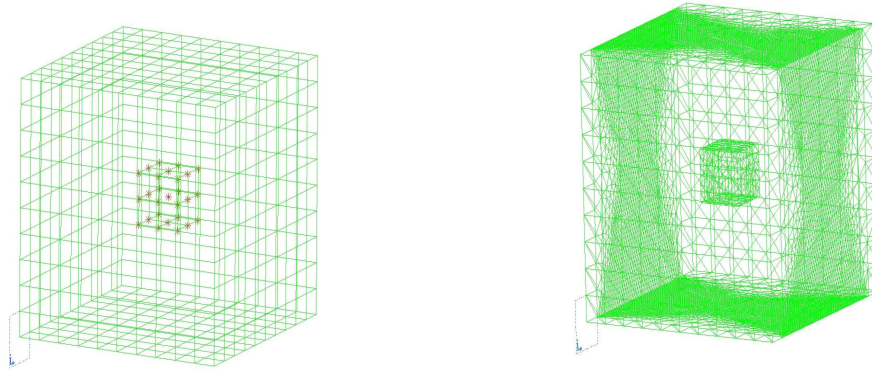
---

4. "A new preconditioner based on the F.I.T to solve F.E.M problems", A. Tinzeft, Y. Le Menach, F. Guyomarc'h, Proc., CEFC, Oita, November 2012.

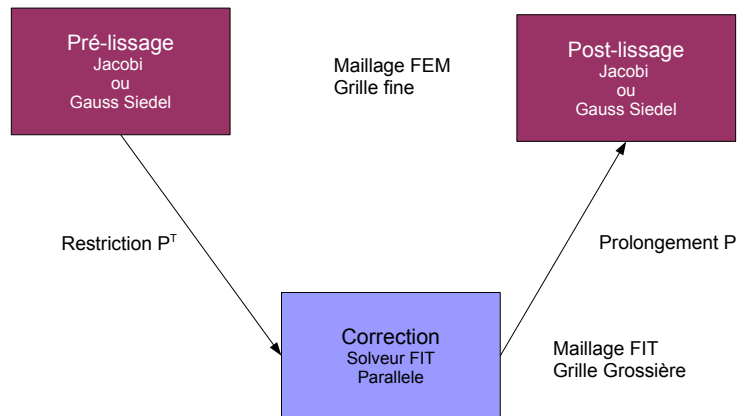


**Figure 4.7.:** Comparaison de convergence du gradient conjugué en fonction des préconditionneurs

Pour valider la robustesse de ce préconditionneur, un exemple dont la solution est moins régulière est traité. Pour cela, le domaine comporte deux milieux et les solutions FIT et FEM sont moins proches que dans l'exemple précédent. De plus, comme le montre la Figure 4.8, les nœuds du maillage FIT (1089 inconnues) ne sont plus confondus avec les nœuds du maillage FEM (18273 inconnues). Par ailleurs, les rangs des matrices sont très différents. De ce fait, il est nécessaire d'introduire un lisseur entre les solutions FIT et FEM comme dans le cas des solveurs multigrilles (Figure 4.9). Le pré-lissage peut être effectué par quelques itérations de l'algorithme de Jacobi ou de Gauss-Siedel qui fournit une évaluation approximative de la solution FEM à transférer au maillage FIT. La matrice de passage  $P$  est une matrice d'interpolation entre un maillage FIT grossier et un maillage FEM fin. Pour la restriction  $R$ , on utilise simplement la transposé de la matrice  $P$ . La comparaison des vitesses de convergence montre que le préconditionneur FIT est plus efficace que le préconditionneur Crout. De plus, il est à noter que le lisseur basé sur Gauss-Siedel est meilleur que celui basé sur Jacobi .



**Figure 4.8.:** Maillage F.I.T pour le préconditionneur et le maillage F.E.M



**Figure 4.9.:** Ajout d'un lisseur

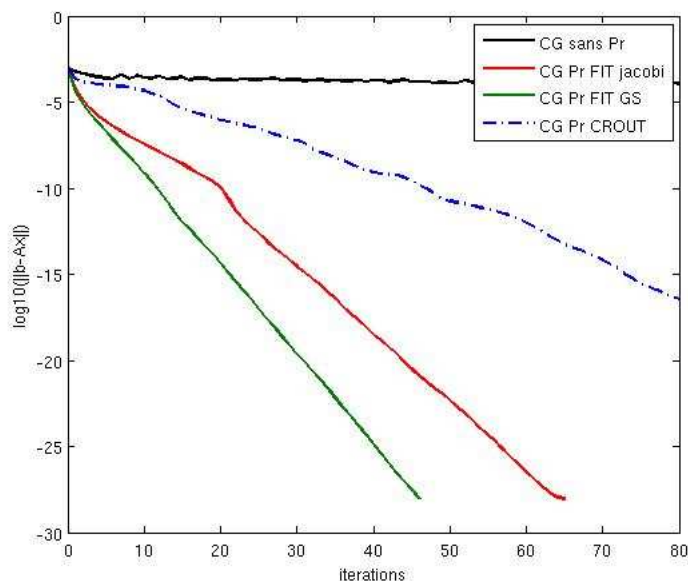


Figure 4.10.: Comparaison des convergences avec l'ajout du lisseur

## 4.4. Conclusion

Dans cette partie sont présentées des solutions pour paralléliser des méthodes de résolutions directe et indirecte. La méthode de dissection emboîtée, parallélisée, appliquée à la FIT n'est pas très innovante. Mais son emploi pour préconditionner un problème issu de la méthode des éléments finis est assez prometteur. Néanmoins, l'étude de la méthode n'est pas encore suffisamment approfondie pour tirer des conclusions pertinentes. Certes, elle fonctionne bien pour les formulations en potentiels scalaire, mais le passage aux formulations vectorielles s'avère délicat pour deux raisons principales. Premièrement, il faut définir la matrice de passage  $P$  appliquée aux fonctions d'arêtes. Deuxièmement, il faut traiter le problème de la jauge. La jauge doit notamment engendrer la même solution pour la FIT et la FEM. Il faut chercher la solution dans le même espace discret. Cela exclut immédiatement la jauge de type arbre. Le problème reste donc ouvert à ce stade.



# 5. Conclusions et perspectives

## Conclusions

Les travaux présentés précédemment, effectués au sein de l'équipe modélisation du L2EP, permettent de tirer quelques conclusions quant aux méthodes numériques à employer pour modéliser les systèmes électromagnétiques en basse fréquence. Les principaux résultats sont les suivants:

- La méthode des éléments finis est mieux adaptée que la F.I.T et que la Cell-Method pour modéliser en 3D les machines électriques (machines tournantes et transformateurs) car elle est plus précise. De plus, pour la Cell-Method, la construction du maillage dual et la détermination des matrices de masse sont pénalisantes en temps de calcul. Par contre, pour un problème donné, la FIT est plus rapide que la FEM. Le recours à la FIT conforme permet de dissocier la géométrie du maillage mais génère une erreur de discrétisation qui peut être en partie compensée en augmentant fortement le nombre d'inconnues. Dans ce cas, pour une qualité de solution égale, la FIT n'est pas obligatoirement plus rapide que la FEM.
- La méthode de l'overlapping semble la plus propice à modéliser les mouvements des machines tournantes. En effet, elle présente le meilleur compromis entre la qualité de la solution et le comportement numérique. De plus, elle peut être appliquée à d'autres mouvements que ceux observés dans les machines électriques
- Les estimateurs d'erreurs résiduels peuvent être appliqués aux formulations en potentiels de la magnétostatique et de la magnétodynamique car ils sont fiables et efficaces.
- Concernant les méthodes de résolution numérique, le résultat le plus marquant est que nous avons montré qu'une matrice issue d'un problème FIT peut servir à préconditionner une matrice issue d'un problème FEM afin accélérer les vitesses de convergence du gradient conjugué.

## Perspectives

Les perspectives relatives à ce travail s'intègrent naturellement aux perspectives de l'équipe modélisation du L2EP et, bien entendu, répondent aux enjeux qui restent communs à la communauté du calcul de champs électromagnétiques en

basse fréquence. Il convient donc de les présenter, mais commençons par rappeler les compétences de l'équipe. Elle est capable de mener à bien une démarche complète de simulation numérique des dispositifs électrotechniques qui comprend plusieurs étapes, soit : la caractérisation et la modélisation des matériaux magnétiques, la mise en équations des problèmes électromagnétiques en basse fréquence en maîtrisant les hypothèses simplificatrices, la discrétisation à l'aide de différentes méthodes et la résolution des systèmes matriciels linéaires et non linéaires. Enfin, nos compétences initiales d'électrotechniciens nous permettent d'exploiter les simulations. Ces dernières années nous avons enrichi la démarche en apportant une dimension stochastique qui permet de prendre en compte les incertitudes portées par les matériaux et la géométrie. Parallèlement à ces travaux, le co-développement de Code\_Carmel3D avec EDF R&D au sein du LAMEL nous permet de capitaliser en grande partie les résultats de nos recherches. Le but de cet outil est de pouvoir simuler, numériquement et rapidement, les problèmes électromagnétiques en basse fréquence. Les résultats de ces simulations peuvent servir à la conception, à la compréhension de phénomènes locaux, à la détermination des schémas équivalents ou à l'élaboration de modèles réduits en vue d'étudier le composant électromagnétique dans un système.

### **Perspectives en vue d'améliorer la qualité de solution**

Pour améliorer la qualité des résultats, plusieurs pistes doivent être explorées. Tout d'abord, il convient d'accroître la précision des modèles et de la caractérisation des matériaux en prenant en compte, par exemple, le phénomène d'hystérésis. Une seconde piste s'oriente vers l'amélioration de la discrétisation, soit en raffinant le maillage, soit en employant la méthode de discrétisation adaptée aux problèmes traités.

### **Vers un code à plusieurs méthodes de discrétisation**

La méthode des éléments finis autour de laquelle code\_carmel3D est articulé est bien adaptée aux machines électriques. Toutefois, elle n'est pas universelle et ne permet pas de modéliser correctement l'ensemble des dispositifs électrotechniques. Prenons l'exemple des grandes déformations observées dans les contacteurs, les maillages peuvent être très différents entre chaque position et engendrer, dans le cas de la méthode des éléments finis une erreur numérique non négligeable. La méthode des éléments naturels semble mieux adaptée pour modéliser ce type de dispositifs car, cette méthode pouvant être considérée comme une méthode sans maillage, elle est peu sensible à la déformation de la géométrie. Toutefois cette méthode est basée sur une approche nodale qui rend le passage aux éléments d'arêtes peu aisé. Quant à la FIT, elle reste très compétitive en haute fréquence. Actuellement une autre méthode semble prometteuse. Il s'agit de la Méthode de Galerkin Discontinue (MGD) qui fait l'objet de nombreuses communications. Contrairement à la méthode

des éléments finis qui permet de vérifier dans chaque élément l'équation à résoudre en imposant, comme nous l'avons vu, partiellement les conditions de passage entre chaque élément, la Méthode de Galerkin Discontinue cherche évidemment à vérifier dans chaque élément l'équation à résoudre mais les conditions de passage entre chaque élément sont des degrés de liberté. D'après les résultats présentés dans la littérature scientifique, cette méthode offre une qualité de solution équivalente à celle de la FEM. Il s'avère que cette méthode est très bien adaptée au GPU. Les accélérations obtenues sont très convaincantes. A ces méthodes, il serait judicieux d'associer des estimateurs d'erreur *a priori* pour évaluer la pertinence de la méthode face à un problème donné. On pourrait aussi estimer le temps de résolution en fonction du calculateur dont nous disposons. A l'aide de ces outils, on pourrait, *a priori* estimer le ratio qualité de la solution sur temps de calcul avant la moindre résolution pour différentes méthodes. L'utilisateur sera alors conforté dans le choix de la méthode à utiliser pour résoudre son problème.

### Estimateurs d'erreur et stratégies de remaillage

A court terme, les estimateurs résiduels seront appliqués aux formulations en potentiels du domaine temporel. Cette étude est dans la continuité des travaux de Z. Tang et se fera en collaboration avec E. Creusé (LPP) et S. Nicaise (LAMAV). Aux estimateurs d'erreur *a posteriori*, il est nécessaire d'associer un algorithme de remaillage qui permettra de diminuer l'erreur numérique. Nous avons vu que, malgré leurs fiabilité et efficacité prouvées, nous obtenons une distribution de l'erreur numérique différente selon le type d'estimateur ou selon la formulation. Or, ces différentes cartes servent de données d'entrée aux algorithmes de remaillage. Cela nous conduira à des maillages différents donc à des solutions différentes. Par conséquent, un remaillage associé à une formulation engendrera une erreur globale plus faible. Par contre, pour la formulation duale, le raffinement pourra dégrader la solution. Pour la magnétostatique l'estimateur d'erreur équilibré peut servir de garde fou car il donne la distance entre les solutions exactes et approchées. Par contre pour la magnétodynamique, cette distance n'est pas accessible. Dans ce cas, pour garantir une bonne qualité de la solution, il faudrait développer des algorithmes de remaillage qui assure deux conditions: que l'erreur diminue pour une formulation et qu'elle reste a minima constante pour la formulation duale. La maîtrise du raffinement de maillage contrôlé par les estimateurs d'erreur numériques permettra de combler en partie nos lacunes en matière de discrétisation spatiale.

### Perspectives en termes d'applications

Malgré le travail qui reste à effectuer en termes d'amélioration de la qualité de solution, les outils de calcul de champ dont nous disposons actuellement permettent de modéliser correctement un grand nombre d'applications. Nous pouvons notamment modéliser le fonctionnement du composant électromagnétique dans son

environnement en considérant notamment son environnement électrique (couplage avec le circuit, fréquences élevées) et/ou son environnement multiphysique. Du point de vue théorique, il reste encore beaucoup de recherches à effectuer notamment sur la réduction de modèle. Du côté multiphysique, des travaux sont menés, au laboratoire, sur le transfert de solutions entre deux maillages dédiés à la modélisation de deux physiques différentes.

### **Vers les fréquences élevées**

Actuellement, nous voyons apparaître de plus en plus de modèles de composants électrotechniques en haute fréquence (Câble, transformateur, ...) établis à partir de la méthode des éléments finis ou PEEC. Ces modèles sont employés pour simuler les transitoires rapides et étudier les problèmes de compatibilité électromagnétique. Toutefois les fréquences d'étude doivent rester suffisamment basses afin de pouvoir appliquer les hypothèses des régimes quasi-stationnaires. Dans ces conditions, il serait aussi intéressant de développer un estimateur *a priori* afin d'évaluer la validité de cette hypothèse. Actuellement, les méthodes pour la détermination des inductances et des résistances sont robustes. Toutefois, il reste encore des difficultés pour le calcul des capacités surtout si le rapport entre les épaisseurs du diélectrique et du conducteur est grand. Il serait intéressant de confronter les méthodes existantes, notamment la FIT et la MGD, afin d'utiliser la méthode la plus performante ou de coupler plusieurs méthodes.

### **Simulation des dispositifs électrotechniques dans leurs environnements**

Malgré les efforts de recherches, la compréhension précise du fonctionnement des dispositifs électrotechniques en basse fréquence reste encore un défi. En effet, un tel dispositif en fonctionnement normal; chauffe, vibre, rayonne, s'oxyde, ... plus ou moins fortement selon la qualité de sa conception. Il est à noter que ces effets (échauffements, vibrations, rayonnement) peuvent être générés par l'environnement de la machine. Un point qui me paraît essentiel est l'étude du refroidissement et l'identification des points chauds de la machine. On peut imaginer que la baisse de température des points chauds dus à une bonne circulation de fluides de refroidissement conduira à une répartition plus uniforme de la température au sein de la structure. Cela pourrait conduire à de meilleurs rendements et des puissances massiques plus importantes. Du côté des simulations numériques, cela nous conduit à effectuer des études multiphysiques (électromagnétique, thermique et fluide). Actuellement, les codes de calcul de ces trois domaines de la physique ainsi que le couplage entre les codes, acquièrent une certaine maturité qui nous permet de présager l'aboutissement des études multiphysiques. La forme des têtes de bobines, des événements et des carcasses risque de subir de grands changements afin d'optimiser le refroidissement des machines. De plus, tous les sollicitations thermiques, mécaniques, ... conduisent à un vieillissement prématuré des appareils qui finissent

généralement par dysfonctionner. Il serait intéressant lors de la modélisation du dispositif (pour des besoins d'étude et de conception) de prendre en compte tous ces phénomènes en effectuant des études multiphysiques. Cela permettra d'étudier plus en détail le vieillissement de la machine et prédéterminer sa durée de vie dès la phase de conception. Ces études existent en aéronautique, notamment sur les ailes d'avions et les aubes de turboréacteurs. De telles études, à notre connaissance, ne sont pas conduites sur les machines électriques. Mais, dans ce cas, il est nécessaire d'établir des modèles de matériaux évoluant en fonction du vieillissement de ces derniers. L'approche probabiliste développée au laboratoire peut répondre en partie à cette problématique. A court terme l'étude sur le diagnostic de défauts (excentricités et défauts rotoriques) des générateurs synchrones se poursuit, en collaboration avec le LAGIS, en introduisant des techniques de reconnaissance de formes pour analyser les signaux issus des simulations. Le but de l'étude est d'identifier les positions les plus pertinentes des capteurs en fonction du défaut à détecter afin de développer un outil fiable de diagnostics de défauts.

# Bibliographie

- [Abe97] Abe K. , Zhang S., Mitsui T., "MRTR method : An iterative method based on the three-term recurrence formula of CG-type for non symmetric matrix", JSIAM, vol. 7, p.37 , 1997.
- [Albanese90] Albanese A., Rubinacci G., "Magnetostatic field computations in terms of two components vector potentials", International journal for the numerical methods in engineering, Vol. 29, pp. 515-532, 1990.
- [Amestoy96] Amestoy P., Davis T. Duff I., "An approximate minimum degree ordering algorithm", SIAM J. Matrix Anal. Appl., vol. 17, pp.886,1996
- [Amestoy00] Amestoy P. , Duff I., L'Excellent J.-Y. "Multifrontal parallel distributed symmetric and unsymmetric solvers", Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., vol. 184, pp.501 2000
- [Antunes05.1] Antunes O. J., Bastos J. P. A., Sadowski N., Razek A., Santendrea L., Bouillault F., Rapetti F., "Using Hierarchic Interpolation With Mortar Element Method for Electrical Machines Analysis", IEEE Trans. Mag, vol.41, N°5, pp 1472 - 1475 , 2005
- [Antunes05.2] Antunes O. J., Bastos J. P. A., Sadowski N., Razek A., Santendrea L., Bouillault F., Rapetti F., "Comparison between non-conforming movement methods", IEEE Trans. Magn., vol. 41, n°5, pp 1472-1475, 2005.
- [Aubertin12] Aubertin M., Henneron T., Piriou F., Mipo J.-C., " Mortar Method Using Bi-Orthogonal Nodal Functions Applied to A- $\varphi$  Formulation", IEEE Trans. Mag., vol. 48, no. 2, pp. 841-494, 2012
- [Badics07] Badics Z. and . Cendes Z. J., "Source Field Modeling by Mesh Incidence Matrices ", IEEE Trans. Mag., vol. 43, no. 4, pp. 1241-1244, 2007
- [Bank93] Bank, R.E., Smith, R.K., "A Posteriori Error Estimates based on Hierarchical Bases". SIAM J. Numer. Anal. 30, 921–935 ,1993
- [Bastos03] Bastos J.P.A, Sadowski N., "Electromagnetic modelling by finite Element methods", Editions Marcel Dekker, New York, Basel, 2003
- [Bastos09] Bastos, J.P.A., "Is it possible to solve a FEM static case without assembling, storing and solving an  $Ax = b$  matrix system?" ICS Newsletter, Vol 16, Number 1, March 2009, UK.

- [Beck00] Beck R., Hiptmair R., Hoppe R.H.W. and Wohlmuth B., "Residual based a posteriori error estimators for eddy current computation", M2AN, 34, 1, 159-182, 2000.
- [Bossavit82] Bossavit A., Verite J.-C., "A mixed fem-biem method to solve 3-D eddy-current problems", IEEE Trans. Magn., vol. 18, no° 2, pp. 431-435, 1982.
- [Bossavit88] Bossavit A., "Whitney's form's : a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism", IEE Proceedings, Vol. 135, Part A, n° 8, pp 498-499, 1988.
- [Bossavit93] Bossavit A., "Electromagnétisme en vue de la modélisation", édition verlag, 1993.
- [Bossavit00] Bossavit A., Kettunen L., "Yee-Like Schemes on Staggered Cellular Grids : A Synthesis Between FIT and FEM approaches", IEEE Trans. Magn., vol. 36, pp. 861-867, 2000.
- [Bossavit01] Bossavit A., "Generalized finite difference in computationnel electromagnetics", PIER.32 pp45-64, 2001.
- [Boualem98] Boualem B., Piriou F., "Modélisation 3D du circuit électrique et du mouvement : application à la machine asynchrone", European Physical Journal Applied Physics, vol.1 n°1, pp 67-71, 1998.
- [Brahimi93] Brahimi A.T , Foggia A., Meunier G., "End Winding Reactance Computation Results Using a 3D Finite Element Program", IEEE Trans. Magn., vol. 29, no° 2, pp. 1411-1411, 1993.
- [Cendes85] Cendes Z., Shenton D., "Adaptive mesh refinement in the finite element computation of magnetic fields", IEEE Trans. Magn., vol. 21, no° 5, pp. 1811-1416, 1985.
- [Chandr.09] Chandrasekaran S., Gu M. ,Li X. S. and J. Xia, "Superfast Multifrontal Method for Large Structured Linear Systems of Equations", SIAM. J. Matrix Anal. & Appl. 31, pp. 1382-1411, 2009.
- [Chinesta02] Chinesta F, "La méthode des éléments naturels en calcul de structures et simulations des procédés", Editions Lavoisier, 2009
- [Cuthill69] Cuthill E. and McKee J., "Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices" In Proc. 24th Nat. Conf. ACM, pages 157-172, 1969.
- [Clemens00.1] Clemens M., Weiland T., Wilke M., "Transient Eddy Current Formulation Including Moving Conductors Using the FI Method", IEEE Trans. Mag. Vol. 36, n°4, pp. 804-808, juillet 2000.
- [Clemens00.2] Clemens M., Gjonaj E., Pinder P. , Weiland T., "Numerical simulation of coupled transient thermal and electromagnetic fields with the finite integration method", IEEE Transactions on magnetics, Vol. 36, No. 36, pp. 1448-1452, July 2000.

- [Clemens01] Clemens M., Weiland T., "Discrete electromagnetics : Maxwell's equations tailored to numerical simulations", *Internat. Compumag. Soc. Newsletter* 8 (2) (2001) 13-20.
- [Clemens02.1] Clemens M., Weiland T., "Magnetic Field Simulation Using Conformal F.I.T. Formulations", *IEEE Transactions On Magnetism*, vol. 38, n°. 2, pp. 389-392, mars 2002
- [Clemens02.2] Clemens M., Wilke M., Weiland T., "3-D transient eddy-current simulations using FITD schemes with variable time-step selection", *IEEE Trans. Mag.*, vol. 38, n°2, pp. 605-608, mars 2002.
- [Clemens04] Clemens M. , Feight S., Weiland T., "Geometric Multigrid Algorithms Using the Conformal Finite Integration Technique", *IEEE Trans.Mag.*, vol. 40, N°. 2, pp. 1065-1068, Mars 2004.
- [Costabel] Costabel M, DAUGE M., "Espaces fonctionnels Maxwell : Les gentils, les méchants et les singularités", [http ://perso.univ-rennes1.fr/monique.dauge/publis/CoDaZmax.pdf](http://perso.univ-rennes1.fr/monique.dauge/publis/CoDaZmax.pdf)
- [Creusé03] Creusé E., S. Nicaise S., "A posteriori error estimation for the heterogeneous Maxwell equations on isotropic and anisotropic meshes", *Calcolo*, vol 40, No. 4, pp. 249-271, 2003.
- [Davat85] Davat B., Ren Z., Lajoie-Mazenc M., "The movement in field modeling ", *IEEE Trans. Mag.*, vol.21, N°6, pp 2296-2298, 1985
- [Davat82] Davat B., Lajoie-Mazenc M., Hector J., Foaucher.J, "Procedure for Analyzing Electromagnetic Systems with Eddy Currents : DIFI-MEDI Program", *Revue generale de l'électricite Paris*, Vol 10, pp 658-661, 1982,
- [DeGennes94] P.G De Gennes, J. Badoz, "Les objet fragiles", editons Plon, 1994
- [Demmel99] Demmel J. W., Eisenstat S. C., Gilbert J. R., Li X. S.and Liu J. W. H., "A supernodal approach to sparse partial pivoting", *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 20, pp.720 1999
- [Dreher96] Dreher T., Perrin-Bit R., Meunier G., Coulomb J.L., 'A three dimensional finite element modelling of rotating machines involving movement and external circuit ', *IEEE Trans. Mag.*, vol.32, N°3, pp 1070 - 1073 , 1996
- [Dular98] Dular P., Legros W., Nicolet A. "Coupling of local and global quantities in various finite element formulations and its application to electrostatics, magnetostatics and magnetodynamics", *IEEE Trans. Mag.* Vol. 34 no 5, pp 3078-3081, 1998
- [Dular01] Dular P., Geuzaine C., "Connection boundary conditions with different types of finite elements applied to periodicity conditions and to the moving band", *COMPEL*, vol. 20 n°1, pp.109-119, 2001.
- [Dular09] Dular P., "A Posteriori Error Estimation of Finite Element Solutions via the Direct Use of Higher Order Hierarchal Test Functions"



- , IEEE Transactions on Magnetism, Vol. 45, no° 3, pp 1360-1363, March 2009.
- [Eisenstat89] Eisenstat S. C., Elman H. C., Schultz M. H., Sherman A., "Variational iterative method for nonsymmetric systems of linear equation", SIAM J. Numer. Anal., vol. 20, p.345 , 1989.
- [Freund91] Freund R. W. and Nachtigal N. M., "QMR : A quasi-minimal residual method for non-Hermitian linear systems", Numer. Math., vol. 60, p.315 , 1991.
- [Freund94] Freund R. W. and Nachtigal N. M., "A new Krylov-subspace method for symmetric indefinite linear systems", Proc. 14th IMACS World Congress on Comp. App. Math., p.1253 , 1994.
- [George73] George A., "Nested dissection of a regular finite element mesh", SIAM J. Numer. Anal., vol. 10, pp.345 1973.
- [Golovanov99] Golovanov C., Maréchal Y., G. Meunier, "A New Technique for Stranded Coil Treatment in a 3D Edge Element Based Formulation", IEEE Trans. Mag., vol. 35, no. 3, 1999
- [Hahn88] Hahn S.-Y., Calmels C., Meunier G., Coulomb J.L., "A posteriori error estimate for adaptive finite element mesh generation" IEEE Trans. Mag, vol.24, N°1, pp 315 - 317 , 1988.
- [Henneron06] Henneron T., Clenet S., Piriou F., "Calculation of global quantities using incidence matrixes in the A-phi formulation. ", Proceeding . of CEM, 2006
- [Hesthaven08] Hesthaven J. S., Warburton T. , "Nodal Discontinuous Galerkin Methods : Analysis, Algorithms, and Applications. Berlin", Springer-Verlag, 2008.
- [Kettunen99] Kettunen L., Forsman K., Bossavit A., "Gauging in Whitney spaces", IEEE Trans. Mag, vol.35, N°3, pp 1466 - 1469 , 1999.
- [Kotigua84] Kotigua P.R., 'Hodge decomposition and computational electromagnetics', P.H.D thesis , Mc Gill University, 1984.
- [Krebs09.1] Krebs G., Abakar A., and Clenet S., "Comparison of Error Estimators in Eddy Current Testing" ,EEE Trans. Mag, vol.45, N°3, pp 968 - 971 , 2009.
- [Krebs09.2] Krebs G., Clenet S., Abakar A., Locment F., Piriou F., "Method to Connect Nonconforming Mesh in 3-D With the Overlapping Method", IEEE Trans. Mag., vol.45, N°3, pp 1420 - 1423, 2009
- [Krebs10] Krebs G., Clenet S., Tsukerman I., "Overlapping Finite Elements for Arbitrary Surfaces in 3-D ", IEEE Trans. Mag., vol.46, N°8, pp 3473 - 3476 , 2010.
- [Krebs11] Krebs G., Henneron T., Clenet S., Le Bihan Y., "Overlapping Finite Elements Used to Connect Non-Conforming Meshes in 3-D With a

- Vector Potential Formulation ", IEEE Trans. Mag., vol.47, N°5, pp 1418 - 1421 , 2017.
- [Ladas08] Ladas D., Mazauric V., Meunier G., Chadebec O., Ebene Ebene M., Marechal Y. and Wendling P., "An energy based approach of electromagnetism applied to adaptive meshing and error criteria", IEEE Trans. Magn., vol. 44, pp. 1246, 2008.
- [Ladevèze83] Ladevèze P. and Leguillon D. , "Error estimate procedure in the finite element method and applications", SIAM. J. Numer. Anal., pp.485 -509 1983.
- [Li94] Li. C, Ren. Z, Razek A, "An approach to adaptive mesh refinement for three-dimensional eddy-current computations", IEEE Trans. Mag., vol. 30, no. 1, part 1-2, pp 113-117, 1994
- [Lepaul99] Lepaul S., Sykulski J. K., Biddlecombe C. S., Jay A. P., Simkin J., "Coupling of motion and circuits with electromagnetic analysis ", IEEE Trans. Magn., vol. 35, n°3, Part I, pp 1602-1605, 1999.
- [LeVeque02] LeVeque R.J. , "Finite volume methods for hyperbolic problems, Cambridge Texts in Applied Mathematics", Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Meunier02] Meunier G. sous la Direction de, "Electromagnétisme et problèmes couplés" ; Hermes, Lavoisier, 2002.
- [Meunier86] Meunier G., Coulomb J., Salon S., Krahenbul L., "Hybrid finite element boundary element solutions for three dimensional scalar potential problems", IEEE Trans. Magn., vol.22, n°5, pp 1040-1042, 1986.
- [Marmin00] Marmin F. , Clenet S. , Bouillault F. , and Piriou F. , "Calculation of complementary solutions in 2-D finite element method application to error estimation", IEEE Trans. Mag., vol. 36, no.4, pp. 1583-1587, 2000.
- [Marrone04.1] Marrone M., "A New Consistent Way to Build Symetric Constitutive Matrices on General 2-D Grids", in IEEE Trans. on Mag., vol.40, N°2, March 2004.
- [Marrone04.2] Marrone M., "Properties of Constitutive Matrices for Electrostatic and Magnetostatic Problems", in IEEE Transactions on Magnetism, vol.40, N°3, May 2004.
- [Nicaise05] Nicaise. S, "Estimateurs d'erreur du type Zienkiewicz–Zhu pour les équations de Maxwell", C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340. 697–702, 2005.
- [Perrussel06] Perrussel R., Nicolas L., Musy F, Krahenbuhl L., Schatzman, M., Poignard C., "Algebraic multilevel methods for edge elements", IEEE Trans. Mag., Vol. 42 N° 4, 619 - 622, 2006.

- [Perrin-Bit95] Perrin-Bit R., Coulomb J.L, "A three dimensional finite element mesh connection for problems involving movement", IEEE Trans. Mag., vol.31, N°5, pp 1920 - 1923, 1995.
- [Podebrad03] Podebard O.,Clemens M., Weiland T., "New flexible sugridding schem for Finite Integration Technique", IEEE Transaction on Magnetism, vol.39, N°3, 2003.
- [Preston88] Preston T. W., Reece A. B. J., Sangha P. S., "Induction motor analysis by time-stepping techniques", IEEE Trans. Magn. vol. 24, n°1, pp 471-474, 1988.
- [Ranran09] Ranran L. Arkkio A., "Calculation and Analysis of Stator End-Winding Leakage Inductance of an Induction Machine", IEEE Transactions on Magnetism, Vol. 45, no° 4, pp 2009-2014, 2009.
- [Rapetti00] Rapetti F., Bouillault F., Santandrea L., Buffa A., Maday Y., Razek A., "Calculation of eddy currents with edge elements on non-matching grids in moving structures ", IEEE Trans. on Magn., vol. 36, n°4, pp 1351-1355, 2000.
- [Rapetti02] Rapetti F., Maday Y., Bouillault F., Razek A., "Eddy-current calculations in three-dimensional moving structures", IEEE Trans. on Magn., vol. 38, n°2, pp 613-616, 2002.
- [Remacle95] Remacle J. F.,Dular P., Genon A. , and Legros W., "Error estimation and mesh optimization using error in constitutive relation for electromagnetic field computations", IEEE Trans. Mag., vol. 31, pp.3587 -3589, 1995.
- [Ren96] Ren Z., "Influence of R.H.S on the convergence behaviour of curl-curl equation", IEEE Trans. Mag., vol 32, pp 655-658, 1996
- [Richard96] Richard N., Duffeau F., Leger A.C., Szylowicz N., "Computation of forces and stresses on generator end windings using a 3D finite element method", IEEE Transactions on Magnetism, Vol. 32, no° 3, Part I, pp 1689-1692, May 1996.
- [Rikabi88] Rikabi J, Bryant C. F. , and Freeman F. , "An error based approach to complementary formulations of static field solutions", International Journal for Numerical Method in Engineering, vol. 26, pp.1963 -1987, 1988
- [Rodger90] Rodger D., Lai H. C., Leonard P. J., "Coupled element for problems involving movement", IEEE, Trans. Magn., vol 26, no2, pp 548-550, 1990.
- [Rodriguez10] Rodriguez A.A.,Valli A., "Eddy Current Approximation of Maxwell Equations", Milan : Springer Verlag Italia, 2010,
- [Rodriguez05] Rodriguez A.A., Hiptmair R.,Valli A., "Hybrid formulations of eddy current problems", Numer Method Part Differ Eq, 21(4) :742-763, July 2005

- [Saad86] Saad Y. and Schultz M. H., "GMRES : A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems", SIAM J. Sci. Stat. Comp., vol. 7, p.856 , 1986.
- [Saad03] Saad Y. , "Iterative Methods for Sparse Linear Systems", SIAM, 2003
- [Sadowski92] Sadowski N., Lefevre Y., Lajoie-Mazenc M., Cros J., "Finite element torque calculation in electrical machines while considering the movement ", IEEE Trans. Mag., vol.28, N°2, pp 1410 - 1413 , 1992
- [Salon85] Salon S. , "The hybrid finite element-boundary element method in electromagnetics " , IEEE Trans. Mag., vol.21, N°5, pp 1829-1834 , 1985
- [Smoch99] Smoch L., "Some results about GMRES in the singular case", Numeric. Algo., vol. 22, p.193 , 1999.
- [Spasov03] Spasov, V., Noguchi, S., Yamashita, H., "Fast 3-D edge element analysis by the geometric multigrid method using an accelerated symmetric Gauss-Seidel smoother", IEEE Trans. Mag., vol 39, no 3, pp 1685-1688, 2003
- [Specogna05] Specogna R., Trevisan F., " Discrete constitutive equations in A- $\chi$  geometric eddy-current formulation ", Trans. Mag. Vol. 41 no 4, pp 1259-1263, 2005
- [Sterz06] Sterz O. , Hausser A. , Wittum G., "Adaptive Local Multigrid Methods for Solving Time-Harmonic Eddy-Current Problems ", IEEE Trans. Magn., vol 42, no 2, 309-318, 2006.
- [Tarhasaari99] Tarhasaari T., Kettunen L., Bossavit A., "Some realizations of a discrete Hodge operator : A reinterpretation of finite element techniques', IEEE Trans. Mag. vol. 35, no. 3, pp 1494-1497, May1999
- [Tonti95] Tonti E., "On the Geometrical Structure of the Electromagnetism, Gravitation, Electromagnetism and Geometrical Structures, for the 80th birthday of A. Lichnerowicz", Edited by G. Ferrarese, 1995, Pitagora Editrice Bologna, 281-308. (pdf, 560 KB).
- [Tonti98] Tonti E., "Algebraic topology and computational electromagnetism", International Workshop on Electric and Magnetic Field, pp 285-294, Marseille 1998.
- [Tonti01] Tonti E., Finite Formulation of the Electromagnetic Field, Progress in Electromagnetics Research, PIER 32 (Special Volume on Geometrical Methods for Comp. Electromagnetics, pp.1-44, (2001) (pdf, 1.3 MB).
- [Tsukerman92] Tsukerman I. A. , "Overlapping finite elements for problems with movement", IEEE Trans. on Magn., vol. 28, n°5, pp 2247-2249 ,1992.
- [VanRienen01] Van Rienen U, "Numerical methods in computational electrodynamics, Linear systems in practical applications", Springer-verlag, 2001

- [VanderVorst92] Van der Vorst H. A., "Bi-CGSTAB : A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems", SIAM J. Sci. Stat. Comput., vol. 13, p.631 , 1992.
- [Watanabe05] Watanabe, K. ,Igarashi, H. ,Honma, T. "Comparison of geometric and algebraic multigrid methods in edge-based finite-element analysis", IEEE Trans. Mag.,vol41, no 5, 1672-1675, 2005.
- [Weiland77] Weiland T.,"A discretization method for the solution of Maxwell's equations for six-component fields", Electron. Commun. (AE), vol. 31, pp.116, 1977.
- [Zienkiewicz87] Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z., "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis", Internat. J. Numer. Methods Eng. 24, 337–357, 1987.
- [Zhuang11] Zhuang C., Zeng R., Zhang B., Chen S., Jinliang H., "Accelerating the Convergence of Algebraic Multigrid for Quadratic Finite Element Method by Using Grid Information and p-Multigrid", IEEE Trans. Magn., vol 47, no 5,pp 1198-1201, 2011.
- [1] <http://www.compumag.org/jsite/images/stories/TEAM/problem13.pdf>